

**МИНИСТРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

**Кафедра механики**

**Р.А. Шакирзянов, Ф.Р. Шакирзянов**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-  
ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ ПО КУРСУ  
«СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»**

**Для студентов дневной формы обучения  
по направлению подготовки бакалавров  
08.03.01 «Строительство»**

**КАЗАНЬ  
2017**

УДК 624.04 (075)

ББК 38.112

Ш17

Ш17 Учебно-методическое пособие для выполнения расчетно-графических работ по курсу «Строительная механика» (для студентов дневной формы обучения по направлению подготовки бакалавров 08.03.01 «Строительство») / Сост.: Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2017. – 64 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам очной формы обучения в качестве пособия при выполнении расчетно-графических работ по курсу «Строительная механика».

Рис. 65., табл. 25, библи. 10 наименов.

Рецензент:

доцент кафедры металлических конструкций  
и испытания сооружений ИС КГАСУ, к.т.н.

**Ефимов О.И.**

УДК 624.04 (075)

ББК 38.112

© Казанский государственный  
архитектурно-строительный  
университет, 2017

© Шакирзянов Р.А.,  
Шакирзянов Ф.Р., 2017

## ВВЕДЕНИЕ

Согласно Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования ФГОСЗ+, студенты направления подготовки 08.03.01 «Строительство» уровня высшего образования «бакалавриат» при изучении дисциплины «Строительная механика» должны получить ряд компетенций, среди которых наиболее важными являются:

- **знание** современных вычислительных алгоритмов, используемых при расчете сооружений;

- **владение** кинематическим анализом, методами определения внутренних усилий статически определимых и неопределимых систем, навыками подготовки исходных данных и обработки результатов расчета при использовании компьютерных программ;

- **умение** выбирать наиболее рациональный метод расчета, рассчитывать плоские стержневые и рамно-балочные системы на постоянную и подвижную нагрузки, пользоваться результатами теоретических и компьютерных расчетов при проверке сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Для достижения этих компетенций, студенты при изучении курса «Строительная механика» должны выполнить следующие 2 расчетно-графические работы (РГР):

РГР-1: «Расчет стержневых систем на постоянную и подвижную нагрузки»;

РГР-2: «Расчет статически неопределимых рам».

Исходные данные и схемы, необходимые для выполнения РГР, выдаются преподавателем, ведущим дисциплину. Таблица исходных данных для разных групп дана в Приложении 8.

Проверка хода выполнения работ и консультации проводятся преподавателями кафедры. При приеме работ могут проверяться теоретические знания, относящиеся к выполнению РГР, выдаваться тестовые задачи и контрольные вопросы.

Ход решения и результаты выполнения РГР оформляются в виде расчетно-пояснительных записок, листы которых скрепляются в отдельную брошюру-альбом. В нем должны быть титульная страница с выданной преподавателем расчетной схемой, страницы с кратким описанием процесса выполнения РГР и промежуточными схемами, страницы с окончательными результатами (эпюрами) и выводы. Работы должны выполняться четко и аккуратно по ЕСКД (Единой Системе Конструкторской Документации, ГОСТ 2.105-68) на страницах белой бумаги формата 210x297 мм с рамкой.

При выполнении контрольных работ следует придерживаться единых правил определения внутренних усилий и их знаков. Основные из этих правил даются ниже.

## ПРАВИЛО ЗНАКОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

В плоских стержневых системах возникают три внутренних усилия: изгибающий момент  $M$ , поперечная сила  $Q$  и продольная сила  $N$ . Они определяются для каждого сечения рассчитываемого сооружения и изображаются в виде эпюр.

Определим единые правила определения внутренних усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для любого сечения  $x$  плоской стержневой системы (рис. 1).

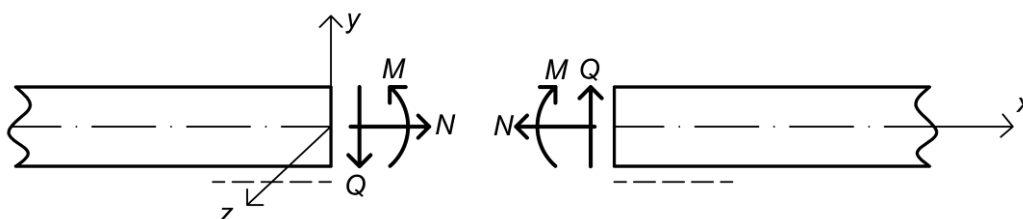


Рис. 1

**Изгибающий момент  $M$**  – это алгебраическая сумма всех моментов от всех усилий левее (или правее) относительно оси  $z$ :

$$M = \sum_{\text{лев}} M_{iz} = - \sum_{\text{пр}} M_{jz}.$$

Эпюра  $M$  изображается на стороне растянутого волокна элемента (на рис. 1 отмечен пунктирной линией внизу элемента). Знак («+» или «-») на этой эпюре обычно не ставится.

**Поперечная сила  $Q$**  – это алгебраическая сумма проекций всех сил, действующих слева (или справа) от сечения на ось  $y$ :

$$Q = \sum_{\text{лев}} Q_{iy} = - \sum_{\text{пр}} Q_{jy}.$$

Поперечная сила положительна (т.е. имеет знак «+»), если вращает левую (или правую) часть рассеченного стержня по часовой стрелке (рис. 1).

**Продольная сила  $N$**  – это алгебраическая сумма проекций всех сил, действующих слева (или справа) от сечения на ось  $x$ :

$$N = \sum_{\text{лев}} N_{ix} = - \sum_{\text{пр}} N_{jx}.$$

Продольная сила положительна (имеет знак «+»), если растягивает стержень.

По эпюре  $M$  можно определить  $Q$  по формуле Журавского

$$Q = \frac{dM}{dx} = \pm \operatorname{tg} \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между осью  $x$  и касательной к эпюре  $M$  в данной точке.

Знак («+» или «-») в этой формуле определяется по правилу: если ось эпюры  $M$  надо вращать до совпадения с эпюрой (или с касательной к ней) по направлению часовой стрелки, то  $Q$  имеет знак «+» (рис. 2 а), если надо вращать против часовой стрелки,  $Q$  имеет знак «-» (рис. 2 б).

Если эюра  $M$  в каком-то участке  $AB$  прямолинейна, там эюра  $Q$  постоянна, а ее величина определяется через тангенс ее угла наклона  $\varphi$  (см. схемы и формулы на рис. 2 а, б).

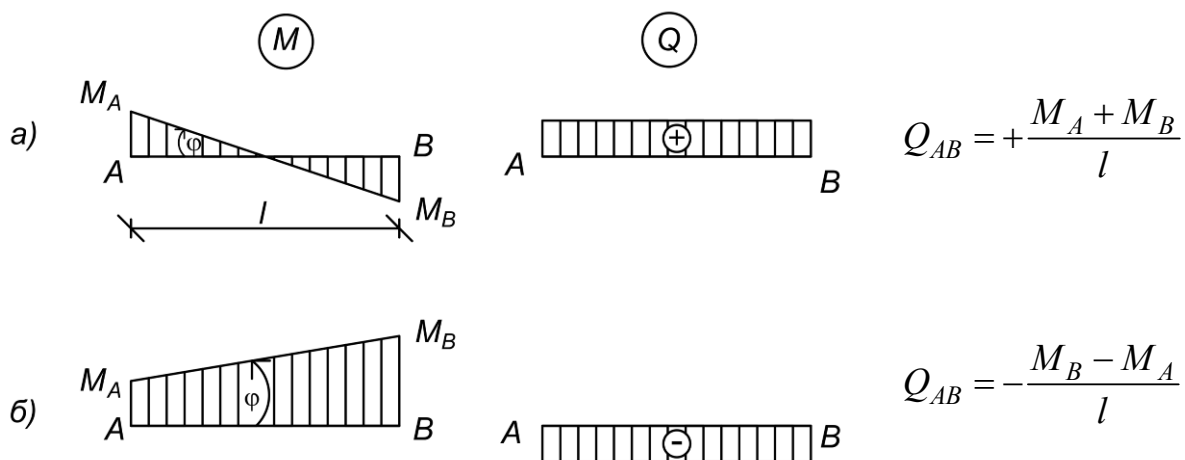


Рис. 2

Если же эюра  $M$  в данном участке длиной  $l$  криволинейна (т.к. там действует распределенная нагрузка  $q$ ), то эюра  $Q$  будет наклонной прямой. Ее значения определяются суммой  $Q$ , полученной по прямолинейной эюре  $M$  (при соединении ее концов прямой линией) и величин  $\pm \frac{ql}{2}$  по концам (см. схемы и формулы на рис. 3):

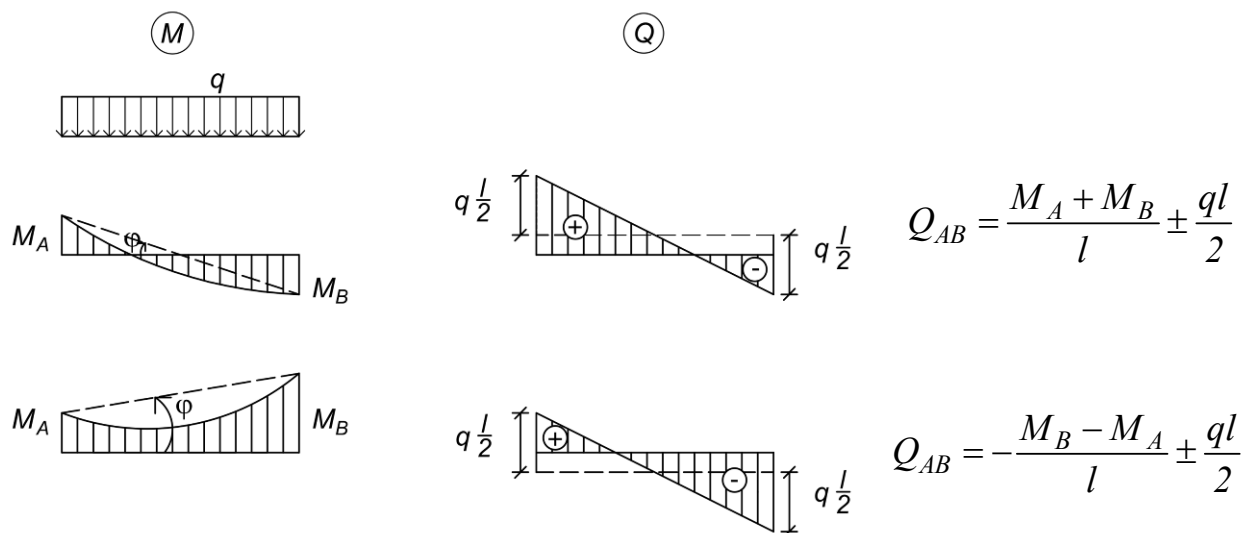


Рис. 3

В этом случае знаки  $Q$  по концам зависят от знака сумм, приведенных выше формул.

После построения эюры поперечных сил  $Q$ , по ней способом вырезания узлов можно определить и построить эюру продольных сил  $N$ .

**РГР-1:**  
**«РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ  
НА ПОСТОЯННУЮ И ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКИ»**

**Цель работы:**

1. Изучение методов расчета статически определимых и неопределимых систем на постоянную и подвижную нагрузки.
2. Изучение методов построения линий влияния (ЛВ) и определения по ним внутренних усилий от неподвижных и подвижных нагрузок.
3. Приобретение навыков построения эпюр внутренних усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ , построения линий влияния (ЛВ) опорных реакций и внутренних усилий.

**Объем работы:** решение двух задач.

**Задача 1:**  
**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ  
НА ПОСТОЯННУЮ И ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКИ**

**Содержание задачи:** определение внутренних усилий составной балочно-ферменной системы от постоянной нагрузки; построение линий влияния (ЛВ) всех опорных реакций и внутренних усилий в заданном сечении  $K$  одной из балок и в четырех стержнях фермы; определение по ЛВ расчетных значений реакций и усилий от заданной нагрузки; определение невыгоднейшего положения заданной подвижной нагрузки.

**Порядок выполнения:**

1. Провести кинематический анализ составной системы и построить ее этажную схему.
2. Из уравнений равновесия отдельных дисков определить величины и знаки реакций в междисковых и опорных связях.
3. Построить эпюры внутренних усилий  $M$ ,  $Q$  для отдельных балок, затем объединить их в общие эпюры  $M$ ,  $Q$  для всей составной системы.
4. Способом вырезания узлов определить продольные усилия во всех стержнях фермы. Правильность определения усилий в 4-х стержнях фермы (в стойке, раскосе, нижнем и верхнем поясах) проверить методом сквозных сечений. Результаты расчетов занести в таблицу.
5. Проверить правильность расчета на постоянную нагрузку.
6. Построить ЛВ всех опорных реакций составной системы, а также внутренних усилий  $M_K$  и  $Q_K$  для заданного сечения  $K$  статическим (или кинематическим) методом.
7. Построить ЛВ продольных усилий в 4-х стержнях фермы.
8. По всем построенным ЛВ определить усилия от заданной неподвижной нагрузки и сравнить их с ранее полученными результатами.
9. Выявить невыгоднейшее положение заданной подвижной нагрузки и вычислить расчетные значения 4-х усилий.

## Пример решения задачи 1

**Задача.** Провести расчет составной балочно-ферменной системы, заданной на рис. 4. Дано:  $a = 3$  м,  $P = 8$  кН,  $q = 3$  кН·м.

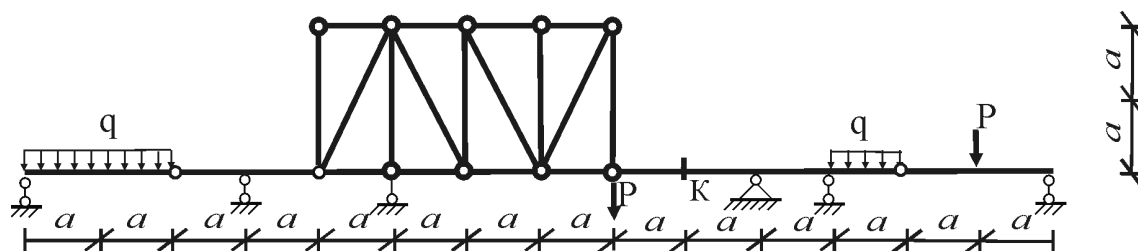


Рис. 4

Решение.

### 1. Кинематический анализ

#### а) Количественный анализ неизменяемости системы

Данная составная система (она повторяется на рис. 5 а) состоит из геометрически неизменяемой фермы ( $n_D=1$ ) и четырех балок ( $n_D=4$ ), последовательно соединенных четырьмя простыми шарнирами ( $n_{Ш}=4 \cdot 1=4$ ), опирается на одну неподвижную ( $n_{C0}=2$ ) и пять подвижных ( $n_{C0}=5 \cdot 1=5$ ) опор.

Определим число степеней свободы  $W$ :

$$W = 3n_D - 2n_{Ш} - n_{C0} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 7 = 0.$$

Необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости выполняется.

#### б) Качественный анализ неизменяемости системы

Этажная схема системы (рис. 5 б) собирается, начиная с неподвижного диска V. К нему слева способом триады последовательно присоединяются диски III, II, I, а справа диск IV. Из этой последовательности сборки этажной схемы следует, что система геометрически неизменяема и, следовательно, статически определима.

### 2. Определение реакций в междисковых и опорных связях

Так как система статически определима, а внешние нагрузки вертикальные, то все горизонтальные реакции в междисковых связях и неподвижной опоре узла 14 равны нулю.

Вертикальные реакции определяем в порядке разборки этажной схемы (рис. 2 б), составляя для каждого диска два уравнения равновесия типа  $\sum M_A = 0$ ,  $\sum y = 0$ , где  $A$  – номер одного из опорных узлов диска.

$$\text{Диск I: } \sum M_1 = 0, \quad R_2 \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0, \quad \Rightarrow R_2 = 9;$$

$$\sum y = 0, \quad R_1 + R_2 - q \cdot 2a = 0, \quad \Rightarrow R_1 = 9.$$

$$\text{Диск II: } \sum M_3 = 0, \quad R_2 \cdot a - R_4 \cdot a = 0, \quad \Rightarrow R_4 = R_2 = 9;$$

$$\sum y = 0, \quad -R_2 - R_4 + R_3 = 0, \quad \Rightarrow R_3 = 18.$$

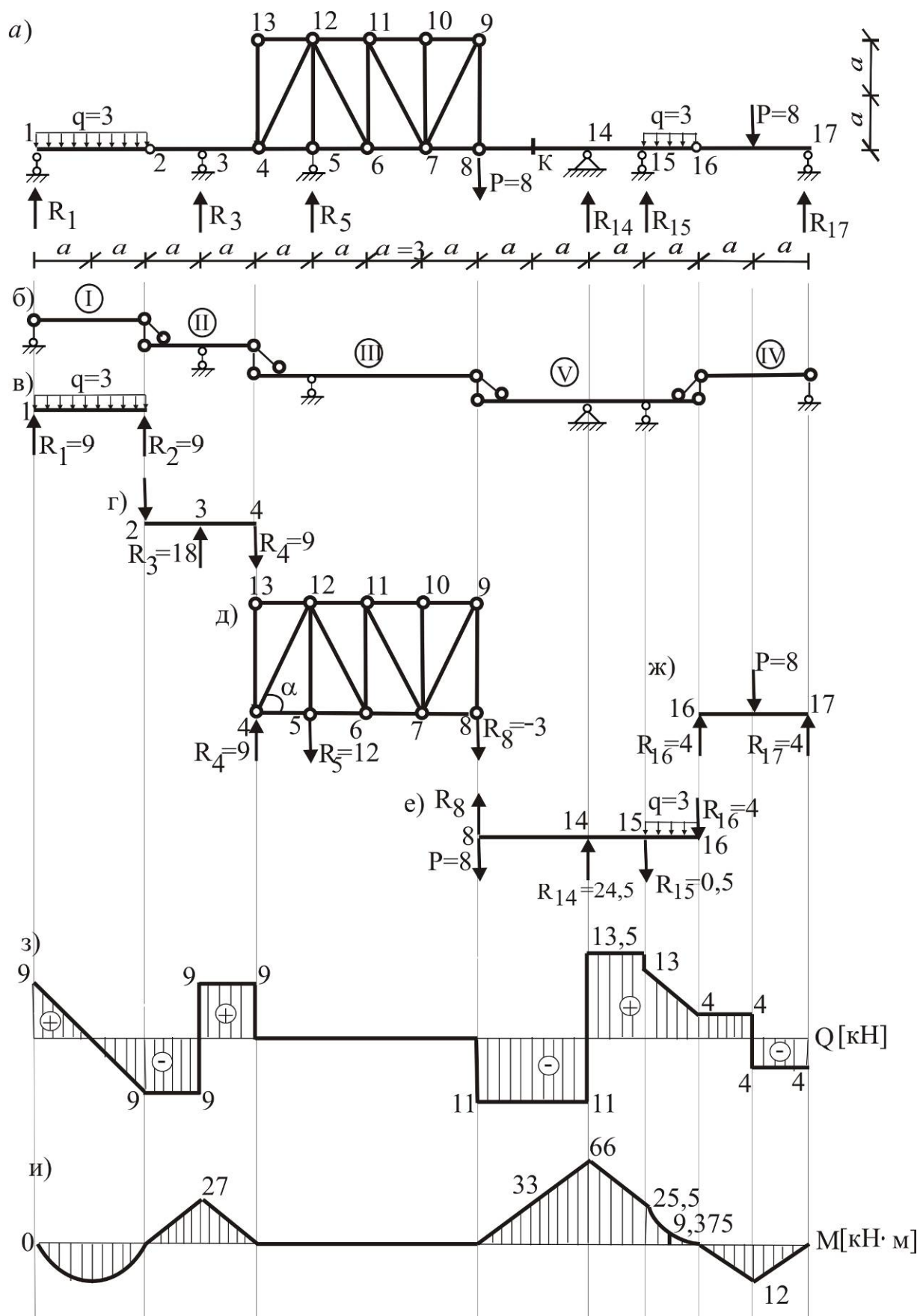


Рис. 5



$$\text{Диск III: } \sum M_8 = 0, \quad -R_4 \cdot 4a + R_5 \cdot 3a = 0, \Rightarrow R_5 = 12;$$

$$\sum y = 0, \quad R_4 - R_8 - R_5 = 0, \Rightarrow R_8 = -3.$$

$$\text{Диск IV: } \sum M_{17} = 0, \quad -R_{16} \cdot 2a + P \cdot a = 0, \Rightarrow R_{16} = 4;$$

$$\sum y = 0, \quad R_{16} + R_{17} - P = 0, \Rightarrow R_{17} = 4.$$

$$\text{Диск V: } \sum M_{15} = 0, \quad P \cdot 3a + R_8 \cdot 3a - R_{14} \cdot a - R_{16} \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2} = 0, \Rightarrow R_{14} = 24,5;$$

$$\sum y = 0, \quad -R_8 - P + R_{14} - R_{15} - R_{16} = 0, \Rightarrow R_{15} = 0,5.$$

На рис. 5 в-ж представлены результаты этих вычислений.

Теперь проверим условия равновесия всей составной системы (рис. 5 а):

$$\sum y = R_1 - q \cdot 2a + R_3 - R_5 - P + R_{14} - R_{15} - q \cdot a - P + R_{17} = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_K = & -R_1 \cdot 9a + q \cdot 2a \cdot 8a - R_3 \cdot 6a + R_5 \cdot 4a + P \cdot a + R_{14} \cdot a - R_{15} \cdot 2a - \\ & - q \cdot a \cdot 2,5a - P \cdot 4a + R_{17} \cdot 5a = -9 \cdot 9 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 - 18 \cdot 6 \cdot 3 + \\ & + 12 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 3 + 24,5 \cdot 3 - 0,5 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 2,5 \cdot 3 - 8 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = \\ & = -243 + 432 - 324 + 144 + 24 + 73,5 - 3 - 67,5 - 96 + 60 = 0. \end{aligned}$$

### 3. Определение внутренних усилий и построение их эпюр

Определение внутренних усилий  $M$ ,  $Q$ , и построение их эпюр проведем для каждого диска отдельно методом простых сечений, а затем состыкуем построенные эпюры в общие эпюры для всей составной системы. Значения моментов откладываем на стороне растянутого волокна балок. Момент  $M$  считается положительным, если растягивает нижнее волокно балки. Знаки («+» или «-») на эпюре  $M$  обычно не ставят. Значения поперечных сил откладываем на эпюре  $Q$ , знаки ставим в соответствии с правилом знаков ( $Q$  имеет знак «+», если вращает выделенную часть по часовой стрелке).

Эпюры  $M$  и  $Q$  для всей системы представлены на рис. 5 з, и.

### 4. Расчет фермы

Для выделенной из составной системы фермы (рис. 6)

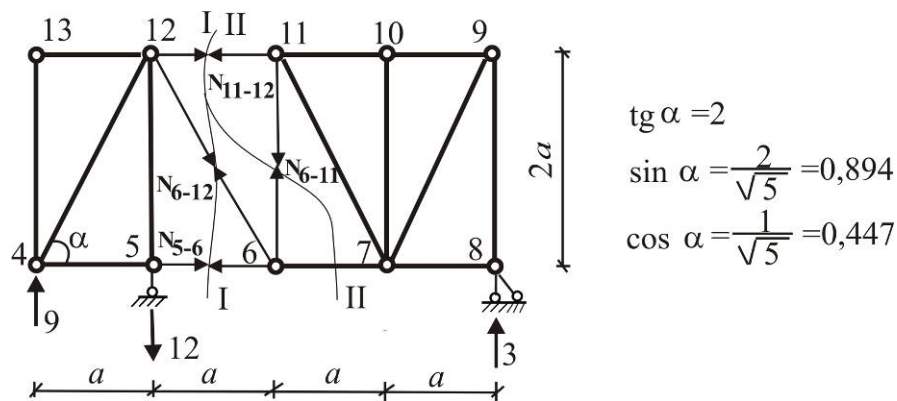


Рис. 6

определим продольные усилия  $N$  в стержнях фермы методом вырезания узлов. Для этого последовательно вырежем узлы фермы 13, 4, 5, 12, 8, 9, 10, 7, 6, 11 (рис. 7) и составляем уравнения их равновесия:

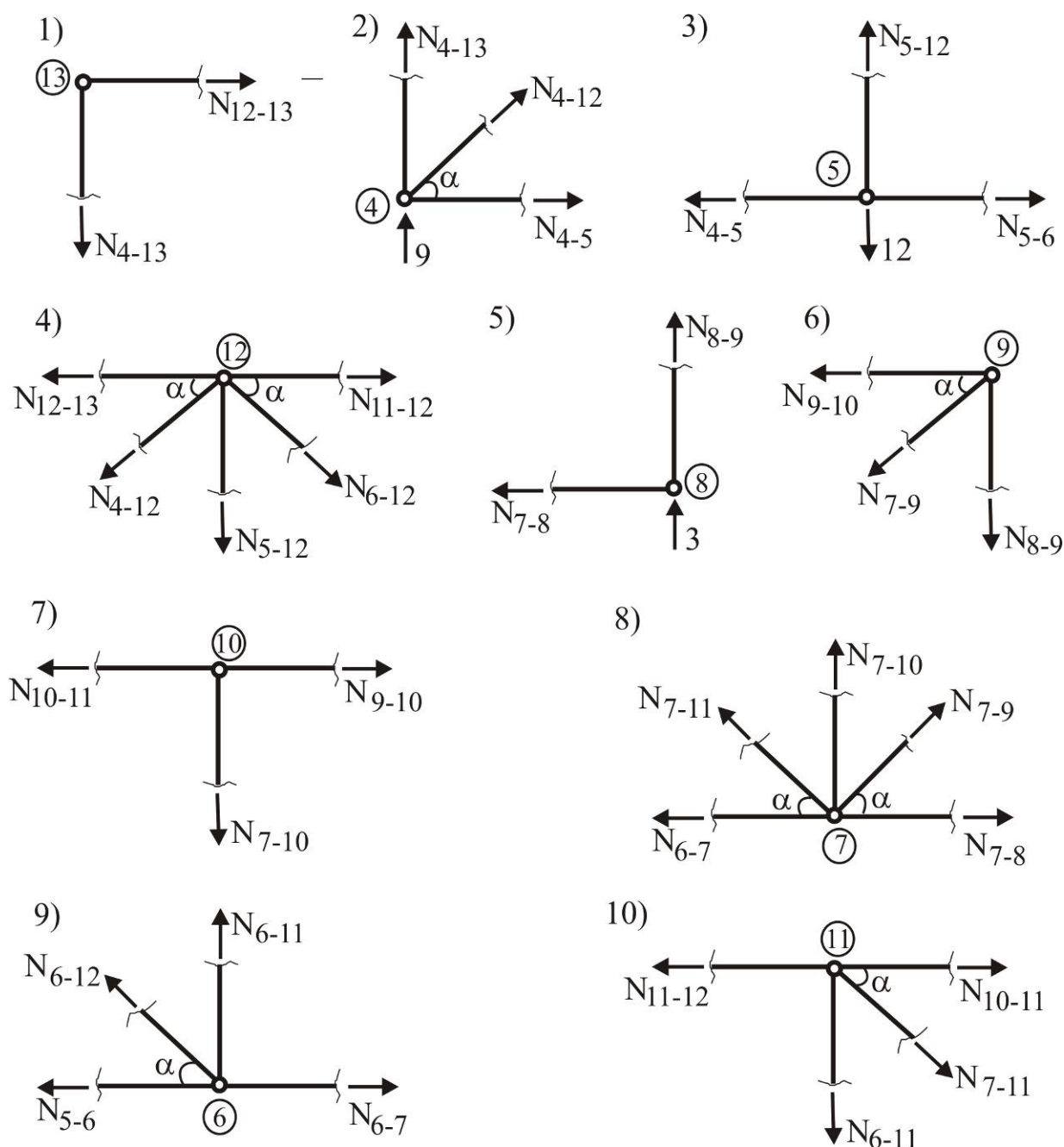


Рис. 7

$$1) \sum x = N_{12-13} = 0, \Rightarrow N_{12-13} = 0, \\ \sum y = -N_{4-13} = 0, \Rightarrow N_{4-13} = 0.$$

$$2) \sum x = N_{4-5} + N_{4-12} \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum y = N_{4-13} + N_{4-12} \cdot \sin \alpha + 9 = 0, \Rightarrow N_{4-12} = -10,067, N_{4-5} = 4,5.$$

- 3)  $\sum x = N_{5-6} - N_{4-5} = 0, \Rightarrow N_{5-6} = 4,5,$   
 $\sum y = N_{5-12} - 12 = 0, \Rightarrow N_{5-12} = 12.$
- 4)  $\sum x = -N_{12-13} + N_{11-12} - N_{4-12} \cdot \cos \alpha + N_{6-12} \cdot \cos \alpha = 0,$   
 $\sum y = -N_{4-12} \cdot \sin \alpha - N_{5-12} - N_{6-12} \cdot \sin \alpha = 0, \Rightarrow N_{6-12} = -3,356, N_{11-12} = -3.$
- 5)  $\sum x = -N_{7-8} = 0, \Rightarrow N_{7-8} = 0,$   
 $\sum y = N_{8-9} + R_8 = 0, \Rightarrow N_{8-9} = -3.$
- 6)  $\sum x = -N_{9-10} - N_{7-9} \cdot \cos \alpha = 0, \Rightarrow N_{9-10} = -1,5,$   
 $\sum y = -N_{8-9} - N_{7-9} \cdot \sin \alpha = 0, \Rightarrow N_{7-9} = 3,356.$
- 7)  $\sum x = N_{9-10} - N_{10-11} = 0, \Rightarrow N_{10-11} = -1,5,$   
 $\sum y = -N_{7-10} = 0, \Rightarrow N_{7-10} = 0.$
- 8)  $\sum x = -N_{6-7} + N_{7-8} - N_{7-11} \cdot \cos \alpha + N_{7-9} \cdot \cos \alpha = 0, \Rightarrow N_{6-7} = 3.$   
 $\sum y = N_{7-11} \cdot \sin \alpha + N_{7-10} + N_{7-9} \cdot \sin \alpha = 0, \Rightarrow N_{7-11} = -3,356.$
- 9)  $\sum x = N_{6-7} - N_{5-6} - N_{6-12} \cdot \cos \alpha = 0, \Rightarrow N_{5-6} = 0,$   
 $\sum y = N_{6-12} \cdot \sin \alpha + N_{6-11} = 0, \Rightarrow N_{6-11} = 3.$
- 10)  $\sum x = -N_{11-12} + N_{10-11} + N_{7-11} \cdot \cos \alpha = 3 - 1,5 - 3,356 \cdot 0,0447 = 0,$   
 $\sum y = -N_{6-11} - N_{7-11} \cdot \sin \alpha = -3 + 3,356 \cdot 0,894 = 0.$

## 6. Проверка

Проверим усилия в 4-х стержнях методом сквозных сечений (рис. 6).  
Сечение I-I:

$$\sum M_6^{np} = N_{11-12} \cdot 2a + R_8 \cdot 2a = 0, \Rightarrow N_{11-12} = -R_8 = -3.$$

$$\sum M_{12}^{neg} = -9 \cdot a + N_{5-6} \cdot 2a = 0, \Rightarrow N_{5-6} = 9/2 = 4,5.$$

$$\sum y^{np} = 3 + N_{6-12} \cdot \sin \alpha = 0, \Rightarrow N_{6-12} = -3/\sin \alpha = -3,356.$$

Сечение II-II:

$$\sum y^{np} = -N_{6-11} + 3 = 0, \Rightarrow N_{6-11} = R_8 = 3.$$

Вывод. Усилия совпадают с вычисленными методом вырезания узлов.

Результаты расчетов сведем в **таблицу усилий фермы:**

| № ст.  | 4-5 | 5-6 | 6-7 | 7-8 | 9-10 | 10-11 | 11-12 | 12-13 |
|--------|-----|-----|-----|-----|------|-------|-------|-------|
| Усилие | 4,5 | 4,5 | 3   | 0   | -1,5 | -1,5  | -3    | 0     |

| № ст.  | 4-13 | 5-12 | 6-11 | 7-10 | 8-9 | 4-12    | 6-12   | 7-11   | 7-9   |
|--------|------|------|------|------|-----|---------|--------|--------|-------|
| Усилие | 0    | 12   | 3    | 0    | -3  | -10,067 | -3,356 | -3,356 | 3,356 |

## 6. Расчет системы на подвижную нагрузку

Для этого воспользуемся методом линий влияния.

Линии влияния (ЛВ) внутренних усилий можно строить статическим или кинематическим методами.

Основное правило построения ЛВ какого-то усилия составной системы: следует начать с той части системы, в которой возникает это усилие.

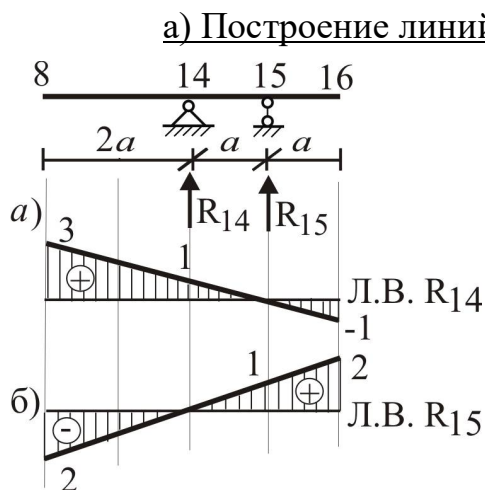


Рис. 8

Вначале построим ЛВ опорных реакций  $R_{14}$  и  $R_{15}$ . Поэтому начнем с главной балки V, в которой возникают эти усилия (рис. 8).

При использовании статического метода, линии влияния (ЛВ) опорных реакций  $R_{14}$  и  $R_{15}$  этой балки можно получить по рис. 44 б, в Приложения 1. Результат показан на рис. 8 а, б. Использование кинематического метода (см. Приложение 4) дает тот же результат.

Затем, используя этажную схему (рис. 5 б), эти ЛВ продолжим влево и вправо от балки V. Для этого через крайние точки ЛВ диска V и нулевые опорные точки соседних дисков надо провести прямые линии до конца соседних дисков и т.д. В результате получаем окончательный вид этих ЛВ (рис. 10 д, е). Аналогично строятся ЛВ и других опорных реакций  $R_1, R_3, R_5, R_{17}$  (рис. 10 б-г, ж).

### б) Построение линий влияния $M_k, Q_k$

Сечение K расположено на консольной части балки V. Поэтому вначале рассмотрим только эту балку.

ЛВ внутренних усилий  $M_k$  и  $Q_k$  можно определить по рис. 9 а. Однако проще использовать готовые линии влияния аналогичной балки для сечения  $K_1$ , расположенного на левой консоли (см. Приложение 2, рис. 45 г, б). Тогда сразу получаем результат – ЛВ  $M_k$  и  $Q_k$  для балки V (рис. 9 б, в).

В конце построений продолжим эти ЛВ влево и вправо с учетом этажной схемы (рис. 10 з, и).

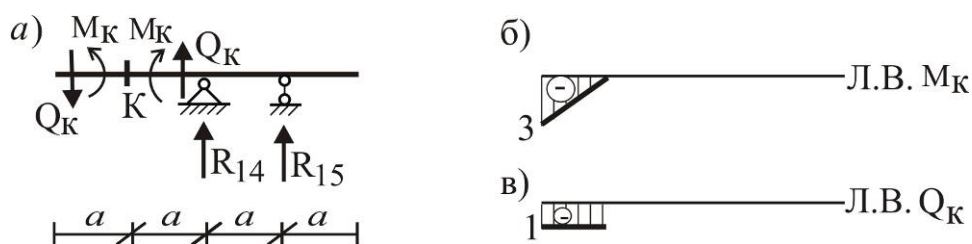


Рис. 9

Если сечение K лежит между опорами, надо пользоваться рис. 44 д, г.

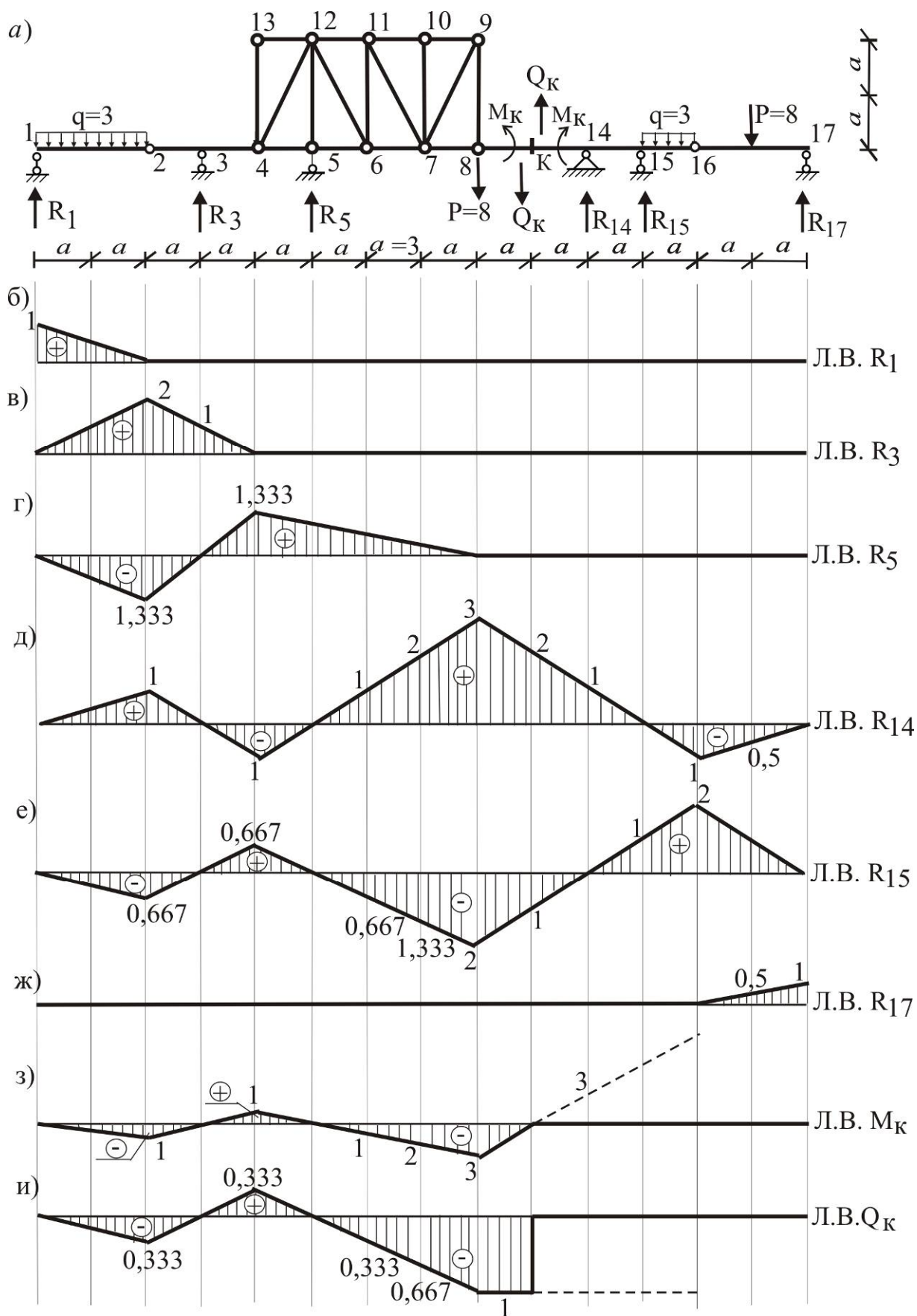


Рис. 10

## 7. Построение линий влияния усилий в стержнях фермы

Вначале рассмотрим ферму отдельно, выделив ее из составной системы (рис. 8 а) и проведем два сечения I – I и II – II.

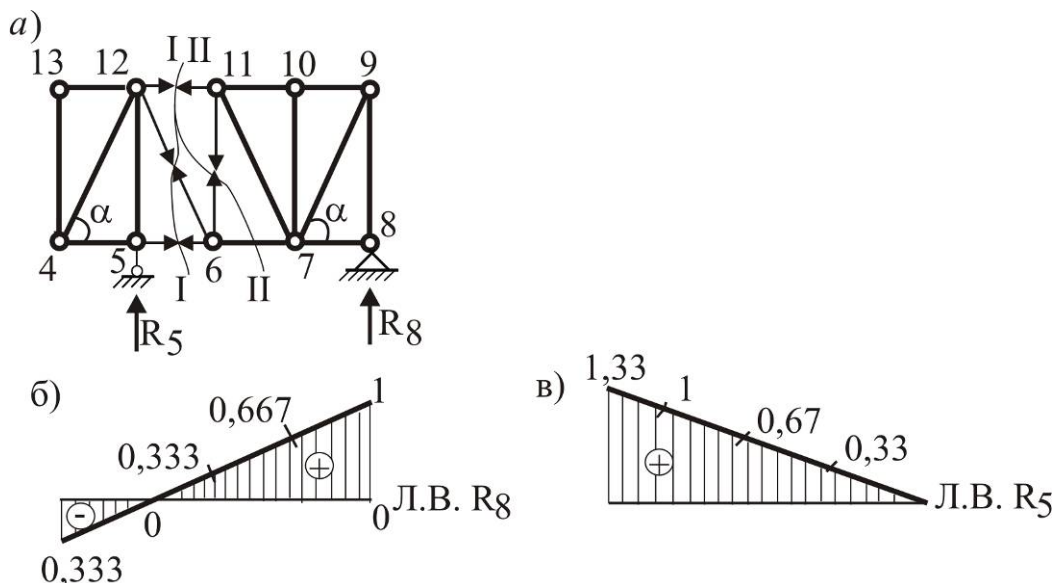


Рис. 11

Для сечения I – I (рис. 11 а)

1) Сила  $P=1$  слева от сечения. Рассмотрим равновесие правой части:

$$\begin{aligned}\sum m_6^{np} &= N_{11-12} \cdot 2a + R_8 \cdot 2a = 0, & \Rightarrow N_{11-12} &= -R_8; \\ \sum m_{12}^{np} &= -N_{5-6} \cdot 2a + R_8 \cdot 3a = 0, & \Rightarrow N_{5-6} &= 1,5R_8; \\ \sum y^{np} &= N_{6-12} \cdot \sin \beta + R_8 = 0, & \Rightarrow N_{6-12} &= -1,119R_8.\end{aligned}$$

2) Сила  $P=1$  справа от сечения. Рассмотрим равновесие левой части:

$$\begin{aligned}\sum m_6^{лев} &= -N_{11-12} \cdot 2a - R_5 \cdot a = 0, & \Rightarrow N_{11-12} &= -0,5R_5; \\ \sum m_{12}^{лев} &= N_{5-6} \cdot 2a = 0, & \Rightarrow N_{5-6} &= 0; \\ \sum y^{лев} &= R_5 - N_{6-12} \cdot \sin \beta = 0, & \Rightarrow N_{6-12} &= 1,119R_5.\end{aligned}$$

Для сечения II – II (рис. 11 а)

1) Сила  $P=1$  слева от сечения. Рассмотрим равновесие правой части:

$$\sum y^{np} = -N_{6-11} + R_8 = 0, \quad \Rightarrow N_{6-11} = R_8.$$

2) Сила  $P=1$  справа от сечения. Рассмотрим равновесие левой части:

$$\sum y^{лев} = R_5 + N_{6-11} = 0, \quad \Rightarrow N_{6-11} = -R_5.$$

Используя линии влияния  $R_8$  и  $R_5$  (рис. 11 б, в), по этим результатам строим линии влияния усилий в двух стержнях верхнего и нижнего поясов  $N_{11-12}$  и  $N_{5-6}$ , в раскосе  $N_{6-12}$  и стойке  $N_{6-11}$  только в пределах фермы, затем распространим их влево и вправо на соседние диски (рис. 12 б-д).

Проверяем построенные линии влияния кинематическим методом.

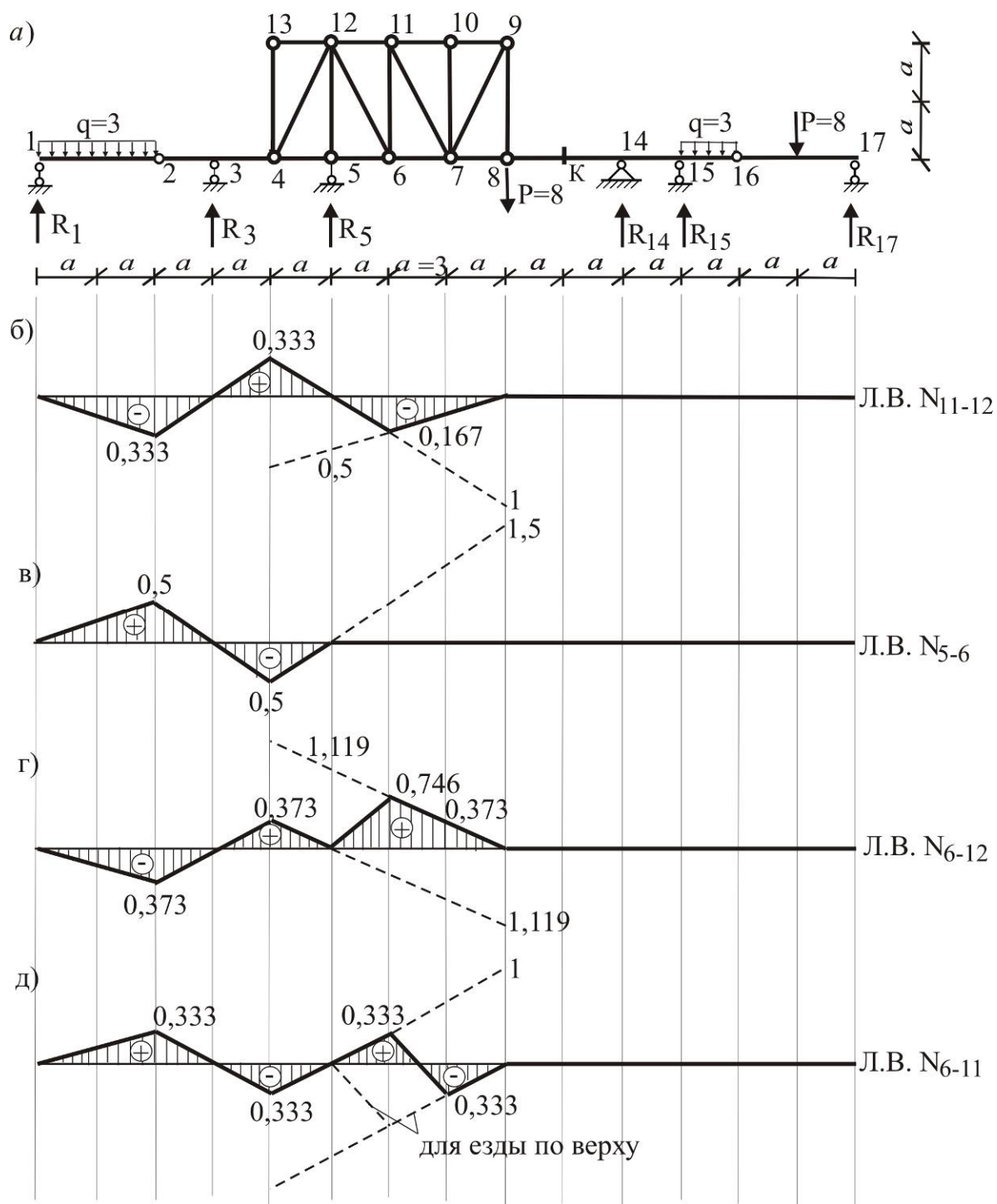


Рис. 12

## 8. Определение усилий по линиям влияния

По линиям влияния (рис. 10, 12) по формуле

$$S = \sum P_i y_i + \sum q_k \omega_k \quad (\text{где } y - \text{ордината, } \omega - \text{площадь ЛВ})$$

определим внутренние усилия от неподвижных нагрузок:

$$R_1 = 3 \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} = 9; \quad R_3 = 3 \cdot \frac{2 \cdot 6}{2} = 18;$$

$$R_5 = 3 \cdot \left( -\frac{1,333 \cdot 6}{2} \right) = -11,997 \approx -12;$$

$$R_{14} = 3 \cdot \left( \frac{1 \cdot 6}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} \right) + 8 \cdot 3 + 8 \cdot (-0,5) = 24,5;$$

$$R_{15} = 3 \cdot \left( -\frac{0,667 \cdot 6}{2} + \frac{1+2}{2} \cdot 3 \right) + 8 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 = -0,5;$$

$$R_{17} = 8 \cdot 0,5 = 4; \quad M_k = 3 \cdot \left( -\frac{1 \cdot 6}{2} \right) + 8 \cdot (-3) = -33;$$

$$Q_k = 3 \cdot \left( -\frac{0,333 \cdot 6}{2} \right) + 8 \cdot (-1) = -10,997 \approx -11;$$

$$N_{11-12} = 3 \cdot \left( -\frac{0,333 \cdot 6}{2} \right) = -2,997 \approx -3; \quad N_{5-6} = 3 \cdot \frac{0,5 \cdot 6}{2} = 4,5;$$

$$N_{6-12} = 3 \cdot \left( -\frac{0,373 \cdot 6}{2} \right) = -3,357; \quad N_{6-11} = 3 \cdot \left( \frac{0,333 \cdot 6}{2} \right) = 2,997 \approx 3.$$

**Вывод.** Полученные значения совпадают с результатами расчета на неподвижную нагрузку.

#### 4. Определение невыгоднейшего положения нагрузки

Найдем невыгоднейшее положение заданной подвижной нагрузки (два связанных груза 2 кН и 1 кН на расстоянии 2 м), перемещающейся понизу от точки 1 до точки 17. На рис. 13 показаны невыгоднейшие положения нагрузок для четырех усилий.

Максимальное (или минимальное) значение любого внутреннего усилия определяется суммой усилия от постоянной нагрузки и всех положительных (или отрицательных) значений этого усилия от подвижной нагрузки. На основании этого имеем:

Мах усилия (максимальные положительные значения):

$$R_{14} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot \frac{3}{9} \cdot 7 = 8,33; \quad M_k = 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 2,33;$$

$$N_{6-12} = 2 \cdot 0,746 + 1 \cdot \frac{0,746}{6} \cdot 4 = 1,989; \quad Q_k = 2 \cdot 0,333 + 1 \cdot \frac{0,333}{3} \cdot 1 = 0,777.$$

Min усилия (максимальные по модулю отрицательные значения):

$$R_{14} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot \left( -\frac{1}{6} \cdot 4 \right) = -2,67; \quad M_k = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot \left( -\frac{3}{3} \cdot 1 \right) = -7;$$

$$N_{6-12} = 2 \cdot (-0,373) + 1 \cdot \left( -\frac{0,373}{3} \cdot 2 \right) = -0,799; \quad Q_k = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -3.$$



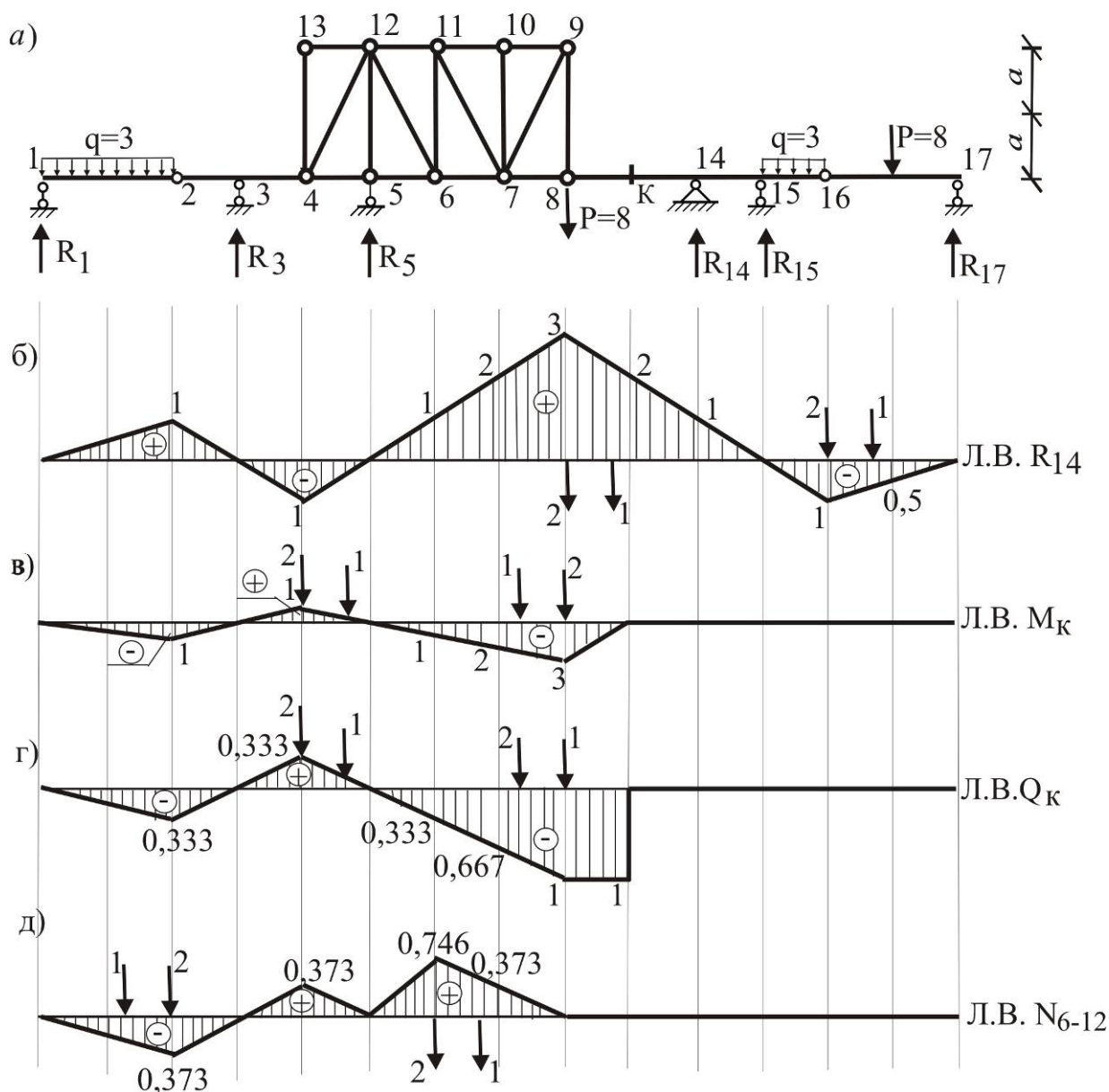


Рис. 13

## **Задача 2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ**

Метод сил (МС) является одним из основных методов расчета простых статически неопределимых систем. Идея этого метода основана на замене заданной статически неопределимой системы (расчетной схемы) статически определимой основной системой путем удаления лишних связей. Тогда неизвестные усилия – силы в удаленных связях – можно определить из условий эквивалентности заданной и основной систем.

**Порядок расчета** статически неопределимых *рам методом сил* состоит из следующих этапов:

1. Определение числа неизвестных.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение эпюр моментов в единичных и грузовом состояниях.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений.
7. Определение неизвестных.
8. Построение эпюр.
9. Проверка правильности расчета.

### **Пример решения задачи**

**Задача.** Провести расчет рамы, изображенной на рис. 2.7, при следующих данных:  $a = 3$  м,  $q_1 = 2$  кН/м,  $q_2 = 4$  кН/м,  $P = 3$  кН,  $EI = \text{const}$ .

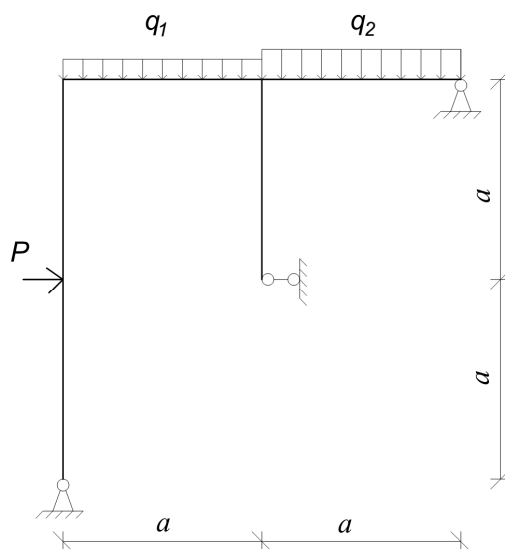


Рис. 14

### **Решение.**

#### **1. Определение числа неизвестных**

$$n = -W = 2n_{\text{ш}} + n_{\text{с}} + n_{\text{с}_0} - 3n_{\text{д}} = 2 \cdot 0 + 0 + 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

– рама дважды статически неопределима.

#### **2. Выбор основной системы**

В данной расчетной схеме рамы оказались две «лишние» связи. Рассмотрим несколько вариантов их удаления (рис. 15), из которых выберем вариант в) как наиболее простой для дальнейшего расчета.

#### **3. Запись канонических уравнений**

Для расчета рамы необходима система канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned}$$

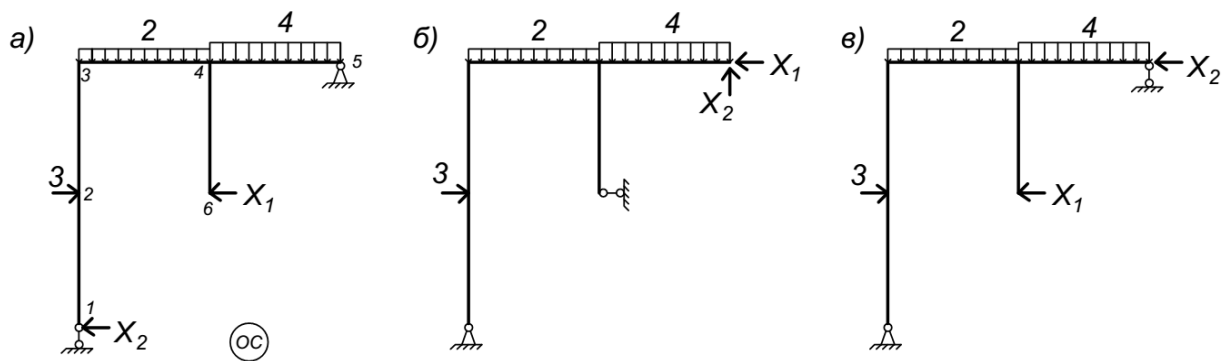


Рис. 15

#### 4. Рассмотрение единичных и грузового состояний

Рассмотрим два единичных и одно грузовое состояния основной системы и определим их опорные реакции (рис. 16 а-в):

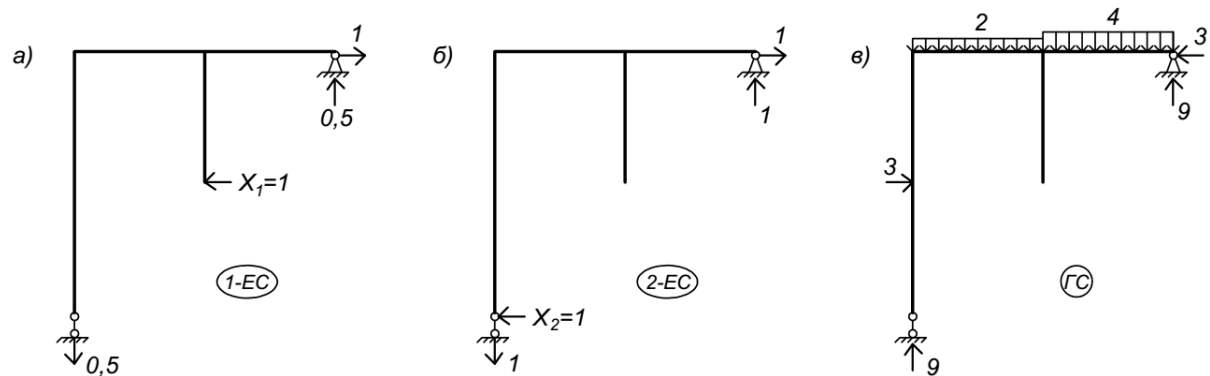


Рис. 16

#### 5. Построение эпюр моментов в состояниях

В рассмотренных выше трех состояниях построим эпюры изгибающих моментов (рис. 17):

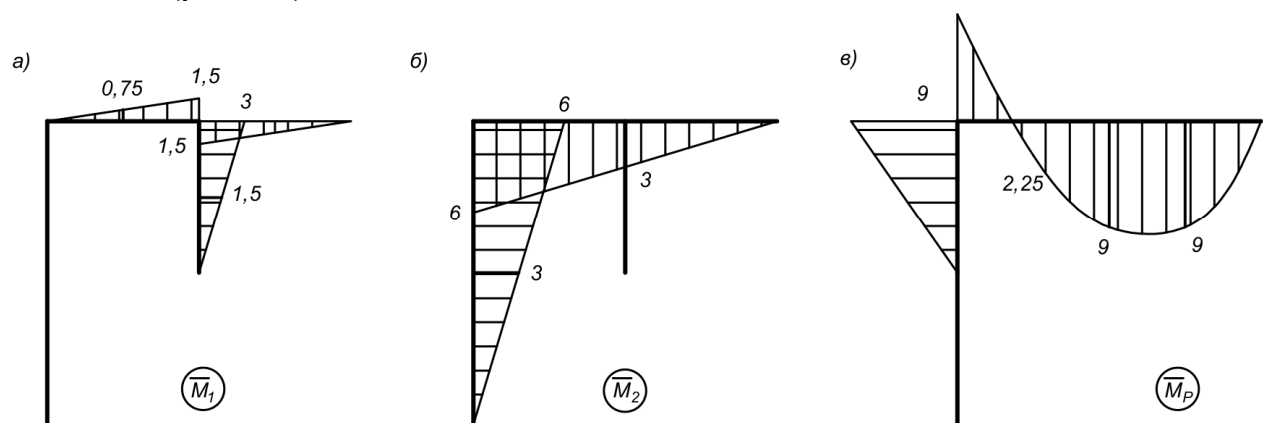


Рис. 17

Для последующих расчетов понадобится суммарная единичная эпюра (рис. 18), получаемая суммой двух единичных эпюр по формуле

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$$

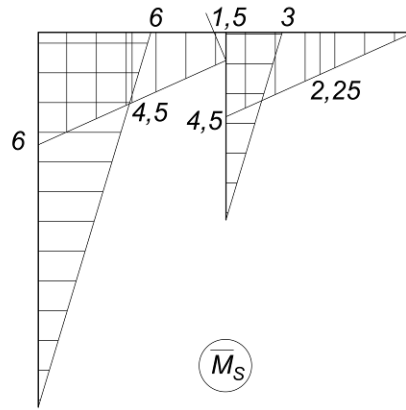


Рис. 18

## 6. Определение коэффициентов системы канонических уравнений

Они вычисляются по формулам:

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_j}{EI} dx, \quad \Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_P}{EI} dx.$$

При этом интегрирование произведений эпюр в отдельных участках проводим по формуле Симпсона (см. Приложение 7):

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (4 \cdot 0,75^2 + 1,5^2) \cdot 2 + \frac{3}{6} (3^2 + 4 \cdot 1,5^2) \right] = \frac{13,5}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (-4 \cdot 0,75 \cdot 4,5 - 1,5 \cdot 3) + \right. \\ \left. + \frac{3}{6} (1,5 \cdot 3 + 4 \cdot 0,75 \cdot 1,5) \right] = -\frac{4,5}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{6}{6} (4 \cdot 3^2 + 6^2) + \frac{6}{6} (6^2 + 4 \cdot 3^2) \right] = \frac{144}{EI};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (-4 \cdot 0,75 \cdot 2,25 - 1,5 \cdot 9) + \right. \\ \left. + \frac{3}{6} (1,5 \cdot 9 + 4 \cdot 0,75 \cdot 9) \right] = \frac{10,125}{EI};$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (-4 \cdot 4,5^2 - 6 \cdot 9) + \right. \\ \left. + \frac{3}{6} (-6 \cdot 9 + 4 \cdot 4,5 \cdot 2,25 + 3 \cdot 9) + \frac{3}{6} (3 \cdot 9 + 4 \cdot 1,5 \cdot 9) \right] = -\frac{20,25}{EI}.$$

Проверим правильность подсчета коэффициентов:

а) универсальная проверка

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot \bar{M}_s}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{6}{6} (4 \cdot 3^2 + 6^2) + \frac{3}{6} (6^2 + 4 \cdot 4,5^2 + 1,5^2) + \right.$$

$$+\frac{3}{6}(4,5^2 + 4 \cdot 2,25^2) + \frac{3}{6}(3^2 + 4 \cdot 1,5^2) \Big] = \frac{148}{EI};$$

$$\sum \delta_{ij} = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{13,5}{EI} + 2 \cdot \left(-\frac{4,5}{EI}\right) + \frac{144}{EI} = \frac{148}{EI}.$$

Два результата равны, значит коэффициенты  $\delta_{ij}$  вычислены верно.

б) постолбцовая проверка

$$\Delta_{sP} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6}(-4 \cdot 4,5^2 - 6 \cdot 9) + \right. \\ \left. + \frac{3}{6}(-6 \cdot 9 + 4 \cdot 4,5 \cdot 2,25 + 1,5 \cdot 9) + \frac{3}{6}(4,5 \cdot 9 + 4 \cdot 2,25 \cdot 9) \right] = -\frac{10,125}{EI};$$

$$\sum \Delta_{iP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{10,125}{EI} - \frac{20,25}{EI} = -\frac{10,125}{EI}.$$

Два результата равны, значит коэффициенты  $\Delta_{iP}$  вычислены верно.

## 7. Определение неизвестных

Подставим вычисленные коэффициенты в систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 13,5X_1 - 4,5X_2 + 10,125 = 0, \\ -4,5X_1 + 144X_2 - 20,25 = 0 \end{cases}$$

и решим ее. Получаем

$$X_1 = -0,701 \text{ (кН)}, \quad X_2 = 0,118 \text{ (кН)}.$$

## 8. Построение эпюр $M$ , $Q$ , $N$

Эпюру строим по формуле

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_P.$$

Для этого вначале строим исправленные эпюры  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 19 а, б), умножив единичные эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  на найденные числа  $X_1$  и  $X_2$ , затем сложим три эпюры  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_P$ . Тогда получаем окончательную эпюру изгибающих моментов  $M$  (рис. 19 в).

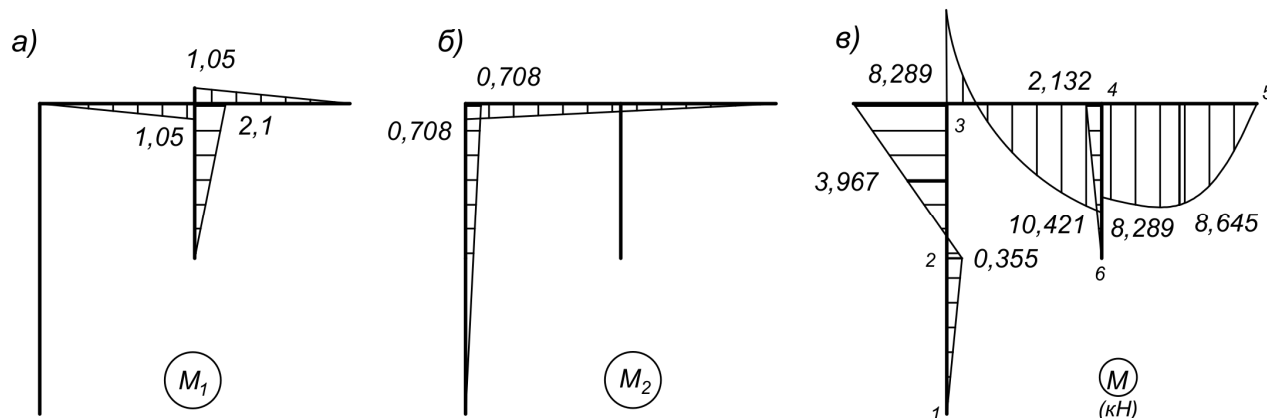


Рис. 19

Проверим правильность полученной эпюры  $M$  двумя способами:

а) Статическая проверка. Для этого вырежем характерные узлы рамы:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 8,289 \\ \curvearrowleft \\ 8,289 \end{array} & \sum M_3 = 8,289 - 8,289 = 0 & \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 40,421 \\ \curvearrowright \\ 2,132 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \sum M_4 = 8,289 + 2,132 - 10,421 = 0 \end{array}$$

б) Кинематическая проверка:

$$\sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_s}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (4 \cdot 0,177 \cdot 1,5 + 0,355 \cdot 3) + \frac{3}{6} (0,355 \cdot 3 - 4 \cdot 3,967 \cdot 4,5 - 8,289 \cdot 6) + \frac{3}{6} (-8,289 \cdot 6 + 4 \cdot 3,316 \cdot 4,5 + 10,421 \cdot 1,5) + \frac{3}{6} (8,289 \cdot 4,5 + 4 \cdot 8,645 \cdot 2,25) + \frac{3}{6} (-2,132 \cdot 3 - 4 \cdot 1,066 \cdot 1,5) \right] = \frac{79,226 - 79,224}{EI} = \frac{0,002}{EI}.$$

Относительная погрешность расчета:

$$\varepsilon = \frac{0,002}{79,226} \cdot 100 = 0,003\%.$$

По эпюре  $M$ , способом, поясненным во Введении (см. стр. 5), получим значения поперечных сил в отдельных участках или точках:

$$Q_{1-2} = \frac{0,355 - 0}{3} = 0,119 \text{ кН}; \quad Q_{2-3} = -\frac{8,289 + 0,355}{3} = -2,881 \text{ кН};$$

$$Q_{3-4}^{\text{лев}} = \frac{10,421 + 8,289}{3} + \frac{2 \cdot 3}{2} = 9,237 \text{ кН};$$

$$Q_{3-4}^{\text{пр}} = \frac{10,421 + 8,289}{3} - \frac{2 \cdot 3}{2} = 3,237 \text{ кН};$$

$$Q_{4-5}^{\text{лев}} = \frac{0 - 8,289}{3} + \frac{4 \cdot 3}{2} = 3,237 \text{ кН};$$

$$Q_{4-5}^{\text{пр}} = \frac{0 - 8,289}{3} - \frac{4 \cdot 3}{2} = -8,763 \text{ кН}; \quad Q_{4-6} = -\frac{2,132}{3} = -0,711 \text{ кН}.$$

По этим результатам строим эпюру поперечных сил  $Q$  (рис. 20 а).

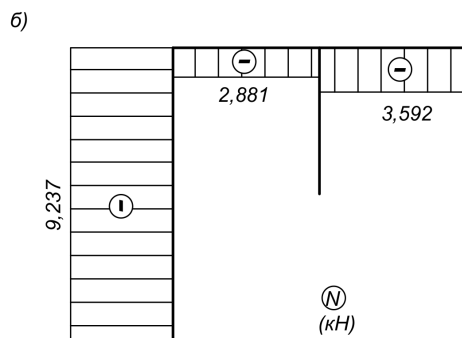
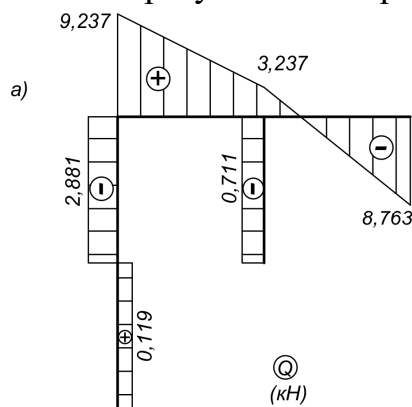


Рис. 20

Затем, вырезая узлы рамы, по эпюре  $Q$  определим продольные силы:

$$\begin{aligned} \sum x &= N_{3-4} + 2,881 = 0, & \Rightarrow N_{3-4} &= -2,881 \text{ кН}; \\ \sum y &= -N_{1-2} - 9,237 = 0, & \Rightarrow N_{1-2} &= -9,237 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum x &= N_{4-5} + 2,881 + 0,711 = 0, & \Rightarrow N_{4-5} &= -3,592 \text{ кН}; \\ \sum y &= -N_{4-6} = 0, & \Rightarrow N_{4-6} &= 0 \text{ кН}. \end{aligned}$$

По этим результатам строим эпюру продольных сил  $N$  (рис. 20 б).

### 9. Проверка правильности расчета

Для этого раму отсечем от опор и рассмотрим ее равновесие (рис. 21):

$$\begin{aligned} \sum x &= -0,119 + 3 + 0,711 - 3,592 = 0; \\ \sum y &= 9,237 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 8,763 = 0; \\ \sum M_4 &= -0,119 \cdot 6 - 9,237 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + \\ &+ 2 \cdot \frac{3^2}{2} - 4 \cdot \frac{3^2}{2} + 8,763 \cdot 3 + 0,711 \cdot 3 = \\ &= 46,422 - 46,425 = -0,003. \end{aligned}$$

Рис. 21

Относительная погрешность расчета:

$$\frac{|46,422 - 46,425|}{46,422} \cdot 100 = 0,006\% < 1\%.$$

Итак, задача решена правильно.

## РГР-2:

### «РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ»

#### Цель работы:

1. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений.
2. Расчет рамы дискретным методом.
3. Получение навыков определения напряженно-деформированного состояния сооружений на компьютере.

**Объем работы:** решение двух задач.

#### Задача 1. РАСЧЕТ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Метод перемещений (МП) является вторым основным методом расчета статически неопределимых систем. В отличие от метода сил, он основан на изучении стержневой системы как набора стандартных элементов, соединенных в узлах рамы. Основная система МП получается введением дополнительных связей в узлы расчетной схемы, а за неизвестные принимается угловые или линейные перемещения этих узлов.

**Порядок расчета рам МП** состоит из следующих этапов:

1. Определение числа неизвестных.
2. Выбор основной системы (ОС).
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний ОС.
5. Построение эпюр моментов в этих состояниях.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений.
7. Определение неизвестных.
8. Построение эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .
9. Проверка правильности расчета.

Данный порядок расчета рам МП определяется также как в методе сил. Но внутреннее содержание этапов расчета отличается от метода сил.

#### Пример решения задачи

**Задача.** Выполнить расчет рамы, представленной на рис. 22, методом перемещений. Дано:  $a = 4$  м,  $q = 3$  кН/м,  $P = 4$  кН,  $EI = const$ .

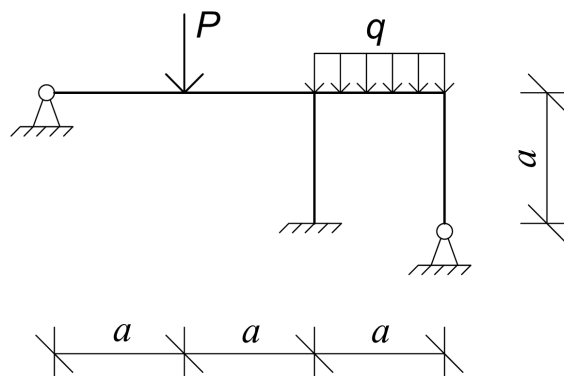


Рис. 22



## Решение.

### 1. Определение числа неизвестных

Число неизвестных метода перемещений равно сумме линейных и угловых перемещений и определяется по формуле  $n = n_y + n_\lambda$ .

Так как в раме два упругих узла,  $n_y = 2$ . Для определения  $n_\lambda$  во все узлы рамы введем шарниры (рис. 23 а). Тогда

$$n_\lambda = W = 2n_y - n_C - n_{C_0} = 2 \cdot 5 - 4 - 6 = 0.$$

Значит,  $n = n_y + n_\lambda = 2 + 0 = 2$  – рама дважды кинематически неопределима.

### 2. Выбор основной системы

Основную систему (ОС) получаем введением двух заделок в упругие узлы (рис. 23 б), где  $Z_1$  и  $Z_2$  – угловые перемещения узлов.

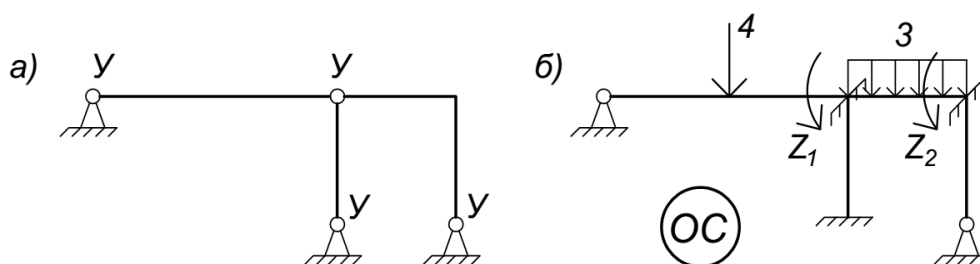


Рис. 23

### 3. Запись канонических уравнений

Для расчета рамы запишем систему двух уравнений

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0.$$

### 4. Рассмотрение единичных и грузового состояний

Задавая узлам основной системы метода перемещений единичные перемещения и прикладывая внешнюю нагрузку, рассмотрим два единичных (рис. 24 а, б) и грузовое (рис. 24 в) состояния:

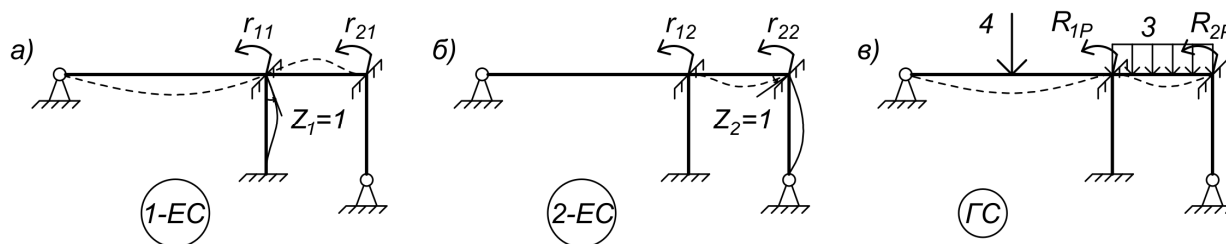


Рис. 24

В этих состояниях пунктирными линиями определяем примерную картину изгибных деформаций отдельных стержней и устанавливаем физический смысл коэффициентов канонических уравнений (где коэффициент  $r_{ij}$  – реактивное усилие в  $i$ -ом направлении  $j$ -ого единичного состояния,  $R_{iP}$  – реактивное усилие в  $i$ -ом направлении грузового состояния).

## 5. Построение эпюр моментов в состояниях

Используя таблицу метода перемещений (см. Приложение 5), во всех трех состояниях (рис. 24 а-в) строим эпюры изгибающих моментов. Единичные эпюры представлены на рис. 25 а, б, грузовая эпюра – на рис. 25 в.

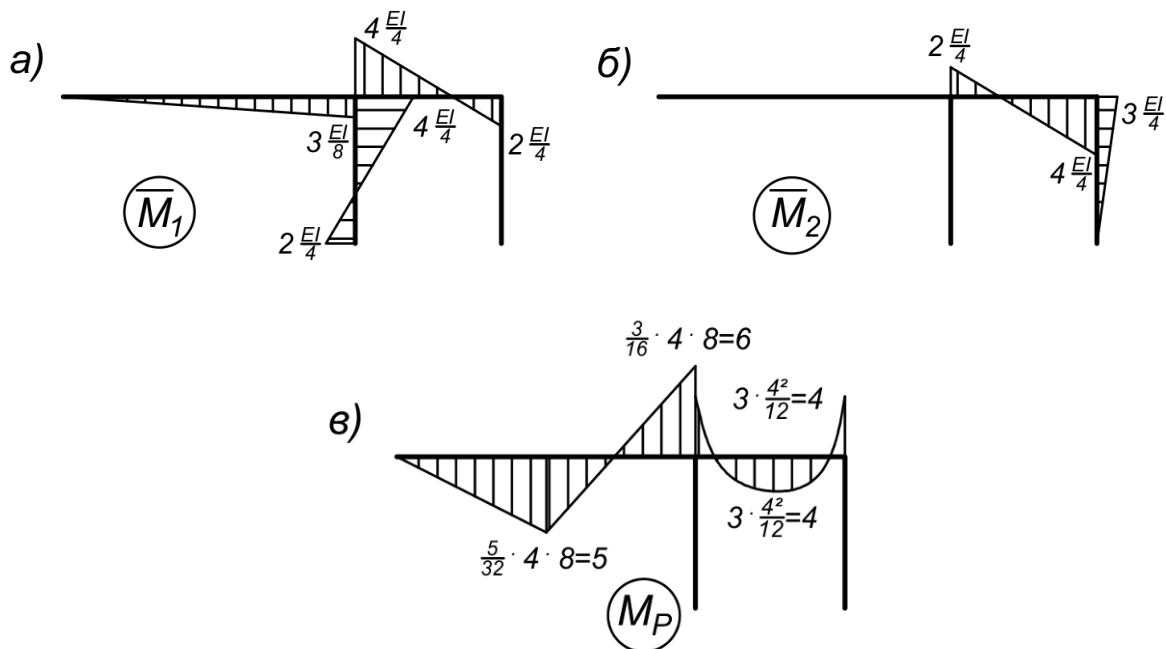


Рис. 25

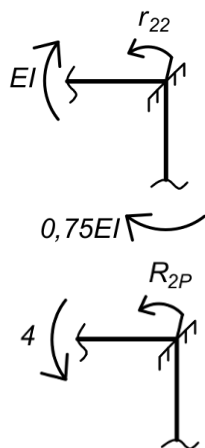
## 6. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты системы канонических уравнений определяем статическим методом, составляя уравнения равновесия вырезанных узлов рамы:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} r_{11} \\ EI \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} 0,375EI \\ EI \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \sum M = r_{11} - EI - EI - 0,375EI = 0, \Rightarrow r_{11} = 2,375EI;$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} r_{12} \\ 0,5EI \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} 0,5EI \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \sum M = r_{12} - 0,5EI = 0, \quad \Rightarrow r_{12} = r_{21} = 0,5EI;$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} R_{1P} \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} 4 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \sum M = R_{1P} + 6 - 4 = 0, \quad \Rightarrow R_{1P} = -2;$$



$$\sum M = r_{22} - EI - 0,75EI = 0, \quad \Rightarrow r_{22} = 1,75EI;$$

$$\sum M = R_{2P} + 4 = 0, \quad \Rightarrow R_{2P} = -4.$$

## 7. Определение неизвестных

Найденные коэффициенты подставляем в систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 2,375EI Z_1 + 0,5EI Z_2 - 2 = 0, \\ 0,5EI Z_1 + 1,75EI Z_2 - 4 = 0. \end{cases}$$

После ее решения получаем

$$Z_1 = \frac{0,384}{EI}, \quad Z_2 = \frac{2,176}{EI}.$$

## 8. Построение эпюр усилий $M$ , $Q$ , $N$

Для построения эпюры изгибающих моментов используем формулу

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_P = M_1 + M_2 + M_P.$$

Для этого умножим единичные эпюры на числа  $Z_1$  и  $Z_2$  и получим исправленные эпюры (рис. 26 а, б). Сложив их с грузовой эпюрой  $M_P$ , получаем окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 26 в).

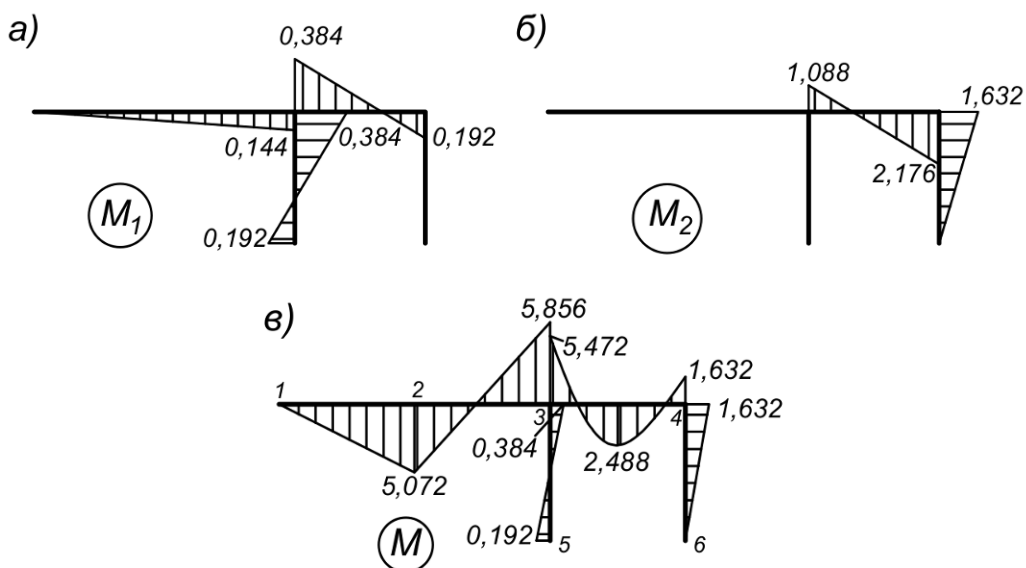
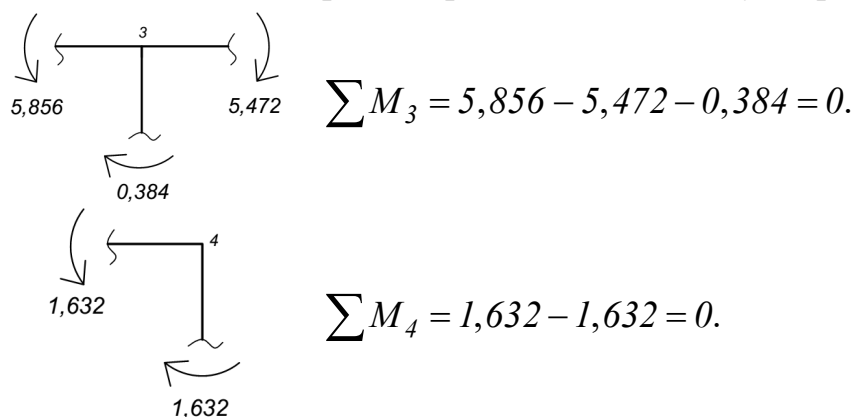


Рис. 26

Вырезая узлы рамы, проведем статическую проверку эпюры  $M$ :



По формулам, приведенным во Введении (стр. 5), по эпюре  $M$  определим поперечные силы в элементах:

$$Q_{1-2} = \frac{5,072}{4} = 1,268 \text{ кН}; \quad Q_{2-3} = -\frac{5,856 + 5,072}{4} = -2,732 \text{ кН};$$

$$Q_{3-5} = \frac{0,384 + 0,192}{4} = 0,144 \text{ кН}; \quad Q_{4-6} = \frac{1,632 - 0}{4} = 0,408 \text{ кН};$$

$$Q_{3-4} = \frac{5,472 - 1,632}{4} \pm \frac{3 \cdot 4}{2} = 0,96 \pm 6, \Rightarrow Q_3 = 6,96 \text{ кН}, \quad Q_4 = -5,04 \text{ кН}.$$

По этим значениям строим эпюру поперечных сил  $Q$  (рис. 27 а).

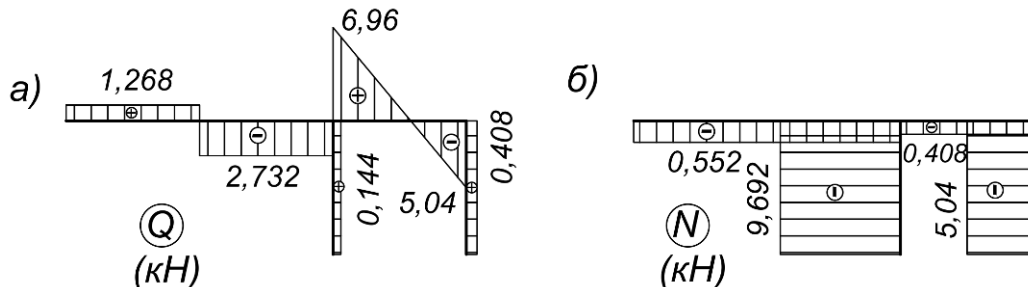


Рис. 27

Способом вырезания узлов по эпюре  $Q$  определим продольные силы:

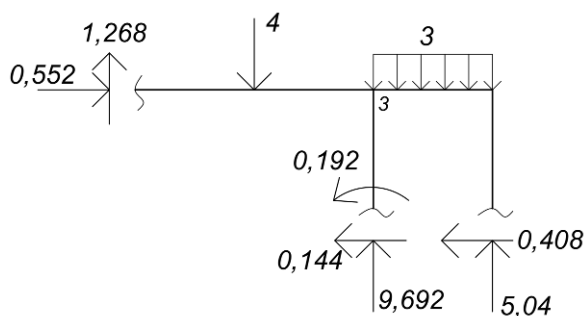
$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{3-4} - 0,408 = 0, & \Rightarrow N_{3-4} &= -0,408 \text{ кН}; \\ \sum Y &= N_{4-6} - 5,04 = 0, & \Rightarrow N_{4-6} &= -5,04 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{1-2} - 0,408 - 0,144 = 0, & \Rightarrow N_{1-2} &= -0,552 \text{ кН}; \\ \sum Y &= -N_{3-5} - 2,732 - 6,96 = 0, & \Rightarrow N_{3-5} &= -9,692 \text{ кН}. \end{aligned}$$

По этим результатам строим эпюру продольных сил  $N$  (рис. 27 б).

## 9. Проверка правильности эпюр

Для этого рассмотрим равновесие рамы, отсеченной от опор:



$$\sum x = 0,552 - 0,144 - 0,408 = 0;$$

$$\sum y = 1,268 - 4 + 9,692 + 5,04 - 3 \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_3 = -1,268 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - 3 \frac{4^2}{2} + 0,192 - 0,144 \cdot 4 - 0,408 \cdot 4 + 5,04 \cdot 4 = 0.$$

Погрешность вычислений равна нулю. Расчет выполнен правильно.

## Задача 2. РАСЧЕТ РАМЫ ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ

Дискретный метод основан на рассмотрении сооружения как системы из большого числа различных элементов стандартного вида – конечных элементов (КЭ). В результате этого становится возможным определение напряженно-деформированного состояния (НДС) произвольного сооружения на компьютере с использованием универсальных компьютерных программ.

Алгоритм расчета рам дискретным методом в упрощенной постановке состоит из следующих этапов:

1. Выбор расчетной модели.
2. Формирование векторов НДС.
3. Составление уравнения равновесия.
4. Расчет на компьютере.
5. Обработка полученных результатов.

### Пример решения задачи

**Задача.** Определить НДС рамы, представленной на рис. 28. Дано: поперечные сечения всех стержней рамы имеют вид прямоугольника  $b \times h = 10 \times 20$  см, модуль упругости  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг} / \text{см}^2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н} / \text{м}^2$ .

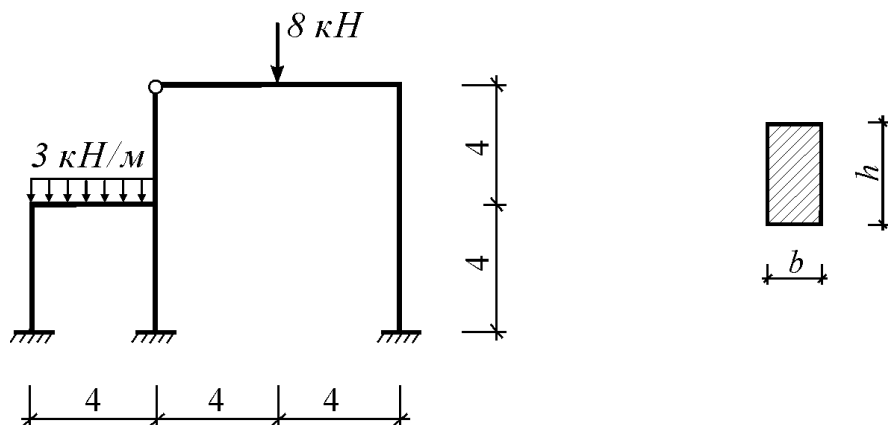


Рис. 28

## Решение.

### 1. Выбор расчетной модели

Введем в расчетную схему рамы семь узлов и получим систему из шести элементов (рис. 30). При этом шесть узлов являются жесткими, а один узел – шарнирным. Четыре элемента ( $e^1$ ,  $e^2$ ,  $e^3$  и  $e^6$ ) являются балочными, а два элемента ( $e^4$  и  $e^5$ ) – комбинированными (см. Приложение 6).

Сосредоточенную силу  $P=8 \text{ кН}$  и распределенную нагрузку  $q=3 \text{ кН}$ , действующих в элементах  $e^2$  и  $e^5$ , перенесем в соседние узлы. Для этого воспользуемся схемами 8 и 6 из таблицы метода перемещений (см. Приложение 5). Реакции по концам элементов от нагрузок даны на рис. 29.

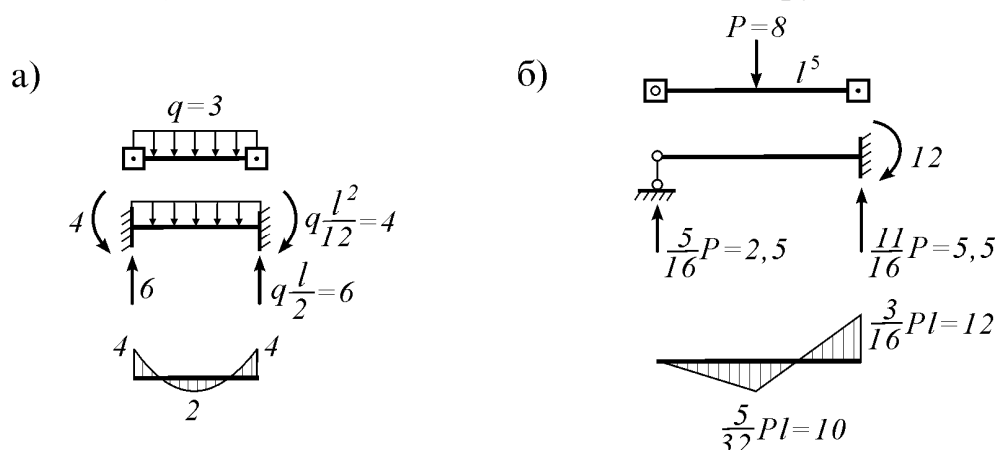


Рис. 29

Затем реакции, полученные в этих балочных решениях, приложим в обратных направлениях к соответствующим узлам дискретной модели (поскольку нагрузки оказывают давление на узлы рамы с усилиями, равными этим реакциям, но направленными в обратную сторону). В итоге получаем дискретную модель рамы (рис. 30).

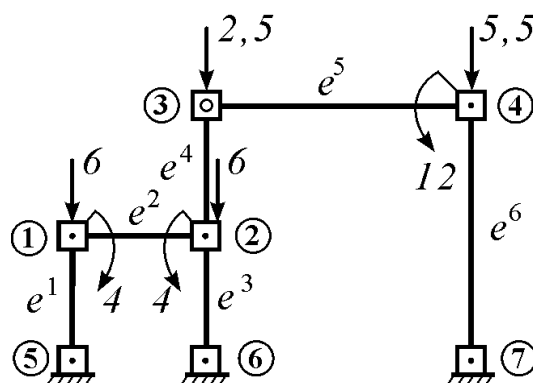


Рис. 30

### 2. Формирование векторов НДС

Напряженно-деформированное состояние (НДС) рамы определяют вектор перемещений  $\mathbf{u}$ , вектор внутренних усилий  $\mathbf{S}$  и вектор деформаций элементов  $\Delta$ . Из них нам понадобятся вектора  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{S}$ .

При формировании вектора перемещений учтем следующие обстоятельства. Узлы 5, 6, 7 рамы закреплены и не имеют перемещений. Узлы 1, 2, 4 являются жесткими, поэтому имеют по три (два поступательных и одно угловое) перемещения (рис. 31 а). Узел 3 является шарнирным, и имеет два линейных перемещения (рис. 31 б).

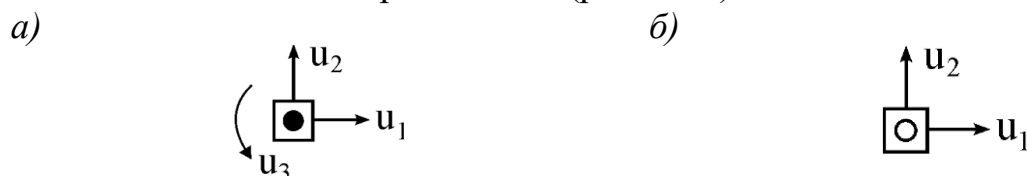


Рис. 31

Значит, вектор узловых перемещений дискретной модели можно описать вектором из  $n=11$  компонент:

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \\ (1 \times 1) & (3 \times 1) & (2 \times 1) & (3 \times 1) \end{matrix} \right\} = \left\{ \underbrace{u_{11} \ u_{21} \ u_{31}}_1 \ \underbrace{u_{12} \ u_{22} \ u_{32}}_2 \ \underbrace{u_{13} \ u_{23}}_3 \ \underbrace{u_{14} \ u_{24} \ u_{34}}_4 \right\}.$$

В этом векторе у любой компоненты  $u_{ij}$  первый индекс  $i$  определяет направление перемещения (1, 2 или 3), а второй индекс  $j$  – номер узла.

При формировании вектора внутренних усилий учтем, что элементы  $e^1$ ,  $e^2$ ,  $e^3$  и  $e^6$  являются балочными, а элементы  $e^4$  и  $e^5$  – комбинированными (см. Приложение 6). Поэтому в первых учитываются по три, а во вторых – по два внутренних усилия. Тогда вектор  $\mathbf{S}$  будет состоять из  $m=16$  компонент:

$$\mathbf{S} = \left\{ \underbrace{N^1 \ M_n^1 \ M_k^1}_{e^1} \ \underbrace{N^2 \ M_n^2 \ M_k^2}_{e^2} \ \underbrace{N^3 \ M_n^3 \ M_k^3}_{e^3} \ \underbrace{N^4 \ M^4}_{e^4} \ \underbrace{N^5 \ M^5}_{e^5} \ \underbrace{N^6 \ M_n^6 \ M_k^6}_{e^6} \right\}.$$

Степень статической неопределимости рамы будет  $s = m - n = 16 - 11 = 5$ .

В сформированном векторе  $\mathbf{S}$  продольные силы принимаются положительными (растягивающими). Закон изменения моментов в элементах дискретной модели (в соответствии с Приложением 8) принимаем таким, чтобы знаки поперечных сил в них получались положительными. В итоге получим базисную эпюру моментов (рис. 32).

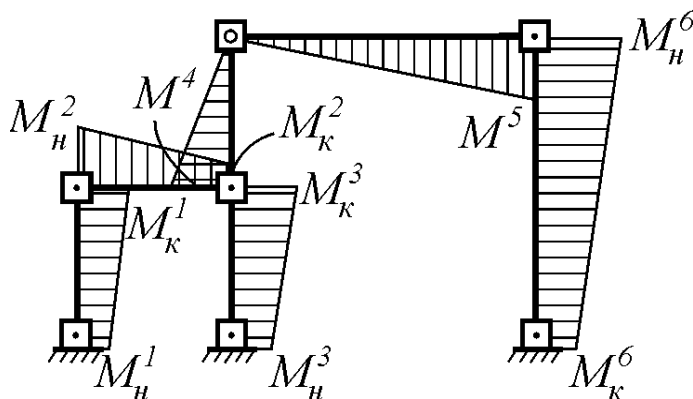
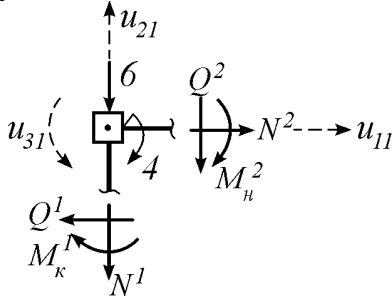


Рис. 32

### 3. Составление уравнения равновесия

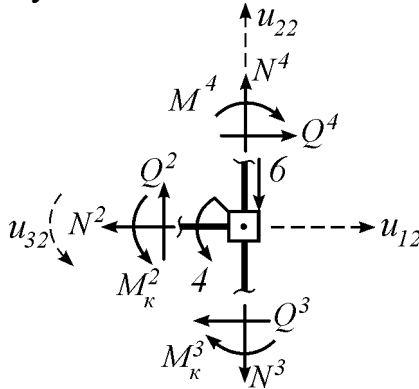
Вырежем узлы 1, 2, 3, 4 дискретной модели (т.е. узлы, имеющие степени свободы) и составим для них следующие уравнения равновесия:

1 узел:



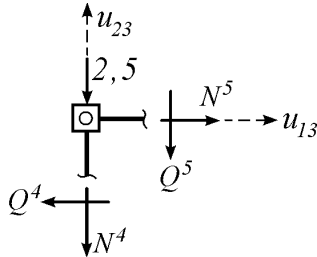
$$\begin{aligned} (1) \quad \sum u_{11} &= N^2 - Q^1 = 0, \\ (2) \quad \sum u_{21} &= -N^1 - Q^2 - 6 = 0, \\ (3) \quad \sum u_{31} &= -M_\kappa^1 - M_\text{н}^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

2 узел:



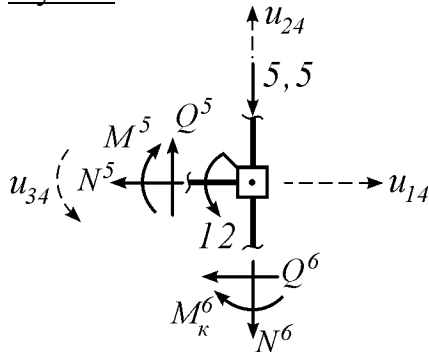
$$\begin{aligned} (4) \quad \sum u_{12} &= -N^2 - Q^3 + Q^4 = 0, \\ (5) \quad \sum u_{22} &= Q^2 - N^3 + N^4 - 6 = 0, \\ (6) \quad \sum u_{32} &= M_\kappa^2 - M_\kappa^3 - M_\kappa^4 + 4 = 0. \end{aligned}$$

3 узел:



$$\begin{aligned} (7) \quad \sum u_{13} &= N^5 - Q^4 = 0, \\ (8) \quad \sum u_{23} &= -N^4 - Q^5 - 2,5 = 0. \end{aligned}$$

4 узел:



$$\begin{aligned} (9) \quad \sum u_{14} &= -N^5 - Q^6 = 0, \\ (10) \quad \sum u_{24} &= Q^5 - N^6 - 5,5 = 0, \\ (11) \quad \sum u_{34} &= -M^5 - M_\kappa^6 + 12 = 0. \end{aligned}$$

По базисной эпюре моментов (рис. 32) выразим поперечные силы элементов через узловые моменты:

$$Q^1 = \frac{M_\kappa^1 - M_\text{н}^1}{4}, \quad Q^2 = \frac{M_\text{н}^2 - M_\kappa^2}{4}, \quad Q^3 = \frac{M_\kappa^3 - M_\text{н}^3}{4},$$



$$Q^4 = \frac{M^4}{4}, \quad Q^5 = \frac{M^5}{8}, \quad Q^6 = \frac{M_H^6 - M_K^6}{8}.$$

Подставим эти величины в предыдущие 11 уравнений равновесия и получим систему уравнений:

- (1)  $N^2 - 0,25 M_K^1 + 0,25 M_H^1 = 0,$
- (2)  $-N^1 - 0,25 M_H^2 + 0,25 M_K^2 - 6 = 0,$
- (3)  $-M_K^1 - M_H^2 - 4 = 0,$
- (4)  $-N^2 - 0,25 M_K^3 + 0,25 M_H^3 + 0,25 M^4 = 0,$
- (5)  $0,25 M_H^2 - 0,25 M_K^2 - N^3 + N^4 - 6 = 0,$
- (6)  $M_K^2 - M_K^3 - M^4 + 4 = 0,$
- (7)  $N^5 - 0,25 M^4 = 0,$
- (8)  $-N^4 - 0,125 M^5 - 2,5 = 0,$
- (9)  $-N^5 - 0,125 M_H^6 + 0,125 M_K^6 = 0,$
- (10)  $0,125 M^5 - N^6 - 5,5 = 0,$
- (11)  $-M^5 - M_K^6 + 12 = 0.$

В соответствии с матричным уравнением равновесия  $\mathbf{AS} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$  и, в соответствии со структурой вектора  $\mathbf{S}$ , соберем коэффициенты этих 11 уравнений в строки матрицы равновесия  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} =$$

$$(11 \times 16)$$

|    | $N^1$ | $M_H^1$ | $M_K^1$ | $N^2$ | $M_H^2$ | $M_K^2$ | $N^3$ | $M_H^3$ | $M_K^3$ | $N^4$ | $M^4$ | $N^5$ | $M^5$  | $N^6$ | $M_H^6$ | $M_K^6$ |
|----|-------|---------|---------|-------|---------|---------|-------|---------|---------|-------|-------|-------|--------|-------|---------|---------|
| 1  |       | 0,25    | -0,25   | 1     |         |         |       |         |         |       |       |       |        |       |         |         |
| 2  | -1    |         |         |       | -0,25   | 0,25    |       |         |         |       |       |       |        |       |         |         |
| 3  |       |         | -1      |       | -1      |         |       |         |         |       |       |       |        |       |         |         |
| 4  |       |         |         | -1    |         |         |       | 0,25    | -0,25   |       | 0,25  |       |        |       |         |         |
| 5  |       |         |         |       | 0,25    | -0,25   |       | -1      |         | 1     |       |       |        |       |         |         |
| 6  |       |         |         |       |         | 1       |       |         | -1      |       | -1    |       |        |       |         |         |
| 7  |       |         |         |       |         |         |       |         |         |       | -0,25 | 1     |        |       |         |         |
| 8  |       |         |         |       |         |         |       |         |         | -1    |       |       | -0,125 |       |         |         |
| 9  |       |         |         |       |         |         |       |         |         |       |       | -1    |        |       | -0,125  | 0,125   |
| 10 |       |         |         |       |         |         |       |         |         |       |       |       | 0,125  | -1    |         |         |
| 11 |       |         |         |       |         |         |       |         |         |       |       |       | -1     |       |         | -1      |

Из свободных членов 11 уравнений равновесия соберем вектор нагрузки:

$$\mathbf{P} = \{ 0 \quad -6 \quad -4 \quad 0 \quad -6 \quad 4 \quad 0 \quad -2,5 \quad 0 \quad -5,5 \quad 12 \}.$$

$$(11 \times 1)$$

## 5. Расчет рамы на компьютере

Для расчета дискретным методом необходимо определить матрицы податливости  $\mathbf{B}^r$  отдельных элементов рамы по их известным

геометрическим и физическим параметрам (структуры этих матриц для ферменных, балочных и комбинированных элементов даны в Приложении 6). Затем они все собираются в общую матрицу податливости необъединенных элементов рамы  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & \mathbf{B}^2 & \mathbf{B}^3 & \mathbf{B}^4 & \mathbf{B}^5 & \mathbf{B}^6 \end{bmatrix}$ . Однако, при использовании разработанной нами компьютерной программы *discrete.exe*, матрица  $\mathbf{B}$  формируется автоматически по введенной ранее информации.

Далее расчет ведется на компьютере в следующей последовательности:

- а)  $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}$ ;
- б)  $\mathbf{C} = \mathbf{K}\mathbf{A}^t$ ;
- в)  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^t = \mathbf{A}\mathbf{C}$ ;
- г)  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{K}_0^{-1}$ ;
- д)  $\mathbf{u} = \mathbf{B}_0\mathbf{P}$ ;
- е)  $\mathbf{S} = -\mathbf{C}\mathbf{u}$ ;
- ж)  $\mathbf{\Delta} = \mathbf{B}\mathbf{S}$ .

Рассмотрим порядок расчета нашей рамы (рис. 28) на компьютере.

1. Запускаем компьютерную программу *discrete.exe*.
2. По команде «Вперед» открыть страницу ввода исходных данных (рис. 33), куда ввести число элементов  $k=6$ , число узлов  $r=4$ , модуль упругости  $E=2.0e11$ , площадь сечения  $F_0 = b \cdot h = 0,1 \cdot 0,2 = 0.02$ , момент инерции сечения  $I_{x0} = bh^3 / 12 = 0,1 \cdot 0,2^3 / 12 = 0.6667e-4$ .

Рис. 33

3. По команде «Вперед» открываем страницу «Параметры задачи» (рис. 34), куда вводим следующие данные:

- числа внутренних усилий в элементах (для  $e^1$ ,  $e^2$ ,  $e^3$  и  $e^6$  числа 3, для  $e^4$  и  $e^5$  – числа 2);
- числа перемещений (т.е. степеней свободы) узлов рамы (для узлов 1, 2 и 4 – числа 3, для узла 3 – число 2);
- длины элементов (для  $e^1$ ,  $e^2$ ,  $e^3$  и  $e^4$  – 4 м, для  $e^4$  и  $e^5$  – 8 м);
- коэффициенты площадей поперечных сечений (все равны 1; так как

площади сечений всех элементов равны, и поэтому  $F' / F_0 = 1$ ,  $r=1,2,\dots,5$ );

– коэффициенты моментов инерции элементов (все равны 1, так как моменты инерции всех элементов одинаковы, и поэтому  $I_{xr} / I_{x0} = 1$ ).

discrete

Файл Помощь

ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ

Число усилий в элементах ( $k=1,2,3$ )

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 |

Число перемещений в узлах ( $r=1,2,3$ )

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 2 | 3 |

Длины элементов  $L_i$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 8 | 8 |

Относительные площади поперечных сечений элементов  $F_i/F_0$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Относительные моменты инерции  $I_{xi}/I_{x0}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Рис. 34

4. По команде «Вперед» открываем страницу ввода матрицы **A** и вектора **P**, а затем вводим значения их элементов в нужные места (рис. 35):

discrete

Файл Помощь

Матрица A

|    | 1  | 2    | 3     | 4  | 5     | 6     | 7    | 8     | 9  | 10    | 11 | 12     | 13 | 14     | 15    | 16 |
|----|----|------|-------|----|-------|-------|------|-------|----|-------|----|--------|----|--------|-------|----|
| 1  |    | 0.25 | -0.25 | 1  |       |       |      |       |    |       |    |        |    |        |       |    |
| 2  | -1 |      |       |    | -0.25 | 0.25  |      |       |    |       |    |        |    |        |       |    |
| 3  |    |      | -1    |    | -1    |       |      |       |    |       |    |        |    |        |       |    |
| 4  |    |      |       | -1 |       |       | 0.25 | -0.25 |    | 0.25  |    |        |    |        |       |    |
| 5  |    |      |       |    | 0.25  | -0.25 | -1   |       | 1  |       |    |        |    |        |       |    |
| 6  |    |      |       |    |       | 1     |      | -1    |    | -1    |    |        |    |        |       |    |
| 7  |    |      |       |    |       |       |      |       |    | -0.25 | 1  |        |    |        |       |    |
| 8  |    |      |       |    |       |       |      |       | -1 |       |    | -0.125 |    |        |       |    |
| 9  |    |      |       |    |       |       |      |       |    |       | -1 |        |    | -0.125 | 0.125 |    |
| 10 |    |      |       |    |       |       |      |       |    |       |    | 0.125  | -1 |        |       |    |
| 11 |    |      |       |    |       |       |      |       |    |       |    |        | -1 |        | -1    |    |

Вектор P

| 1  | 2  | 3 | 4  | 5 | 6 | 7    | 8 | 9    | 10 | 11 |
|----|----|---|----|---|---|------|---|------|----|----|
| -6 | -4 |   | -6 | 4 |   | -2.5 |   | -5.5 | 12 |    |

Рис. 35

5. По команде «Расчет» решаем полную систему уравнений строительной механики. Результаты расчетов выводятся на экран монитора в следующем виде (рис. 36):

| discrete           |             |             |             |             |            |             |             |             |             |            |           |        |          |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-----------|--------|----------|
| Файл    Помощь     |             |             |             |             |            |             |             |             |             |            |           |        |          |
| РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА |             |             |             |             |            |             |             |             |             |            |           |        |          |
| Вектор усилий      |             |             |             |             |            |             |             |             |             |            |           |        |          |
| 1                  | 2           | 3           | 4           | 5           | 6          | 7           | 8           | 9           | 10          | 11         | 12        | 13     | 14       |
| -6.96043           | 2.89373     | -4.08834    | -1.74552    | 0.0883403   | -3.75339   | -8.38454    | -0.762597   | 3.23304     | -3.34497    | -2.98643   | -0.746608 | 6.7598 | -4.65503 |
| Вектор перемещений |             |             |             |             |            |             |             |             |             |            |           |        |          |
| 1                  | 2           | 3           | 4           | 5           | 6          | 7           | 8           | 9           | 10          | 11         |           |        |          |
| -3.39806...        | -6.96043... | -1.79183... | -3.41552... | -8.38454... | 3.70548... | -3.01826... | -1.17295... | -3.01975... | -9.31005... | 1.35219... |           |        |          |

Рис. 36

Эти результаты можно сохранить и распечатать. Для этого даем команду «Сохранить» и задаем результату название (напр., фамилию студента *ivanov*). Тогда все введенные данные и результаты расчета сохранятся в файле с расширением *.dat* (в данном случае – в файле *ivanov.dat*). Затем даем команду «Печать», тем самым присваиваем результату имя текстового файла (в данном случае имя *ivanov.txt*). Протокол расчета следует распечатать и приложить к РГР. В сокращенном варианте он приведен ниже:

#### ПРОТОКОЛ РАСЧЕТА

Число элементов  $k = 6$   
 Число узлов  $r = 4$   
 Число внутренних усилий  $m = 16$   
 Число узловых перемещений  $n = 11$   
 Модуль упругости  $E = 2e+11$   
 Площадь поперечного сечения  $F_0 = 0.02$   
 Момент инерции  $I_{x0} = 6.667e-05$

#### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Вектор внутренних усилий  $S$ :

-6.96043 2.89373 -4.08834 -1.74552 0.0883403 -3.75339 -8.38454 -0.762597  
 3.23304 -3.34497 -2.98643 -0.746608 6.7598 -4.65503 5.2402 -0.732663

Вектор узловых перемещений  $U$ :

-3.39806e-07 -6.96043e-09 -1.79183e-07 -3.41552e-07 -8.38454e-09 3.70548e-07  
 -3.01826e-06 -1.17295e-08 -3.01975e-06 -9.31005e-09 1.35219e-06

Значения усилий и перемещений в протоколе печатаются как десятичные числа в нормализованной форме, где усилия равны их реальным значениям, а узловые перемещения – только относительным. Для получения действительных перемещений, их следует поделить на величину  $EF_0$ .

### 5. Обработка результатов расчета

Запишем усилия в обычной форме:

$S = \{-6,961 \ 2,894 \ -4,088 \ ; \ -1,746 \ 0,088 \ -3,754 \ ; \ -8,384 \ -0,763 \ 3,233 \ ; \ -3,345 \ -$

$2,986 \div -0,747 \ 6,760 \div -4,655 \ 5,240 -0,732\}$ .

Расшифруем компоненты вектора  $S$  согласно его структуре и перепишем их для шести элементов отдельно:

$$\begin{array}{lll} N^1 = -6,961; & M_n^1 = 2,894; & M_k^1 = -4,088; \\ N^2 = -1,746; & M_n^2 = 0,088; & M_k^2 = -3,754; \\ N^3 = -8,384; & M_n^3 = -0,763; & M_k^3 = 3,233; \\ N^4 = -3,345; & M^4 = -2,986; & \\ N^5 = -0,747; & M^5 = 6,760; & \\ N^6 = -4,655; & M_n^6 = 5,240; & M_k^6 = -0,732. \end{array}$$

Из чисел первого столба строим эпюру продольных сил (рис. 37).

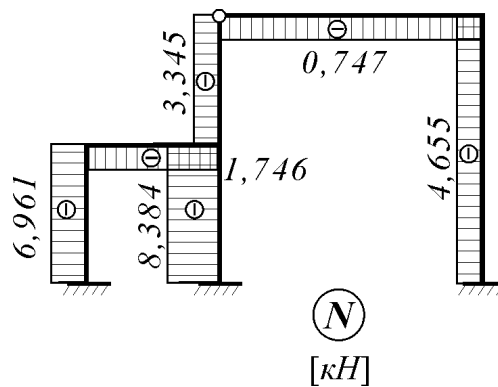


Рис. 37

Затем, учитывая базисную эпюру моментов (рис. 32), по начальным значениям (2-й столбец) и конечным значениям (3-ий столбец) моментов, с учетом их знаков строим вспомогательную эпюру моментов в стержнях рамы  $M_{\text{баз}}$  (рис. 38):

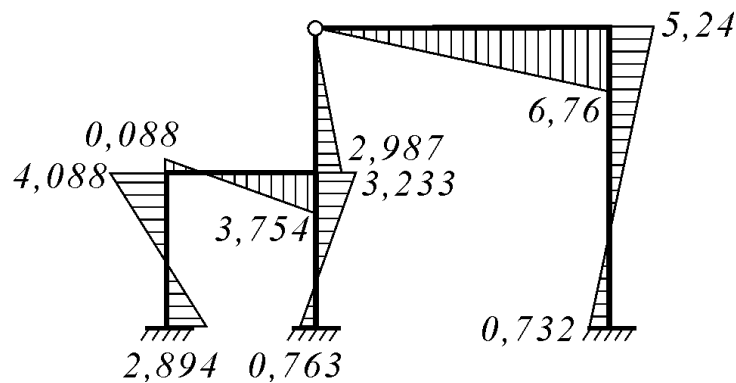


Рис. 38

Однако здесь не учтены вклады местных нагрузок в элементах  $e^2$  и  $e^5$ . Поэтому к эпюре моментов  $M_{\text{баз}}$  в отдельных элементах нужно прибавить

эпюры моментов балочных решений при переносе нагрузки (рис. 29). В итоге получаем окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 39).

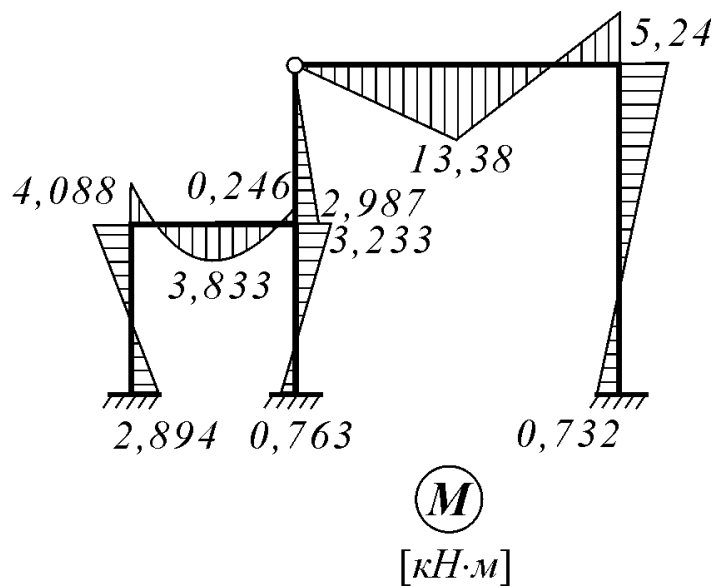


Рис. 39

Эпюры поперечных сил в элементах  $e^1$ ,  $e^3$ ,  $e^4$  и  $e^6$  вычисляем по формулам, определенным выше:

$$Q^1 = \frac{M_{\kappa}^1 - M_{\pi}^1}{4}, \quad Q^3 = \frac{M_{\kappa}^3 - M_{\pi}^3}{4}, \quad Q^4 = \frac{M^4}{4}, \quad Q^6 = \frac{M_{\pi}^6 - M_{\kappa}^6}{8}.$$

Для элементов  $e^2$  и  $e^5$  используем аналогичные формулы, но уже с учетом местной нагрузки:

$$Q^2 = \frac{M_{\pi}^2 - M_{\kappa}^2}{4} + Q_0^2, \quad Q^5 = \frac{M^5}{8} + Q_0^5.$$

Здесь  $Q_0^2$  и  $Q_0^5$  определяются как балочные решения для этих стержней с шарнирными закреплениями концов (рис. 40):

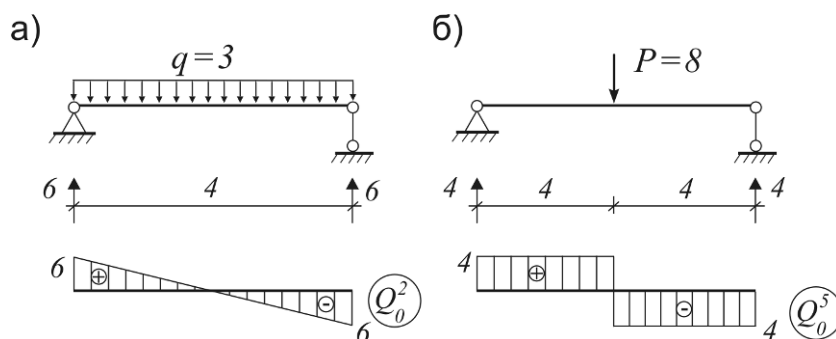


Рис. 40

Тогда окончательная эпюра поперечных сил  $Q$  будут (рис. 41):

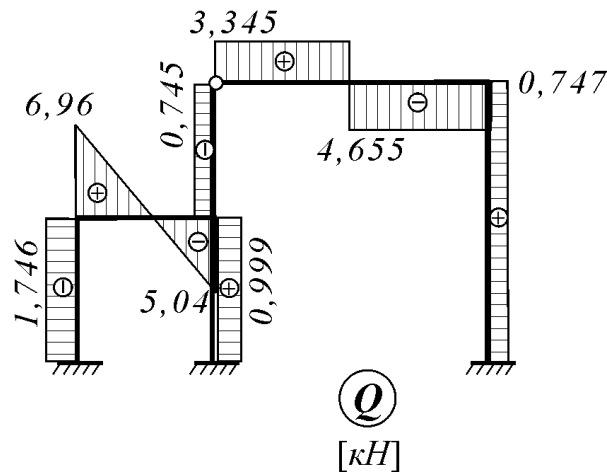
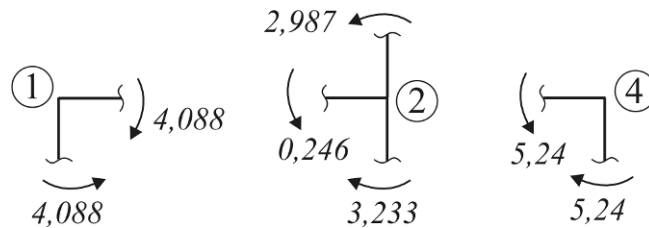


Рис. 41

Проведем проверку правильности полученных результатов. Например, эпюра  $M$  уравновешена во всех узлах (в них суммы моментов равны нулю):



Для проверки правильности эпюр  $Q$  и  $N$  отсечем раму от основания и рассмотрим равновесие верхней части при совместном действии внешних и внутренних сил (рис. 42):

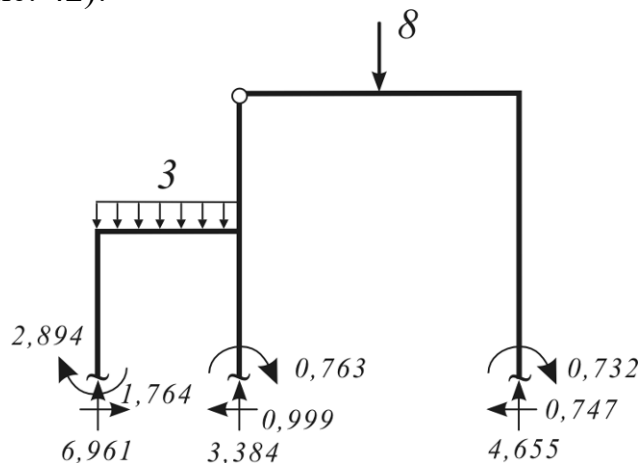


Рис. 42

Например:

$$\sum x = 1,746 - 0,999 - 0,747 = 0,$$

$$\sum y = 6,961 + 3,384 + 4,655 - 3 \times 4 - 8 = 0.$$

Уравнения равновесия соблюдаются, значит, расчет рамы проведен

правильно.

Для определения деформированного состояния рамы рассмотрим полученный вектор перемещений

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(11 \times 1)} &= \left\{ \mathbf{u}_1_{(3 \times 1)} \quad \mathbf{u}_2_{(3 \times 1)} \quad \mathbf{u}_3_{(2 \times 1)} \quad \mathbf{u}_4_{(3 \times 1)} \right\} = \\ &= \left\{ \underbrace{u_{11} \quad u_{21} \quad u_{31}}_1 \quad \underbrace{u_{12} \quad u_{22} \quad u_{32}}_2 \quad \underbrace{u_{13} \quad u_{23}}_3 \quad \underbrace{u_{14} \quad u_{24} \quad u_{34}}_4 \right\} = \\ &= \{ -3.39806\text{e-}07 \quad -6.96043\text{e-}09 \quad -1.79183\text{e-}07 \quad | \quad -3.41552\text{e-}07 \quad -8.38454\text{e-}09 \\ &3.70548\text{e-}07 \quad | \quad -3.01826\text{e-}06 \quad -1.17295\text{e-}08 \quad | \quad -3.01975\text{e-}06 \quad -9.31005\text{e-}09 \\ &1.35219\text{e-}06 \} \end{aligned}$$

и расшифруем его компоненты в соответствии со структурой вектора перемещений следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{11} &= -0,3398; & u_{21} &= -0,0696; & u_{31} &= -0,1791; \\ u_{12} &= -0,3415; & u_{22} &= -0,0838; & u_{23} &= 0,3705; \\ u_{13} &= -3,0182; & u_{23} &= -0,1173; & & \\ u_{14} &= -3,0197; & u_{24} &= -0,0931; & u_{34} &= 1,3522. \end{aligned}$$

Приведенные здесь числовые значения перемещений узлов по их степеням свободы, для удобства, масштабированы умножением их на коэффициент  $10^6$ . Это позволяет представить примерную картину деформирования рамы (рис. 43):

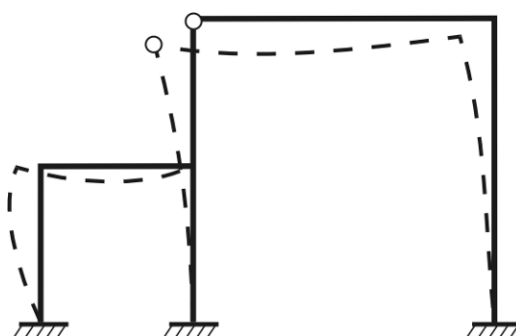


Рис. 43

Итак, полученные значения вектора усилий  $\mathbf{S}$  и вектора перемещений  $\mathbf{u}$ , соответствующие им эпюры изгибающих моментов (рис. 39), поперечных сил (рис. 41) и продольных сил (рис. 37), а также картина деформированного состояния (рис. 43) дают однозначное представление об НДС заданной расчетной схемы рамы.



# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

### Линии влияния усилий консольной балки

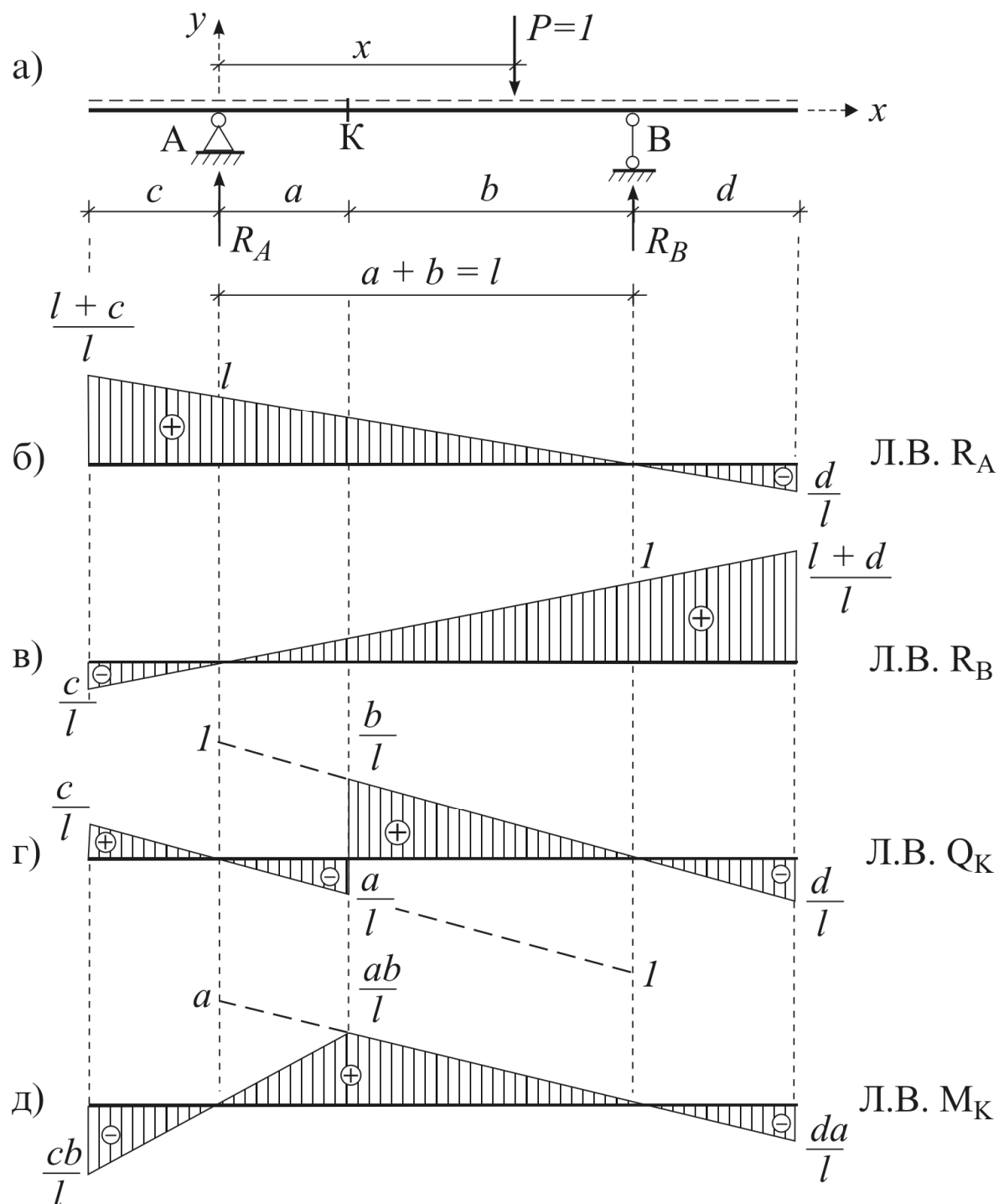


Рис. 44

## Приложение 2

### Линии влияния усилий $M_K$ и $Q_K$ консольной балки, когда сечения расположены на консолях

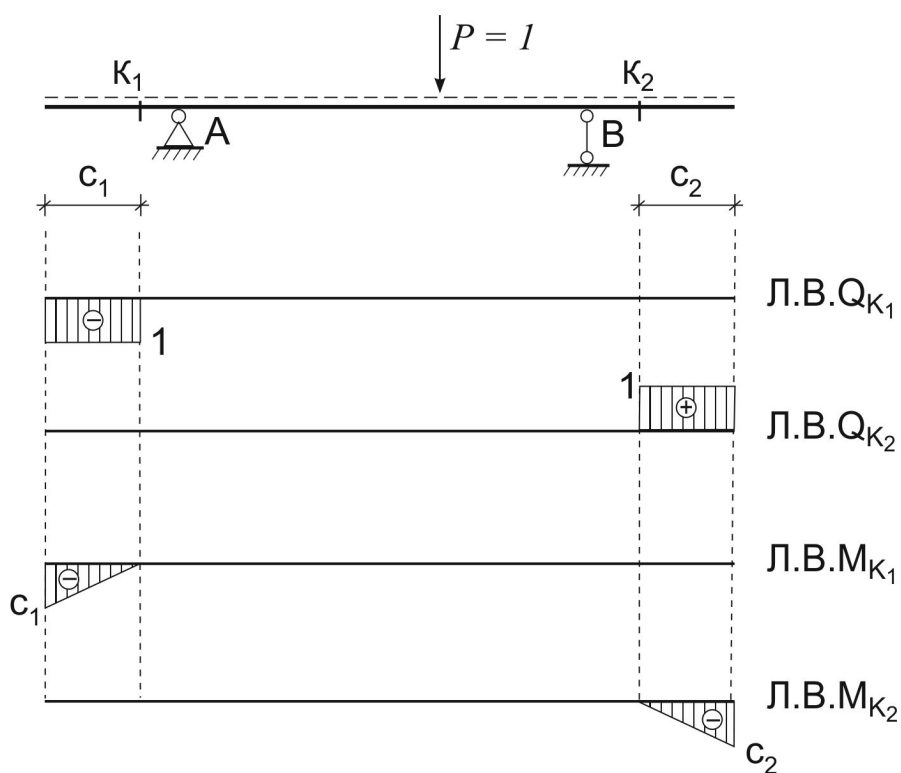


Рис. 45

## Приложение 3

### Линии влияния усилий консоли

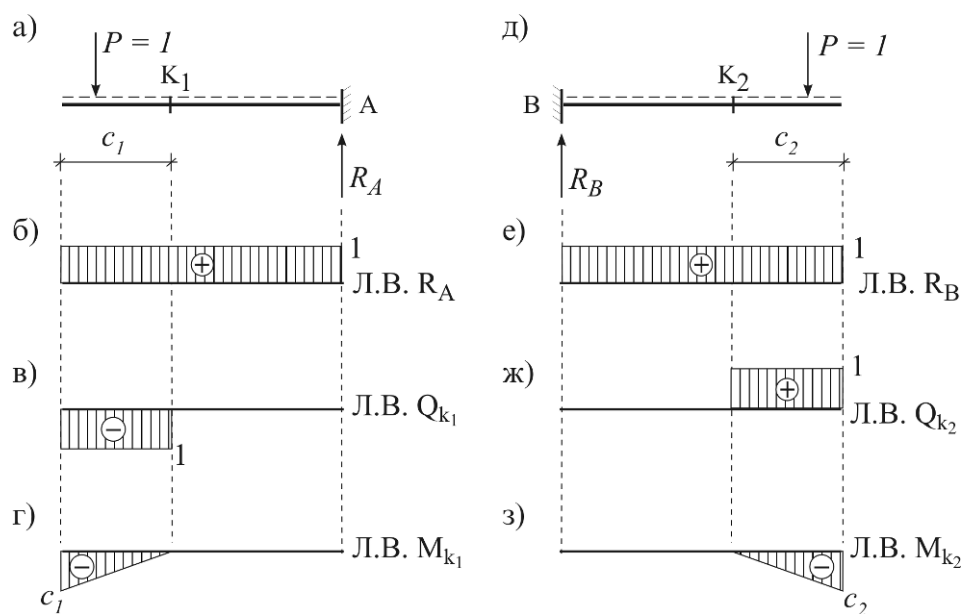


Рис. 46

## Построение линий влияния кинематическим методом

### 4.1. Линии влияния опорных реакций

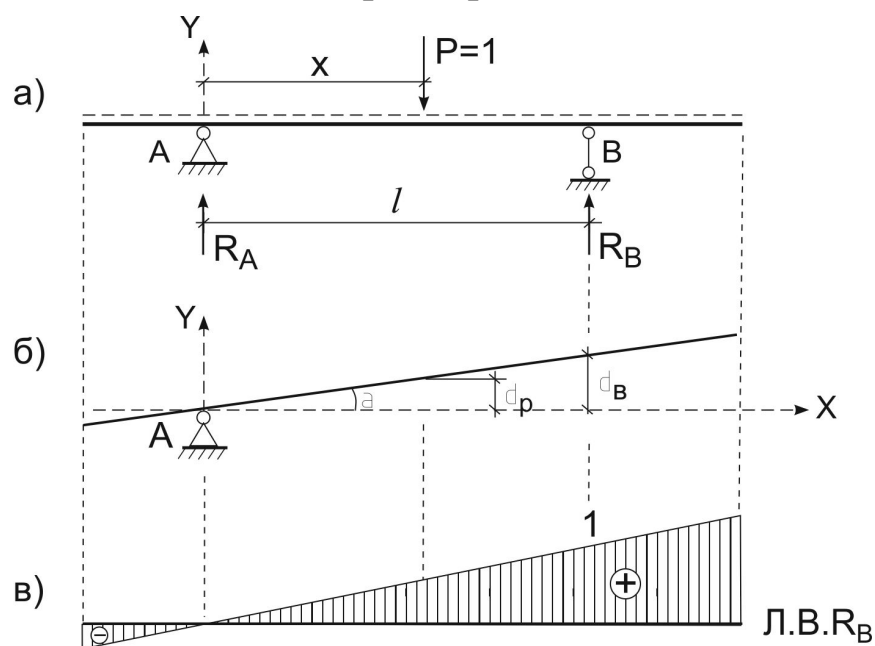


Рис. 47

### 4.2. Линии влияния $M_k, Q_k$

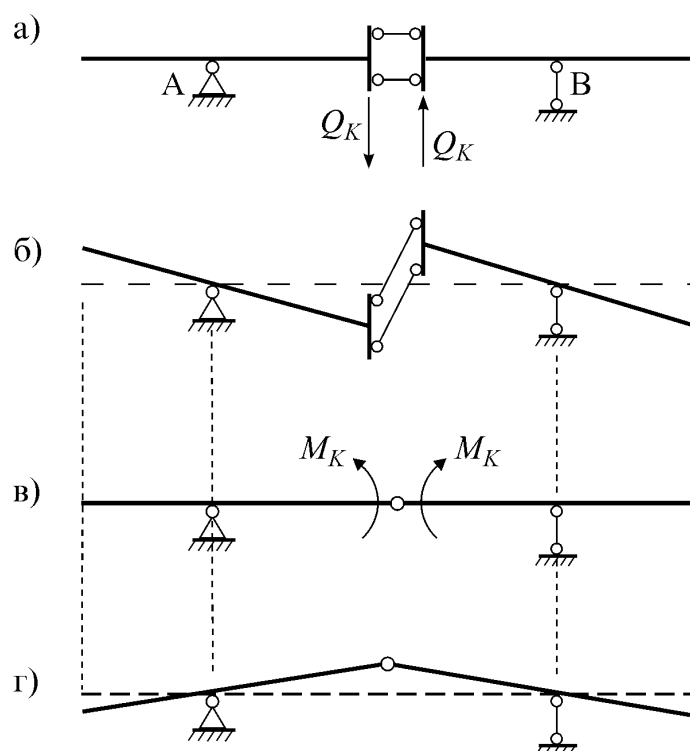


Рис. 48

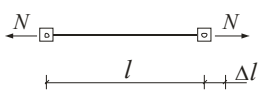
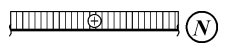
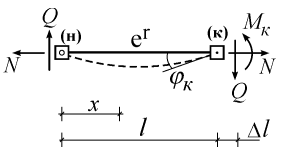
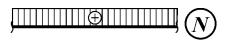

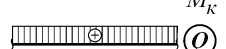
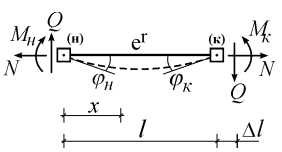
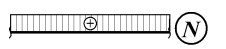

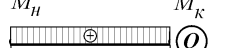
**Таблица метода перемещений**

|                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| <p><b>1</b></p> | <p><b>2</b></p> |
| <p><b>3</b></p> | <p><b>4</b></p> |
| <p><b>5</b></p> | <p><b>6</b></p> |
| <p><b>7</b></p> | <p><b>8</b></p> |

$l$  - длина стержня,  $EI$  - изгибная жесткость

## Приложение 6

### Элементы плоской стержневой системы и их характеристики\*

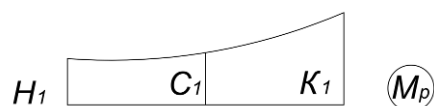
| Название элемента    | Обозначение и характеристики элемента  | Внутренние усилия  |  | Деформации   | Матрицы податливости $\mathbf{B}^r$  |
|----------------------|--|--|--|--|--|
|                      |  | Эпюры  | Величины усилий  |  |  |
| Ферменный ЭЛ-Т       |   |   | $N(x) = N$<br>$M(x) = 0$<br>$Q(x) = 0$<br>$\mathbf{S}^r = \{N^r\}$   | $\Delta_l = l / EF$<br>$\Delta^r = \{\Delta_l^r\}$   | $\begin{bmatrix} \frac{l}{EF} \end{bmatrix}$   |
| Комбинированный ЭЛ-Т |   | <br><br>      | $N(x) = N$<br>$M(x) = \frac{M}{l} x$<br>$Q(x) = \frac{M}{l}$<br>$\mathbf{S}^r = \{N^r M^r\}$                               | $\Delta_l = l / EF$<br>$\varphi = \frac{l}{3EI} M$<br>$\Delta^r = \{\Delta_l^r \varphi^r\}$  | $\begin{bmatrix} \frac{l}{EF} & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}$  |
| Балочный ЭЛ-Т        |  | <br><br> | $N(x) = N$<br>$M(x) = M_n + \frac{M_k - M_n}{l} x$<br>$Q(x) = \frac{M_k - M_n}{l}$<br>$\mathbf{S}^r = \{N^r M_n^r M_k^r\}$ | $\Delta_l = l / EF$<br>$\varphi_n = \frac{l}{3EI} M_n + \frac{l}{6EI} M_k$<br>$\varphi_k = \frac{l}{6EI} M_n + \frac{l}{3EI} M_k$<br>$\Delta^r = \{\Delta_l^r \varphi_n^r \varphi_k^r\}$ | $\begin{bmatrix} \frac{l}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ 0 & \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}$ |

\* Здесь  $r$  – номер элемента  $e^r$

## Приложение 7

### Вычисление интеграла Мора по формуле Симпсона

Интеграл от произведения двух функций (например, грузовой эпюры  $M_p$  и единичной эпюры  $\bar{M}$ ) на участке длиной  $l$  определяется так:



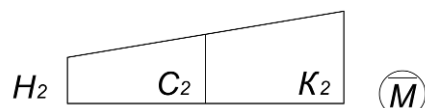
( $M_p$ )

$$\int M_p \bar{M} dx = \frac{l}{6} (\pm H_1 H_2 \pm 4 C_1 C_2 \pm K_1 K_2),$$

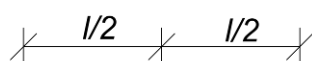
где  $H_1, H_2$  – начальные значения эпюр моментов;

$C_1, C_2$  – средние значения эпюр моментов;

$K_1, K_2$  – конечные значения эпюр моментов.



( $\bar{M}$ )



Знак («+» или «-») каждого произведения в скобках определяется так: если оба значения сомножителей расположены по одну сторону от оси эпюры (напр., оба значения наверху), то учитывается знак «+», если же значения сомножителей расположены по разные стороны, (напр., одно значение наверху, а другое – внизу), учитывается знак «-».

Окончательное значение интеграла Мора определяется делением результата интегрирования на изгибную жесткость участка  $EI$ .

## Приложение 8

### Таблица исходных данных для выполнения РГР\*

| № группы | $a$<br>(м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) |
|----------|------------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|
| 1        | 2          | 8             | 2             | 3               | 4               |
| 2        | 2,5        | 5             | 1             | 2               | 6               |
| 3        | 3          | 6             | 4             | 1               | 2               |
| 4        | 3,5        | 2             | 6             | 5               | 1               |
| 5        | 4          | 3             | 2             | 4               | 5               |
| 6        | 4,5        | 4             | 7             | 1               | 4               |
| 7        | 5          | 3             | 5             | 3               | 1               |
| 8        | 5,5        | 2             | 4             | 2               | 8               |
| 9        | 6          | 5             | 3             | 5               | 2               |
| 10       | 6,5        | 10            | 8             | 4               | 3               |
| 11       | 7          | 1             | 2             | 3               | 1               |
| 12       | 7,5        | 4             | 1             | 2               | 3               |
| 13       | 8          | 2             | 5             | 4               | 2               |
| 14       | 8,5        | 3             | 6             | 1               | 3               |

\*Изгибные жесткости всех элементов рамы равны  $EI$

**Расчетные схемы для выполнения РГР**

а) Схемы к РГР №1 (задача 1)

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учебник, 9-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2004. – 656 с.
2. Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р. Курс лекций по строительной механике: Учебное пособие. – Казань: КГАСУ, 2014. – 143 с.
3. Шакирзянов Р.А. Краткий курс лекций по строительной механике. – Казань: КГАСУ, 2010. – 115 с.
4. Шакирзянов Р.А. Строительная механика (Корылма механикасы): Учебник для высших учебных заведений (на татарском языке). – Казань: Магариф, 2008. – 384 с.
5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. I. Статически определимые системы: Учебное пос. – М.: АСВ, 1999. – 335 с.
6. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. II. Статически неопределимые системы: Учебное пос. – М.: АСВ, 2000. – 464 с.
7. Саргсян А.Е. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 2004. – 461 с.
8. Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р. Динамика и устойчивость сооружений: Учебное пособие. – 2-е изд. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2015. – 119 с.
9. Аксенов О.М. Дискретный метод строительной механики и вычислительные инструменты. – Казань: ЗАО «Новое знание», 2011. – 326 с.
10. Немов В.Г., Сучков В.Н. Руководство по решению задач строительной механики: Учебное пособие. – Казань: КГАСУ, 2007. – 118 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| <b>Введение</b> .....   | 3  |
| Правило знаков и определение внутренних усилий .....  | 4  |
| <b>РГР-1: «РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ПОСТОЯННУЮ И ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКИ»</b> .....                                 | 6  |
| <u>Задача 1.</u> Расчет статически определимой составной системы на постоянную и подвижную нагрузки .....         | 6  |
| <u>Задача 2.</u> Расчет статически неопределимой рамы методом сил ...   | 17 |
| <b>РГР-2: «РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ»</b> .....   | 24 |
| <u>Задача 1.</u> Расчет рамы методом перемещений .....  | 24 |
| <u>Задача 2.</u> Расчет рамы дискретным методом .....   | 29 |
| <b>Приложения</b> .....   | 41 |
| <u>Приложение 1.</u> Линии влияния усилий консольной балки .....  | 41 |
| <u>Приложение 2.</u> Линии влияния усилий $M$ и $Q$ консольной балки, когда сечения расположены на консолях ..... | 42 |
| <u>Приложение 3.</u> Линии влияния усилий консоли .....   | 42 |
| <u>Приложение 4.</u> Построение линий влияния кинематическим методом .  | 43 |
| 4.1. Линии влияния опорных реакций .....  | 43 |
| 4.2. Линии влияния $M_K$ и $Q_K$ .....  | 43 |
| <u>Приложение 5.</u> Таблица метода перемещений .....   | 44 |
| <u>Приложение 6.</u> Элементы плоской стержневой системы и их характеристики .....                                | 45 |
| <u>Приложение 7.</u> Вычисление интеграла Мора по формуле Симпсона .....  | 46 |
| <u>Приложение 8.</u> Таблицы исходных данных для выполнения РГР .....   | 46 |
| <u>Приложение 9.</u> Расчетные схемы для выполнения РГР .....   | 47 |
| а) Схемы к РГР №1 (задача 1) .....  | 47 |
| а) Схемы к РГР №1 (задача 2) .....  | 53 |
| а) Схемы к РГР №2 (задача 1) .....  | 56 |
| а) Схемы к РГР №2 (задача 2) .....  | 59 |
| <b>Литература</b> .....   | 62 |
| <b>Содержание</b> .....   | 63 |



**Шакирзянов Рашит Аглеевич,  
Шакирзянов Фарид Рашитович**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ  
ПО КУРСУ «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»**

для студентов дневной формы обучения  
по направлению подготовки бакалавров  
08.03.01 «Строительство»

Редактор

Издательство

|   |                        |                  |
|---|------------------------|------------------|
| Казанского государственного архитектурно-строительного университета |                        |                  |
| Подписано в печать  |                        | Формат 60x84/16  |
| Заказ   | Печать ризографическая | Усл.-печ. л. 4,0 |
| Тираж 30 экз.   | Бумага офсетная № 1    | Уч.-изд. л. №,0  |

---

Отпечатано в полиграфическом секторе  
Издательства КГАСУ  
420043, Казань, Зеленая, д. 1