# Федеральное агентство по образованию РФ Казанский государственный архитектурностроительный университет

Кафедра сопротивления материалов и основ теории упругости

В.П. Мартышев

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ курс лекций

Казань, 2008

# СОДЕРЖАНИЕ

	(
ВВЕДЕНИЕ	5
Раздел 1. Основные понятия и допущения	7
Виды нагрузок и схематизация элементов сооружений	9
Метод сечений. Понятия о напряжениях	11
Напряжения в декартовой системе координат	13
Закон парности касательных напряжений	14
Понятия о перемещениях и деформациях	15
Внутренние силы и моменты в брусе	16
Зависимость между напряжениями и внутренними	
силовыми факторами	18
Дифференциальные уравнения равновесия прямого бруса	19
Раздел 2. Геометрические характеристики плоских сечений	21
Зависимость между моментами инерции относительно	
параллельных осей	23
Зависимость между моментами инерции при повороте осей	24
Главные оси инерции и главные моменты инерции	25
Эллипс инерции	27
Вычисление моментов инерции простых фигур	28
Раздел 3. Центральное растяжение (сжатие)	30
Напряжения и деформации при растяжении (сжатии).	
Закон Гука	33
Статически неопределимые задачи	39
Механические свойства материалов	46
Расчеты на прочность	50
Энергия деформации	51
Раздел 4. Сдвиг	53
Закон Гука	53
Расчет заклепочных (болтовых) соединений	54
Расчет сварных соединений	56
Раздел 5 Плоский изгиб	58
Внутренние силовые факторы Метол сечений	60
Построение эпюр изгибающих моментов и	00
перерезывающих сил	62
Нормальные напряжения при чистом изгибе	68
Нормальные и касательные напряжения в прямоугольном	
сечении балки при поперечном изгибе	71
Касательные напряжения в двутавровом сечении	74
Условия прочности при поперечном изгибе, полбор сечений	75
Определение деформации балок при изгибе	77
Метол уравнивания произвольных постоянных	79
Проверка балок на жесткость.	83
Статически неопределимые балки при изгибе	83
	~

Энергия деформации	
Раздел 6. Кручение стержней	
Напряжения и деформации при кручении круглых валов	3
Расчеты на прочность. Подбор сечений вала	
Статически неопределимые задачи при кручении	
Свободное кручение стержней некруглого сечения	
Раздел 7. Сложное сопротивление бруса	
Определение внутренних силовых факторов	•••••
Определение напряжений	
Косой изгиб	
Внецентренное сжатие (растяжение)	
Изгиб с кручением	
Раздел 8. Устойчивость сжатых стержней	
Устойчивость сжатых стержней в упругой стадии, ф Эйлера	ормула
Влияние способов закрепления концов стержня Пределы применимости формулы Эйлера. Потеря	
устойчивости за пределами пропорциональности	
Проверка сжатой колонны на устойчивость	
Проектирование колонны из стандартных профилей	
Раздел 9. Динамическое действие нагрузок	
Учет сил инерции	
Расчеты на удар тел	
Колебание тел	
Раздел 10. Балка на упругом основании	
Бесконечно длинная балка, загруженная локальной сило	)й
Полубесконечная балка	•••••
Расчет короткой балки методом последовательных	
приближений	
Расчет балок по линиям влияния	
Раздел 11. Основные уравнения механики	
деформируемого твердого тела	
Зависимость между перемещениями	
и деформациями (уравнения Коши)	•••••
Условия совместности (неразрывности) деформаций	
Дифференциальные уравнения равновесия	
Напряжения на наклонных площадках	
(условия на поверхности)	•••••
Раздел 12. Анализ напряженно-	
деформированного состояния в точке тела	
Объемное напряженное состояние	•••••
Плоское напряженное состояние	
Анализ деформированного состояния	
Раздел 13. Физические уравнения. Теории прочности	
Обобщенный закон Гука	

Объемный закон Гука 160
Энергия деформации 160
Теории прочности 162
I теория прочности 163
II теория прочности 163
III теория прочности 164
IV теория прочности 165
V теория прочности (Мора) 166
Раздел 14. Статически определимые фермы и рамы 167
Основные понятия
Степень статической определимости и изменяемости 168
Определение внутренних продольных сил в сечениях стержней
статически определимых ферм 168
Определение внутренних силовых факторов (ВСФ) в
статически определимых рамах 170
Метод сил
Теорема о взаимности работ (теорема Бетти) 171
Теорема о взаимности перемещений (принцип Максвелла) 171
Формула перемещений Мора 172
Порядок вычислений по формуле Мора 173
Определение перемещений в статически определимых
конструкциях методом сил 175
Вопросы для самопроверки 179

# Курс написан на основе лекций, прочитанных автором в Казанском государственном архитектурно-строительном университете

### введение

При проектировании различных инженерных сооружений приходится выбирать материал и размеры для каждого элемента конструкции так, чтобы он вполне надежно, без риска разрушиться сопротивлялся действию внешних сил, передающихся на него от соседних частей конструкции. Неправильный расчет самой, на первый взгляд, незначительной детали может повлечь за собой очень тяжелые последствия, привести к разрушению всей конструкции. Требования надежности и наибольшей экономии противоречат друг другу. Первое обычно ведет к увеличению расхода материала и утяжелению конструкции, второе же требует снижения этого расхода.

Кроме <u>расчетов на прочность</u>, во многих случаях проектирования производят расчеты на жесткость и устойчивость.

Целью <u>расчетов на жесткость</u> является определение параметров элементов конструкции, при которых перемещения (деформации) не превышают заданных величин, допускаемых по условиям нормальной эксплуатации.

Деформации ряда конструкций при действии некоторого вида нагрузок незначительны, пока величины этих нагрузок меньше так называемых критических значений. При нагрузках же, превышающих даже незначительно критические значения, деформации конструкции резко возрастают. Простейший пример такого явления – продольный изгиб сжатого стержня – при некотором значении сжимающей силы происходит выпучивание (изгиб) стержня, практически равносильное разрушению. Такое качественное изменение характера деформации конструкции при увеличении нагрузки называется потерей устойчивости. Расчет конструкции, имеющей целью не допустить потери устойчивости, называется расчетом на устойчивость.

Совокупность наук о прочности, жесткости и устойчивости сооружений Механикой твердого деформируемого тела. называется Одним ИЗ основополагающих разделов этой науки является Сопротивление материалов. Другими ее разделами являются: теория упругости, теория пластичности, строительная механика стержневых систем, строительная механика пластин и оболочек. Кроме того, существуют специальные строительная дисциплины: теория сооружений, механика корабля, строительная механика самолета и др.

В курсе *сопротивления материалов* основное внимание уделяется вопросам прочности, жесткости и устойчивости отдельного стержня как основного элемента сооружений. В сочетании с аналитическими методами расчета в *сопротивлении материалов* используются экспериментальные данные, полученные в лабораториях и натурных условиях. В *сопротивлении* 

*материалов* широко применяются методы теоретической механики (в первую очередь статики) и математического анализа, а также используются данные из разделов физики, в которых изучаются свойства различных материалов.

Начало науки о сопротивлении материалов связывают обычно с именем Галилео Галилея, который в работе, опубликованной в 1638 г., дал решение некоторых важных задач динамики и сопротивления материалов.

В 1660 г. Роберт Гук сформулировал закон, устанавливающей связь между нагрузкой и деформацией и имеющий исключительно важное значение для сопротивления материалов.

Большой вклад в науку о сопротивлении материалов внес в XVIII веке действительный член Петербургской Академии наук Леонард Эйлер, решивший задачу об устойчивости сжатых стержней.

Значительный вклад в развитие науки о сопротивлении материалов внесли и русские ученые:

- Д.Н. Журавский решил ряд важных и интересных вопросов связанных с прочностью балок при их изгибе;
- Ф.С. Ясинский занимался вопросами устойчивости элементов конструкций, вызванных к жизни изучением причин разрушения некоторых мостов;
- И.Г. Бубнов считается основоположником современной науки о прочности корабля;
- Академик А.Н. Крылов известен работами в области прочности корабля и в области динамических расчетов.

Большое значение имеют также работы Б.Г. Галеркина, С.П. Тимошенко, П.Ф. Папковича, В.З. Власова и др.

#### Рекомендуемая литература

- 1. Н.М. Беляев «Сопротивление материалов» (любое издание).
- 2. А.В. Дарков, Г.С. Шпиро «Сопротивление материалов».
- 3. А.Ф. Смирнов, А.В. Александров и др. «Сопротивление материалов».
- 4. Н.М. Беляев «Сборник задач по сопротивлению материалов».
- 5. Под редакцией В.К. Качурина «Сборник задач по сопротивлению материалов».

## РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

Основное внимание в сопротивлении материалов уделяется изучению брусьев, являющихся наиболее распространенными элементами многих конструкций. *Брусом* (*стержнем*) – называется элемент, длина которого



значительно больше его поперечных размеров. Горизонтальный (или наклонный) брус, работающий на изгиб, обычно называется балкой. Ось бруса представляет геометрическое место точек, совпадающих с центрами тяжести площадей поперечных сечений бруса, т.е. сечений, расположенных в плоскостях, перпендикулярных к указанной оси.

Элемент конструкции, длина И ширина которого BO много раз превышают его толщину, называется оболочкой. Геометрическое место точек, равноудаленных ОТ наружной И внутренней поверхностей оболочки, называется срединной поверхностью.

Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, называется *пластиной*.

Во всяком теле под действием приложенных к нему сил происходит изменение взаимного расположения частиц. Как правило, изменяются его размеры, объем и форма, но масса остается постоянной. В таком случае говорят, что тело претерпевает *деформацию*. Так, например, при растяжении бруса меняется его длина, при изгибе – форма.

*Деформацией* называется изменение взаимного расположения частиц тела, вызывающее изменение его размеров и формы

Если силы, вызвавшие деформацию, постепенно уменьшать и затем полностью снять, то тело будет стремиться приобрести свою первоначальную форму. Деформации полностью или частично исчезнут.

Свойство некоторых тел деформироваться под нагрузкой и затем после устранения сил восстанавливать свое первоначальное состояние называют упругостью. Часть деформаций, которая исчезает после снятия нагрузки, называют упругой, а ту часть, которая остается, называют остаточной деформацией. Появление остаточных деформаций связано с так называемой пластичностью тела. Если деформации после снятия нагрузки полностью исчезли, то тело называют абсолютно упругим или идеально упругим.

У некоторых материалов упругие свойства одинаковы BO всех направлениях. Такие тела называют изотропными. Наряду с ЭТИМ встречаются анизотропные тела, которых свойства в различных У

направлениях разные. К числу таких тел относятся, например, дерево и железобетон. При сжатии дерева вдоль волокон деформации в несколько раз меньше, чем при сжатии поперек волокон.

При исследовании прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций <u>в сопротивлении материалов используют ряд предпосылок</u> (допущений), <u>упрощающих расчеты при решении большинства задач:</u>

1. Материал конструкции является однородным и сплошным, т.е. его свойства не зависят от формы и размеров тела и одинаковы во всех его точках.

2. Материала конструкции изотропен, т.е. его свойства по всем направлениям одинаковы. При решении некоторых задач необходимо учитывать различные свойства материала в различных направлениях, т.е. его анизотропию.

3. Материал конструкции обладает свойством идеальной упругости, т.е. способностью полностью восстанавливать первоначальные формы и размеры тела после устранения нагрузки. Деформация такого тела в каждый момент времени зависит только от нагрузок, действующих в этот момент времени на тело, и не зависит от того, в какой последовательности нагрузки приложены.

4. Материал конструкции является <u>линейно деформируемым</u>. Это означает, что деформации пропорциональны действующей нагрузке. Если на тело действует несколько сил, то при увеличении всех сил в одно и тоже число раз деформации увеличиваются в то же число раз. Это допущение, также как и предыдущее, справедливо при действии сил, не превышающих определенной величины.

5. Деформации конструкции предполагаются настолько малыми, что можно не учитывать их влияния на взаимное расположение нагрузок и на расстояния от нагрузок до любых точек конструкции.



Вопрос о возможности применения этой предпосылки решается в каждом отдельном случае с учетом не только вида конструкции, но и характера нагрузки.

Так,например,приопределенииизгибающегомомента в защемлении балки (рис.в)можно не учитывать изменениярасстояния от заделки до силы навеличину Δ.А при расчете балки(рис. г)можно не учитывать еедеформации(при определенииусилий в ней)в том случае, если

прогиб  $\delta$  значительно меньше высоты h сечения балки. При больших прогибах появляется дополнительный изгиб балки от эксцентриситета силы F.

6. Принцип независимости действия силы, т.е. результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности. Он применим в тех случаях, когда используются допущения №3 и №4. Следует иметь ввиду, что в отдельных задачах этот принцип применять нельзя. В подобных случаях обычно делаются специальные оговорки.

7. Гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений) – поперечные сечения бруса, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки.

Эта гипотеза играет исключительно важную роль в сопротивлении материалов и используется при выводе многих формул для расчета брусьев.

#### Виды нагрузок и схематизация элементов сооружений:

В сопротивлении материалов расчет реальной конструкции на действие реальных внешних нагрузок производиться с помощью так называемых *расчетных схем*. При составлении расчетных схем нагрузку, приложенную к небольшим участкам поверхности бруса, заменяют *сосредоточенной силой*, т.е. силой приложенной в точке поверхности, и переносят к оси бруса. Точки приложения сил на оси бруса и сосредоточенных моментов, возникающих при переносе сил, располагают в тех же поперечных сечениях, в которых приложены нагрузки. На расчетной схеме вместо бруса изображается его ось. На рис. 1.1а показан брус и действующие на него внешние силы  $F_1, F_2$  и  $F_3$ . На рис. 1.1б дана расчетная схема этого бруса с сосредоточенными силами и моментами, приложенными к его оси.



Рис. 1.1

Нагрузки, приложенные к участкам больших размеров, при составлении расчетной схемы нельзя заменять сосредоточенными силами. Такие нагрузки расчетной схеме на остаются распределенными по поверхности ИЛИ приводятся К распределенной по линии. Например, нагрузка  $\rho$ , равномерно распределенная поверхности по части бруса, показанная на рис.



1.2а, заменяется на расчетной схеме рис.1.26 нагрузкой *q* – *равномерно распределенной* по длине участка оси балки.

При неравномерном распределении сплошной нагрузки или при переменной ширине балки соответствующая нагрузка на расчетной схеме является *неравномерно распределенной*. Нагрузка, распределенная по линии (q) – иногда называется *погонной нагрузкой*.

Часто встречаются нагрузки, распределенные по объему тела (например, вес сооружения, силы инерции).

Такие нагрузки называются объемными и обозначаются  $\gamma$  (гамма), их можно привести к погонным нагрузкам  $q_1 = \gamma A$ , где  $A = b \cdot h - nлощадь$ поперечного сечения бруса. На рис. 1.16 кроме силовых нагрузок  $F_i$  показаны и моментные нагрузки  $M_i$ . Они бывают в виде сосредоточенных моментов  $M_i$ (пара сил) и моментов, распределенных по линии «**m**» которые возникают при переносе нагрузки q с одной оси на другую.

Размерности нагрузок:  $F[H]; M[H \cdot M], q[H/M] \rho[H/M^2], \gamma \left\lfloor \frac{H}{M^3} \right\rfloor, m[H].$ 

Здесь м – метр, H – ньютон. 1кг $\cdot$ с = 9,81 H ≈ 10H.

Для брусьев (стержней) здесь и в <u>дальнейшем</u> будем вводить <u>правую</u> систему декартовых осей хуг. Оси правые, если кратчайший поворот оси *x* к *y* с конца оси *z* виден против часовой стрелке. Ось *z* всегда будем направлять вдоль оси бруса, а оси *xy* располагать в поперечном сечении бруса (см. рис. 1.2). Если внешние нагрузки произвольно направлены (моменты представляем в виде векторов), то все нагрузки можно разложить на составляющие (компоненты) по осям координат *xyz*. В векторном виде эти разложения можно записать так:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_x, \ \mathbf{M} = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z, \ \mathbf{q} = \mathbf{q}_x + \mathbf{q}_y + \mathbf{q}_z, \mathbf{m} = \mathbf{m}_x + \mathbf{m}_y + \mathbf{m}_z, \ \mathbf{q} = \mathbf{q}_x + \mathbf{q}_y + \mathbf{q}_z, \ \gamma = \gamma_x + \gamma_y + \gamma_z$$

<u>Здесь</u>:

**F**<sub>z</sub>, **q**<sub>z</sub>, **ρ**<sub>z</sub>, **γ**<sub>z</sub> – продольные нагрузки (растягивают или сжимают брус); **F**<sub>x</sub>, **q**<sub>x</sub>, **ρ**<sub>x</sub>, **γ**<sub>x</sub> – поперечные (в направлении оси *x*) нагрузки; **F**<sub>y</sub>, **q**<sub>y</sub>, **ρ**<sub>y</sub>, **γ**<sub>y</sub> – поперечные (в направлении оси *y*) нагрузки;  $\mathbf{M}_{x}$ ,  $\mathbf{m}_{x}$  – изгибающие моменты относительно оси *x* (на рис. 1.2 изгибают брус в вертикальной плоскости);

 $\mathbf{M}_{y}$ ,  $\mathbf{m}_{y}$  – изгибающие моменты относительно оси *y* (на рис. 1.2 изгибают брус в горизонтальной плоскости);

 $\mathbf{M}_z$ ,  $\mathbf{m}_z$  – крутящие (скручивающие) моменты.

Для всех компонент внешних нагрузок примем следующее <u>правило</u> знаков:

1) нагрузки положительны, если направлены вдоль соответствующих осей.

2) моментные нагрузки положительны, если с конца соответствующей оси видны против хода часовой стрелки.

Все эти нагрузки составляют стандартную систему нагрузок.

Вышеперечисленные нагрузки различаются по длительности действия (постоянные и временные) и характеру воздействия на конструкцию (статические и динамические).

Постоянные нагрузки (например, собственный вес конструкции) действуют на протяжении всего времени эксплуатации сооружения.

Временные нагрузки (например, вес поезда, вес снега, нагрузка от ветра и др.) действуют в течении ограниченного промежутка времени. Нагрузки от снега, ветра и т.п. имеют случайную природу и их приходиться <u>специально</u> определять. Они зависят от *географического* местоположения сооружения, рельефа местности, конструкции и очертания самого сооружения.

Статическая нагрузка – ее величина медленно возрастает от нуля до ее конечного значения, при этом в конструкции возникают весьма малые ускорения. Поэтому возникающими в конструкции силами инерции можно в расчетах пренебречь.

*Динамическая нагрузка* (например, ударная) вызывает в конструкции большие ускорения, которые в расчетах необходимо учитывать.

Часто временная нагрузка может непрерывно изменяться по некоторому закону; в последнем случае она называется *переменной нагрузкой*. Если переменная нагрузка изменяется по циклическому (повторяющемуся) закону, то она называется *циклической*.

При составлении расчетных схем необходимо иметь ввиду, что не всегда можно переносить силы по линии их действия и заменять систему сил их равнодействующей. Иногда такие операции приводят к существенному изменению загружения конструкции.

#### Метод сечений. Понятия о напряжениях

В процессе деформации бруса под нагрузкой в нем появляются *дополнительные* (к силам физического взаимолействия между частицами тела) *механические* силы  $F_i^{npab}$  эдействи:  $F_i^{neb}$  оторые и ихичаются в сопротивле  $F_i^{neb}$  материалов. Для выявления этих сил использу  $\sigma_v > s_v > mod$  *сечений*: мысленно рассечем брус плоскостью и рассмотрим одну его  $\rho$  :ть, например левую (рис. 1.3).  $\Delta F$ 

 $\tau_{v}$ 



Рис. 1.3

В сечении левой части возьмем произвольную точку O, в окрестности которой выделим малую площадку dA, на которую действует малая сила  $\Delta F$  как результат действия отброшенной правой части.

Отношение  $\frac{\Delta F}{dA} = \rho_{cp}$  – среднее *напряжение* на площадке dA. Величина  $\lim_{dA \to 0} \frac{\Delta F}{dA} = \rho$  – полное напряжение в т. *O*, имеет размерность H/м<sup>2</sup> и физический смысл – интенсивность давления (поверхностная нагрузка).

В т. *О* проведем к сечению орт нормали v (ню). Обычно направления векторов  $\rho$  и  $\nu$  не совпадают. Поэтому полное напряжение  $\rho$  можно разложить на две составляющие (компоненты):  $\sigma_{\nu}$  – нормальное напряжение и  $\tau_{\nu}$  – касательное напряжение, действующее в плоскости сечения ( $\sigma$  – сигма,  $\tau$  – тау). Очевидно, что  $\rho = \mathbf{b}_{\nu} + \mathbf{\tau}_{\nu}$  геометрическая сумма векторов или в скалярном виде  $p^2 = \sigma_{\nu}^2 + \tau_{\nu}^2$ .

Пусть брус рассечен плоскостью, перпендикулярной к оси бруса, т.е. сечение левой части является поперечным (рис. 1.4). В т. O введем правые оси *охуг* и т.к. сечение бруса поперечное, то ось *z* совпадает с нормалью v. А оси *x* и *y* будут расположены в сечении бруса.

В этом случае нормальное напряжение  $\sigma_v$  можно обозначить  $\sigma_z = \sigma_v - нормальное$  напряжение вдоль оси z. Касательное напряжение  $\tau_v$  можно разложить на составляющие по осям x и y, т.е.

$$\mathbf{\tau}_{v} = \mathbf{\tau}_{xz} + \mathbf{\tau}_{yz}$$
или  $\tau_{v}^{2} = \tau_{xz}^{2} + \tau_{yz}^{2}$ .

Обозначение напряжений: нормальные напряжения обозначаются  $\sigma$ , индекс определяет его направление по осям; касательные напряжения обозначаются  $\tau$  с двумя индексами: первый определяет его направление, а второй – площадку, в которой он действует. Например:  $\tau_{yz}$  – касательное напряжение, действует в направлении у на площадке перпендикулярной оси z.



Т.к. оси *хуг* декартовые, то очевидно:

$$\rho = \sigma_z + \tau_{xz} + \tau_{yz}$$
 или  $\rho^2 = \sigma_z^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$  (1.1)

Для определения знаков всех напряжений введем следующие правила:

- 1. Вводим для бруса правые оси хуг.
- Рассекаем брус плоскостью перпендикулярной к оси z. К сечениям левой и правой частей проводим внешние (т.е. наружу) орты нормалей v. Площадка сечений считается положительной, если внешняя нормаль v совпадает с направлением оси z (т.е. сечение левой части положительно, а сечение правой части – отрицательная площадка).
- На положительной площадке положительные напряжения совпадают с положительными направлениями осей x, y, z. На отрицательной площадке – положительные напряжения направлены против осей x, y, z (это соответствует III закону Ньютона – действие и противодействие).

Итак: на рис. 1.4 сечение левой части – положительная площадка и все показанные напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  – положительны.

#### Напряжения в декартовой системе координат

Выделим из трехмерного тела малый прямоугольный элемент (кубик) с ребрами параллельными осям координат *хуz* (рис. 1.5а). Согласно введенному выше правилу видимые площадки кубика положительные (внешние нормали к ним совпадают с направлениями осей *x*, *y*, *z*), а невидимые площадки – отрицательны. На положительных площадках со стороны отброшенных частей тела действуют полные напряжения  $\rho_x$ ,  $\rho_y$ ,  $\rho_z$ , а на отрицательных площадках – противоположно направленные  $-\rho_x$ ,  $-\rho_y$ ,  $-\rho_z$ . Каждое это полное напряжение можно разложить на компоненты по осям *x*, *y*, *z* по аналогии с разложениями (1.1).



Рис. 1.5

 $\boldsymbol{\rho}_{x} = \boldsymbol{\sigma}_{x} + \boldsymbol{\tau}_{zx} + \boldsymbol{\tau}_{yx}, \quad \boldsymbol{\rho}_{y} = \boldsymbol{\sigma}_{y} + \boldsymbol{\tau}_{xy} + \boldsymbol{\tau}_{zy}, \quad \boldsymbol{\rho}_{z} = \boldsymbol{\sigma}_{z} + \boldsymbol{\tau}_{xz} + \boldsymbol{\tau}_{yz}. \Pi \boldsymbol{\sigma}_{zz}$ 

ложительные направления всех компонент на положительных (видимых) площадках показаны на рис. 1.5в. Аналогичные напряжения действуют и на отрицательных (невидимых) площадках, но противоположно направленные (на рис. 1.5 не показаны).

Итак, в самом общем случае нагружения трехмерного тела в нем могут появиться девять компонент напряженного состояния, которые в декартовых осях можно записать в виде тензора напряжений  $T_{\sigma}$ 

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{vmatrix}$$
(1.2)

#### Закон парности касательных напряжений

Рассмотрим равновесие малого прямоугольного элемента с ребрами длиной dx, dy и dz вырезанного из тела. По всем его площадкам действуют напряжения, показанные на рис. 1.5в. Рассмотрим моментное уравнение равновесия элемента относительно оси  $x_1$ , проходящей через центр тяжести площадки, перпендикулярной к оси x, т.е.  $\sum \text{mom}_{x1} = 0$ . При этом оставим на рис. 1.6 только те напряжения, которые дают такие моменты. На невидимых (отрицательных) площадках действуют сами напряжения  $\tau_{zy}$  и  $\tau_{yz}$ , а на видимых (положительных) – напряжения с малыми приращениями по соответствующей координате, т. е.  $\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy$  и  $\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz$ . Напряжения умножаем на площадки, где они действуют (получим силы на них) и составим  $\sum \text{mom}_{x1} = 0$ . (ось  $x_1$  на рис. 1.6 показана как точка  $x_1$ )



Рис. 1.6

$$\sum \operatorname{mom}_{x1} = 0. \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy \right) dz dx \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{zy} \cdot dz dx \frac{dy}{2} - \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \right) dy dx \frac{dz}{2} - \tau_{yz} dy dx \frac{dz}{2} = 0.$$
(1)

Ввиду малости размеров *dy* и *dz*, приращения напряжений можно считать малыми по сравнению с основны-

ми напряжениями  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zy}$  и их не учитывать. Сокращая в (1) на dxdydz окончательно получим

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Аналогично, оставив моментные уравнения равновесия относительно осей  $y_1$  и  $z_1$ , проходящие через центр кубика, окончательно получим:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \ \tau_{xy} = \tau_{yx}, \ \tau_{xz} = \tau_{zx}$$
 (1.3)

Эти соотношения и есть закон парности касательных напряжений: на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения, перпендикулярные к линии пересечения этих площадок, равны между собой. Поэтому тензор напряжений  $T_{\sigma}$  (1.2) из девяти величин содержит только шесть независимых величин.

#### Понятия о перемещениях и деформациях

Под действием нагрузки тело деформируется, т.е. изменяются его форма и размеры. Отметим в теле до его нагружения точку «*К*» (рис. 1.7).



После нагружения тела эта точка переместиться в пространстве и займет положение  $K_1$ . Отрезок  $\overline{KK_1}$ называют *полным перемещением*. Его можно разложить на компоненты по осям x, y, z, т.е.  $KK_1 = U + V + W$ . Здесь U – перемещение точки тела вдоль оси x, V – перемещение вдоль оси y, W – вдоль оси z. Каждая точка тела перемещается по-своему, поэтому компоненты перемещения точки явля-

ются функциями ее координат, т.е. U = U(x, y, z), V = V(x, y, z), W = W(x, y, z).

Мысленно через т. K проведем малые отрезки KB и KC, параллельные осям y и z. После нагружения тела эти отрезки займут положение  $K_1B_1$  и  $K_1C_1$ . Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  малы при допустимых нагрузках. Величина

 $\lim_{KB\to 0} \frac{K_1 B_1 - KB}{KB} = \varepsilon_y$  называется относительной линейной деформацией вдоль оси у в т. К.

Аналогично имеют место и относительные линейные деформации вдоль оси  $x - \varepsilon_x$ , оси  $z - \varepsilon_z$  ( $\varepsilon$  – эпсилон).  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  положительны при деформациях удлинения (растяжения). Они безразмерны.

В процессе деформации тела первоначально прямой угол *BKC* изменяется на величину  $\alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_{yz} - \partial e \phi o p Mau u c d b u c b n n o c k c c m y z. Аналогично могут возникнуть <math>\gamma_{xy}$  и  $\gamma_{xz}$  – деформации с в п n o c k c c m y z. Они измеряются в радианах. Деформации с в п n o c k c c m n e p b o h a v n m p m o m y c n c t a h o b u c d b u c n o n o k w t e n n o c k c m n e p b o h a v n m p m o m y c n c t a h o b u c d

$$T_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{x} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{y} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{z} \end{vmatrix}$$
(1.4)

#### Внутренние силы и моменты в брусе

Для определения внутренних силовых факторов в сечениях бруса, которые возникают от внешней нагрузки на брус  $F_i$ , можно использовать также метод сечений, описанный выше и показанный на рис. 1.3. В каждой точке сечения левой части бруса действует полное напряжение  $\rho$ . Разобьем все сечение левой части «*A*» на большое число малых площадок  $\Delta A$ ,  $A = \sum \Delta A$ . Систему малых сил  $\rho \cdot \Delta A$  по всему сечению бруса можно перенести в произвольную точку «*O*» сечения. При этом в т. *O* получим главный вектор силы  $\overline{R}_o$  и главный вектор момента  $\overline{M}_o$ , которые являются результатом действия отброшенной правой части.

Брус до рассечения находился в равновесии, поэтому левая часть должна находиться в равновесии под действием внешних сил  $\mathbf{F}_{i}^{\text{лев}}$ ,  $\mathbf{R}_{o}$  и  $\mathbf{M}_{o}$ . Следовательно, должны выполняться векторные уравнения равновесия

$$\sum \mathbf{F}_{i}^{\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{B}} + \mathbf{R}_{O} = 0. \quad \sum mom_{O} \left( F_{i}^{\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{B}} \right) + \mathbf{M}_{O} = 0. \tag{A}$$

Пусть брус рассечен плоскостью, перпендикулярной к его оси, т.е. сечение левой части поперечное. За т. O примем центр тяжести сечения и построим правую систему координат *охуг*, ось *z* перпендикулярна к сечению, а оси *x* и *y* лежат в плоскости сечения левой части бруса (рис. 1.8).

Главный вектор  $\mathbf{R}_{o}$  и главный момент  $\mathbf{M}_{o}$  можно разложить на компоненты по осям *хуz* :



Рис. 1.8

 $\mathbf{R}_{o} = \mathbf{Q}_{x} + \mathbf{Q}_{y} + \mathbf{N}_{z}$  $\mathbf{M}_{o} = \mathbf{M}_{x} + \mathbf{M}_{y} + \mathbf{M}_{z}$ (B)

Здесь: N<sub>z</sub> – внутренняя продольная сила, вызывает растяжение или сжатие бруса;  $Q_{\rm r}$ И  $Q_v$  – поперечные внутренние силы. вызывают деформации сдвига; *M<sub>x</sub>*, *M<sub>v</sub>* – внутренние изгибающие моменты;  $M_z$  – внутренний скручи-

вающий момент в брусе. Положительные направления всех внутренних силовых факторов в сечении левой части бруса показаны на рис. 1.8:  $N_z, Q_x, Q_y$  – положительны, если направлены вдоль осей x, y, z;  $M_x, M_y, M_z$  – положительны, если направления этих моментов с концов соответствующих осей видны против хода часовой стрелки.

Векторные уравнения (А) с учетом разложений (В) можно записать в виде обычных шести уравнений статики для левой части бруса

$$\begin{split} &\sum F_x = 0 \ Q_x + \sum F_{ix}^{\text{neB}} = 0, \qquad \sum \text{mom}_x = 0. \ M_x + \sum \text{mom}_x \left(F_i^{\text{neB}}\right) = 0, \\ &\sum F_y = 0 \ Q_y + \sum F_{iy}^{\text{neB}} = 0, \qquad \sum \text{mom}_y = 0. \ M_y + \sum \text{mom}_y \left(F_i^{\text{neB}}\right) = 0, \\ &\sum F_z = 0 \ N_z + \sum F_{iz}^{\text{neB}} = 0, \qquad \sum \text{mom}_z = 0. \ M_z + \sum \text{mom}_z \left(F_i^{\text{neB}}\right) = 0. \end{split}$$

Здесь, например,  $F_{ix}^{\text{лев}}$  – компоненты в направлении оси x внешних сил  $F_i^{\text{лев}}$ , действующих на левую часть бруса;  $\text{mom}_x(F_i^{\text{лев}})$  – моменты относительно оси x сил  $F_i^{\text{лев}}$  действующих на левую часть. Ввиду равновесия бруса в целом, по III закону Ньютона

$$\Sigma F_i^{\text{neb}} = -\Sigma F_i^{\text{npab}}, \quad \Sigma \operatorname{mom}(F_i^{\text{neb}}) = -\Sigma \operatorname{mom}(F_i^{\text{npab}})$$

С учетом этого уравнения (Г) можно записать через нагрузки на правую отсеченную часть бруса

$$Q_{x} - \sum F_{ix}^{\Pi \text{pab}} = 0, \quad M_{x} - \sum \max_{x} \left( F_{i}^{\Pi \text{pab}} \right) = 0,$$

$$Q_{y} - \sum F_{iy}^{\Pi \text{pab}} = 0, \quad M_{y} - \sum \max_{y} \left( F_{i}^{\Pi \text{pab}} \right) = 0,$$

$$M_{z} - \sum F_{iz}^{\Pi \text{pab}} = 0, \quad M_{z} - \sum \max_{z} \left( F_{i}^{\Pi \text{pab}} \right) = 0.$$
(Д)

Из соотношений (Г) и (Д) следуют общие формулы для определения внутренних силовых факторов в сечении левой части бруса через внешние нагрузки на левую или правую части бруса

$$Q_{x} = -\sum F_{ix}^{\text{neb}} = \sum F_{ix}^{\text{npab}},$$

$$Q_{y} = -\sum F_{iy}^{\text{neb}} = \sum F_{iy}^{\text{npab}},$$

$$N_{z} = -\sum F_{iz}^{\text{neb}} = \sum F_{iz}^{\text{npab}},$$

$$M_{x} = -\sum \operatorname{mom}_{x} \left(F_{i}^{\text{neb}}\right) = \sum \operatorname{mom}_{x} \left(F_{i}^{\text{npab}}\right),$$

$$M_{y} = -\sum \operatorname{mom}_{y} \left(F_{i}^{\text{neb}}\right) = \sum \operatorname{mom}_{y} \left(F_{i}^{\text{npab}}\right),$$

$$M_{z} = -\sum \operatorname{mom}_{z} \left(F_{i}^{\text{neb}}\right) = \sum \operatorname{mom}_{z} \left(F_{i}^{\text{npab}}\right),$$

$$M_{z} = -\sum \operatorname{mom}_{z} \left(F_{i}^{\text{neb}}\right) = \sum \operatorname{mom}_{z} \left(F_{i}^{\text{npab}}\right),$$

Внешние силы (на левой и правой частях бруса) положительны, если направлены вдоль осей. Внешние моменты (от нагрузок на левую и правую части бруса) положительны, если направление этих моментов с концов соответствующих осей видны против хода часовой стрелки. Внутренние силовые факторы, действующие в сечении правой части бруса, равны по величине и противоположны по направлению действующим в сечении левой части (по III закону Ньютона).

<u>Примечание</u>: При вычислении внутренних силовых факторов по (1.5) нельзя заменять систему сил по разные стороны от сечения их равнодействующей, силу нельзя переносить вдоль линии ее действия из одной части бруса в другую.

#### <u>Зависимость между напряжениями и</u> <u>внутренними силовыми факторами</u>

Внутренние силовые факторы в сечении бруса:  $N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y$  и  $M_z$  есть равнодействующие внутренних напряжений  $\sigma_x, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ , распределенных по сечению бруса. Поэтому, они связаны определенными зависимостями, которые легко установить из рис. 1.9, на котором показаны



в сечении левой части бруса все положительные внутренние силовые факторы и все положительные внутренние напряжения, действующие на малой площадке dA с положительными координатами х и у. Умножаем напряжения на площадку dA, полученные моменты ОТ них силы И относительно осей x, y, z, суммируем по всей площади А

сечения (т.е. интегрируем по A), получим:

$$N_{z} = \iint_{A} \sigma_{z} dA, \quad Q_{y} = \iint_{A} \tau_{yz} dA, \quad Q_{x} = \iint_{A} \tau_{xz} dA,$$
$$M_{x} = \iint_{A} \sigma_{z} \cdot y \cdot dA, \quad M_{y} = -\iint_{A} \sigma_{z} \cdot x \cdot dA, \quad M_{z} = \iint_{A} (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA$$
(1.6)

Рассмотрим прямой брус, нагруженный положительными погонными нагрузками  $q_x, q_y, q_z$ , погонными моментами  $m_x, m_y, m_z$ , некоторым набором сосредоточенных сил  $F_i$  и сосредоточенными изгибающими и скручивающими моментами, т.е. брус произвольно нагружен.

Все эти нагрузки считаем приложенными к оси бруса. На участке бруса без сосредоточенных сил и моментов выделим поперечными сечениями *a-a* и *в-в* участок малой длины dz. Этот участок нагружен положительными  $q_x, q_y, q_z, m_x, m_y, m_z$ , а по торцам положительными внутренними силовыми факторами (рис.1.10). В сечении *a-a* (торец правой отсеченной части, его площадка отрицательна) действуют  $N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ . Они направлены противоположно, чем положительные внутренние силовые факторы на торце левой отсеченной части, показанные на рис. 1.8. В сечении *в-в* ((торец левой отсеченной части) действуют ранее установленные положительные внутренние силовые факторы с приращениями на участке dz (рис. 1.10). Точки  $a_1$  и  $b_1$  в сечении бруса *условно* смещены влево и вправо (чтобы рис. 1.10 не перегрузился обозначениями силовых факторов).



Рис. 1.10

Под действием всех указанных силовых факторов (внешних и внутренних) рассматриваемый элемент бруса, как вырезанный из целого бруса, должен находится в равновесии. Составим шесть уравнений равновесия (погонные нагрузки умножаем на *dz*):

1) 
$$\sum F_x = 0$$
.  $\left(Q_x + \frac{dQ_x}{dz}dz\right) - Q_x + q_x dz = 0$ . Отсюда  $\frac{dQ_x}{dz} = -q_x$ 

2) 
$$\sum F_y = 0.$$
  $\left(Q_y + \frac{dQ_y}{dz}dz\right) - Q_y + q_y dz = 0.$  Отсюда  $\frac{dQ_y}{dz} = -q_y$   
3)  $\sum F_z = 0.$   $\left(N_z + \frac{dN_z}{dz}dz\right) - N_z + q_z dz = 0.$  Отсюда  $\frac{dN_z}{dz} = -q_z$ 

Моментные уравнения равновесия запишем относительно осей  $e_1 xyz$ , проходящих через т.  $e_1$  сечения *e*-*e*.

4) 
$$\sum \text{mom}_x = 0.\left(M_x + \frac{dM_x}{dz}dz\right) - M_x + m_x dz - Q_y dz + q_y dz \frac{dz}{2} = 0$$

Отсюда  $\frac{dM_x}{dz} = Q_y - m_x$ . Здесь, ввиду малости dz, последнее слагаемое отброшено как величина значительно меньше, чем другие слагаемые.

5) 
$$\sum \text{mom}_y = 0. \left( M_y + \frac{dM_y}{dz} dz \right) - M_y + m_y dz + Q_x dz - q_x dz \frac{dz}{2} = 0$$
  
Отсюда  $\frac{dM_y}{dz} = -Q_x - m_y.$ 

6) 
$$\sum \text{mom}_z = 0. \left( M_z + \frac{dM_z}{dz} dz \right) - M_z + m_z dz = 0.$$

Отсюда  $\frac{dM_z}{dz} = -m_z$ .

Итак, получим шесть зависимостей:

$$1) \frac{dQ_x}{dz} = -q_x \quad 4) \frac{dM_x}{dz} = Q_y - m_x$$

$$2) \frac{dQ_y}{dz} = -q_y \quad 5) \frac{dM_y}{dz} = -Q_x - m_y \quad (1.7)$$

$$3) \frac{dN_z}{dz} = -q_z \quad 6) \frac{dM_z}{dz} = -m_z$$

Эти зависимости играют важную роль при изучении «Сопротивления материалов». Их можно использовать для проверки правильности определения внутренних силовых факторов в сечении брусьев.

### РАЗДЕЛ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения. На практике легко убедиться, что сопротивление прямых стержней при растяжении (сжатии) пропорционально площади поперечного сечения.

При расчетах же на изгиб, кручение, сложное сопротивление, при расчетах на устойчивость используются более сложные геометрические характеристики сечений. Знание только площади поперечного сечения стержня при этих видах деформации недостаточно. В этом нетрудно убедиться на практике. На рис. 2.1 видно, что при одной и той же площади в зависимости от ориентировки поперечного сечения, стержень по разному сопротивляется действию одной и той же поперечной силы ( $f_2 > f_1$ ).



Рис. 2.1

К более сложным геометричесхарактеристикам ким сечения относятся: статический момент, осевой, полярный и центробежный Эти инерции. моменты геометрические характеристики зависят ОТ формы, размеров сечения, от положения осей и точек (полюсов), относительно которых они вычисляются.

Статическим моментом сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади А сумма произведений

элементарных площадок dA на их расстояния до этой оси, т.е.

 $S_x = \iint y dA;$ 



Рис. 2.2

$$S_y = \iint_A x dA \tag{2.1}$$

Статические моменты выражаются в см<sup>3</sup>, м<sup>3</sup> и т.д.

Из теоретической механики известно, что координаты центра тяжести фигуры определяются по формулам:

$$x_0 = \frac{\iint x dA}{A}; \quad y_0 = \frac{\iint y dA}{A} \quad (2.2)$$

Поэтому

$$S_x = y_o \cdot A; \qquad S_v = x_o \cdot A \tag{2.3}$$

Из выражения (2.3) видно, что статические моменты фигуры относительно осей, проходящих через центр тяжести этой фигуры, равны нулю. Оси координат, проходящие через центр тяжести фигуры называются *центральными осями*.

Осевым (или экваториальным) моментом инерции сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади А сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний от этой оси, т.е.

$$J_x = \iint_A y^2 dA; \qquad J_y = \iint_A x^2 dA \tag{2.4}$$

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей его площади А сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний от этой точки, m.e.

$$J_{\rho} = \iint_{A} \rho^2 dA \tag{2.5}$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей называется взятая по всей его площади А сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояния от этих осей, т.е.

$$J_{xy} = \iint_{A} x \cdot y \cdot dA \tag{2.6}$$

Моменты инерции имеют размерность см<sup>4</sup>, м<sup>4</sup> и т.д.

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, т.к. под интегралом координаты x, y и  $\rho$  берутся в квадратах. Полярный момент инерции

$$J_{\rho} = \iint_{A} \rho^{2} dA = \iint_{A} (x^{2} + y^{2}) dA = J_{x} + J_{y}, \qquad (2.7)$$

равен сумме двух осевых моментов инерции.

Здесь  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , что следует из рис. 2.2.



Если через какую-либо т.О фигуры (рис. 2.3) провести две системы прямоугольных координат xOy и  $x_1Oy_1$  и определить моменты инерции относительно ЭТИХ осей, то получим равенство

$$J_x + J_y = J_{x1} + J_{x2} = \text{const}$$
 (2.8)

Это равенство следует из того, что каждая из указанных сумм порознь равна полярному моменту относительно т.*O*.

Рис. 2.3

Центробежный момент инерции берется относительно двух осей. Он может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Случай, когда центробежный момент инерции равен нулю, заслуживает особого изучения и будет рассмотрен ниже.



Известно, что интеграл по площади равен сумме интегралов, взятых по отдельным частям, составляющим эту площадь.

Поэтому при вычислении моментов инерции (и статических моментов) сложной фигуры относительно какой-либо оси, можно последнюю разбить на ряд простых фигур (рис. 2.4) и для каждой из них вычислить момент инерции относительно этой оси. Тогда момент

инерции всей фигуры определиться как сумма моментов инерции составных частей:

$$J_x = J_x^{(A_1)} + J_x^{(A_2)} + J_x^{(A_3)}$$

Аналогично

$$S_x = S_x^{(A_1)} + S_x^{(A_2)} + S_x^{(A_3)}$$

<u>Замечание:</u> Нельзя суммировать моменты инерции, вычисленные относительно различных осей и точек.

#### <u>Зависимость между моментами инерции относительно</u> параллельных осей





Предположим (рис. 2.5), что площадь фигуры и моменты инерции относительно осей Ox и Oy <u>заданы</u>. Определим моменты инерции относительно новых осей  $O_1x_1$ и  $O_1y_1$ , параллельных заданным.

Из рис.2.5 устанавливаем зависимость между координа-тами:

$$y_1 = y + a, x_1 = x + b$$

Пользуясь общей формулой для осевых моментов инерции:

$$J_{x1} = \iint_{A} y_1^2 dA = \iint_{A} (y+a)^2 dA = \iint_{A} y^2 dA + 2a \iint_{A} y dA + a^2 \iint_{A} dA = J_x + 2aS_x + a^2A.$$

аналогично  $J_{y1} = J_y + 2bS_y + b^2A$ .

Для центробежного момента инерции имеем

$$J_{x1y1} = \iint_{A} y_1 x_1 dA = \iint_{A} (y+a)(x+b) dA = \iint_{A} xy dA + a \iint_{A} dA + a \iint_{A} x dA + b \iint_{A} y dA = J_{xy} + ab \cdot A + aS_y + bS_x.$$

Если оси Ox и Oy центральные, то статические моменты относительно них равны нулю ( $S_x = 0, S_y = 0$ ). Тогда формулы для моментов инерции относительно осей, параллельных центральным, примут вид:

$$J_{x1} = J_x + a^2 A;$$
  

$$J_{y1} = J_y + b^2 A;$$
  

$$J_{x1y1} = J_{xy} + abA.$$
(2.9)

Формулы (2.9) часто применяют для вычисления моментов инерции сложных фигур.

Складывая первые два выражения равенств (2.9) и учитывая, что  $J_{\rho 1} = J_{x1} + J_{y1}$ , получим формулу для полярного момента инерции

$$J_{\rho 1} = J_{\rho} + (a^2 + b^2)A$$

Если <u>заданными</u> являются моменты инерции относительно произвольных осей, то для центральных осей, параллельных данным осям, путем решения уравнений (2.9) относительно  $J_x, J_y$  и  $J_{xy}$  получим следующие выражения:

$$J_{x} = J_{x1} - a^{2}A;$$
  

$$J_{y} = J_{y1} - b^{2}A;$$
  

$$J_{xy} = J_{x1y1} - abA$$
(2.10)

Из этих формул видно, что моменты инерции относительно центральных осей имеют наименьшие значения по сравнению с моментами инерции относительно любых других параллельных осей.



Зависимость между моментами инерции при повороте осей

Пусть моменты инерции сечения относительно осей Ox и Oy заданы. Найдем моменты инерции для осей Ou и Ov, повернутых относительно исходной системы осей на угол  $\alpha$ (рис. 2.6).

Выберем произвольную площадку *dA* вокруг т. *К* и выразим ее координаты в

новых осях через координаты в старых осях, угол  $\alpha > 0$  при повороте осей против часовой стрелки:

$$u = OE + EC = OE + BD = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha;$$

 $v = KD - DC = KD - BE = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$ .

Найдем момент инерции относительно оси Ои:

$$J_{u} = \iint_{A} v^{2} dA = \iint_{A} (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^{2} dA =$$
$$= \cos^{2} \alpha \iint_{A} y^{2} dA + \sin^{2} \alpha \iint_{A} x^{2} dA - 2\cos \alpha \cdot \sin \alpha \iint_{A} x \cdot y \cdot dA.$$

Учитывая,

$$\iint_{A} y^{2} dA = J_{x}, \quad \iint_{A} x^{2} dA = J_{y}, \quad \iint_{A} x \cdot y dA = J_{xy}, \quad 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

Окончательно получим

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \qquad (2.11)$$

Аналогично можно установить, что

$$J_v = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \qquad (2.11a)$$

Для центробежного момента инерции получим

$$J_{uv} = \iint_{A} uv dA = \iint_{A} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) (y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA =$$
  
=  $\sin \alpha \cos \alpha \iint_{A} y^2 dA - \sin \alpha \cos \alpha \iint_{A} x^2 dA + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \iint_{A} xy dA$ 

Учитывая, что  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  и  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ , получим

$$J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$
 (2.12)

Сложим выражения (2.11) и (2.11а), получим  $J_u + J_v = J_x + J_v$ 

Сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей у и х не меняются при их повороте. Это показано и соотношением (2.8).

#### <u>Главные оси инерции и главные моменты инерции</u>

В предыдущем разделе было показано, что величины моментов инерции *меняются при повороте осей*. Можно найти такое значение угла  $\alpha = \alpha_0$ , при котором момент инерции достигает экстремального значения. Для определения экстремума приравняем нулю первую производную от (2.11) и положим  $\alpha = \alpha_0$ :

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -2J_x \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2J_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2J_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

ИЛИ

$$(J_x - J_y)\sin 2\alpha_0 + 2J_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0$$

откуда

что

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$
(2.13)

Полученная формула дает для угла  $\alpha_0$  два значения, отличающиеся на 90°. Следовательно, существует две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых моменты инерции имеют экстремальные значения. Такие оси называют *главными осями инерции*, их будем обозначать  $x_0$  и  $y_0$ , а моменты относительно этих осей – *главные моменты инерции*.

<u>При положительном значении угла  $\alpha_0$ </u>, для определения по нему положения одной из главных осей инерции, ось х следует повернуть на угол  $\alpha_0$  против вращения часовой стрелки.



Рис. 2.7

Одна из главных осей инерции является *осью максимум* (относительно нее осевой момент инерции сечения максимален), а другая – *осью минимум*.

Ось максимум всегда составляет меньший угол с той

из осей (х или у), относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение (рис. 2.7).

Для отыскания главных моментов инерции есть два способа.

**I способ**: По формулам из тригонометрии используя выражения (2.11) и (2.13), после некоторых преобразований, найдем

$$J_{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}$$
(2.14)

**II способ**: Вычислим по (2.13) угол  $\alpha_0$  и с учетом его знака проводим главные оси  $OX_0$  и  $OY_0$ . В формулы (2.11) и (2.11а) подставляем  $\alpha = \alpha_0$  и вычисляем  $J_u = J_{x0}$  и  $J_v = J_{y0}$ . По числовым значениям  $J_{x0}$  и  $J_{y0}$  сразу видно, какая ось максимум, а какая минимум. Полученные так  $J_{x0}$  и  $J_{y0}$  численно равны  $J_{\text{max}}$  и  $J_{\text{min}}$ , определяемым по формуле (2.14).

Интересно отметить, что центробежный момент инерции относительно главных осей инерции равен нулю. Для этого в формулу (2.12) вместо  $\sin 2\alpha$  подставим значение  $\sin 2\alpha_0$ , определяемого из формулы (2.13) и т.к.

$$tg2\alpha_{0} = \frac{\sin 2\alpha_{0}}{\cos 2\alpha_{0}};$$
  
$$J_{x_{0}y_{0}} = \frac{J_{x} - J_{y}}{2} \left( -\frac{2J_{xy}}{J_{x} - J_{y}} \cos 2\alpha_{0} \right) + J_{xy} \cos 2\alpha_{0} \equiv 0.$$

Условие равенства нулю центробежного момента инерции часто используют для определения положения главных осей инерции – если одна из осей фигуры совпадает с осью симметрии этой фигуры, то эти оси будут главные, т.к. центробежный момент относительно таких осей равен нулю.

Таким образом, для симметричных фигур главные оси устанавливаются без вычислений.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются <u>главными центральными осями.</u>

#### <u>Эллипс инерции</u>

Введем новую геометрическую характеристику, которую назовем радиусом инерции.

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} \tag{2.15}$$

Предположим, что для какой-либо фигуры оси  $Ox_0$  и  $Oy_0$  являются главными центральными осями. Запишем выражение момента инерции относительно оси OU, наклонной к оси  $Ox_0$  на угол  $\alpha$ . На основании (2.11) получим

$$J_u = J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha$$
, т.к.  $J_{x_0 y_0} \equiv 0$ .

Разделив все на А, получим

$$i_u^2 = i_{x_0}^2 \cos^2 \alpha + i_{y_0}^2 \sin^2 \alpha$$
 (2.16)

Построим в осях  $x_0Oy_0$ эллипс, взяв за полуоси радиусы инерции фигуры (рис. 2.8). При этом вдоль оси  $Ox_0$  отложим радиус  $i_{y_0}$ , а на оси  $Oy_0$  - радиус  $i_{x_0}$ .

Данный эллипс называется эллипсом инерции.

Проведем касательную к эллипсу, параллельную оси *OU*. Можно показать, что расстояние между касательной и осью *OU*,

обозначенное на рис. 2.8 величиной *h* равно:

$$h^{2} = i_{x_{0}}^{2} \cos^{2} \alpha + i_{y_{0}}^{2} \sin^{2} \alpha$$
(2.17)

Сравнивая полученную зависимость с выражением (2.16) видим, что величина h численно равна радиусу инерции относительно наклонной оси OU. Установленное свойство эллипса инерции позволяет графически определить момент инерции относительно любой оси, проходящей через начало координат. Для этого достаточно провести касательную к эллипсу параллельно этой оси и замерить кратчайшее расстояние между касательной и осью. Это расстояние h будет равно радиусу инерции для рассматриваемой оси. Момент инерции определяется так:

$$J_u = h^2 \cdot A$$



#### 1. Прямоугольное сечение



 $J_{x_0} = \iint_A y_0^2 dA, \qquad dA = b dy_0,$  $J_{x_0} = b \int_{-h/2}^{h/2} y_0^2 dy_0 = \frac{bh^3}{12}.$ Аналогично  $J_{y_0} = \frac{hb^3}{12}$ .  $J_{x_0y_0} = 0$ , т.к. оси  $Ox_0y_0$  – главные центральные оси,  $Ox_0$  и  $Oy_0$  – оси симметрии сечения

2. Равнобедренный треугольник



$$J_{x_0} = \iint_A y_0^2 dA, \quad dA = b_{y_0} d_{y_0},$$
из

$$\frac{by_0}{b} = \frac{\frac{2}{3}h - y_0}{h}, \quad by_0 = \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h - y_0\right)$$
$$J_{x_0} = \int_{-h/3}^{2/3h} y_0^2 \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h - y_0\right) dy_0 =$$
$$= \frac{b}{h} \int_{-h/3}^{2/3h} \left(\frac{2}{3}hy_0^2 - y_0^3\right) dy_0$$

Окончательно  $J_{x_0} = \frac{bh^3}{36}$ . Аналогично  $J_{y_0} = \frac{hb^3}{48}$ .  $J_{x_0y_0} \equiv 0$ , т.к. оси  $Ox_0y_0$  – главные центральные,

ось  $y_0$  – ось симметрии сечения.



$$J_{x} = \frac{bh^{3}}{36}; J_{y} = \frac{hb^{3}}{36}; J_{xy} = -\frac{b^{2}h^{2}}{72},$$
  

$$tg2\alpha_{0} = \frac{2J_{xy}}{J_{y} - J_{x}} = \frac{bh}{h^{2} - b^{2}}$$
  

$$J_{\max} = \frac{bh}{72} \left(b^{2} + h^{2} \pm \sqrt{b^{4} - b^{2}h^{2} + h^{4}}\right) - \frac{bh}{2}$$

главные моменты инерции относительно осей  $Ox_0$  и  $Oy_0$ 

#### 4. Круглое сечение



## РАЗДЕЛ 3. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Центральным растяжением (сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только продольная сила  $N_z$ .

Растяжение (сжатие) часто встречается в элементах строительных конструкций и машин. Например, растяжение возникает в тросе подъемника, сжатие – в фабричной трубе от собственного веса, в колоннах и т.д.

Для центрального растяжения (сжатия) внешние силы, приложенные к концевым или промежуточным сечениям стержня, должны быть направлены по его оси или приводиться к равнодействующей, направленной по этой оси (рис. 3.1a).

Для определения продольных сил применяется <u>метод сечений</u>. При этом стержень мысленно рассекается плоскостью, перпендикулярной оси стержня, на две части. Взаимодействие частей между собой заменяется продольной силой  $N_z$  и из условия равновесия ( $\Sigma z = 0$ ) отсеченной части определяется значение этой силы (рис. 3.1 б-г).



Рис.3.1

Условимся силу  $N_z$  считать положительной, если она вызывает растяжение (направлена от сечения) и отрицательной, если вызывает сжатие (направлена к сечению). В тех случаях, когда направление силы  $N_z$  неизвестно, целесообразно принять ее положительной. Если из условия равновесия сила  $N_z$  получиться со знаком (+), то стержень в данном сечении растянут, если со знаком (-), то – сжат.

В сложных случаях нагружения стержня целесообразно строить эпюру внутренних сил. Эпюрой продольной силы  $N_z$  называется график, каждая

ордината которого равна значению продольной силы в данном сечении. Этот график показывает изменение продольных сил по длине оси бруса. Для этого проводим базисную линию, параллельную оси стержня (рис. 3.1д), и перпендикулярно к ней отложим отрезки, изображающие в некотором масштабе величины продольных сил  $N_z$  в поперечных сечениях бруса.

Очевидно, что на всем участке длиной  $l_1$  (между точками приложения сил  $F_1$  и  $F_2$ ) продольная сила постоянна и равна  $F_1$ ; аналогично и на других участках (между сечениями, в которых приложены внешние силы), продольные силы имеют постоянное значение.

В поперечных сечениях, в которых к брусу приложены сосредоточенные продольные силы, значение продольной силы  $N_z$  изменяется <u>скачкообразно</u> на величину продольной силы.

При действии на брус внешней распределенной осевой нагрузки  $q_z = f(z)$  продольные силы  $N_z$  на участке, на котором такая нагрузка приложена, изменяются непрерывно (рис. 3.2).



Рис.3.2

Природа внешней распределенной осевой нагрузки может быть различной. Обычно это собственный вес или инерционные силы.

Для решения этой задачи рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента, вырезанного двумя сечениями, расположенными друг от друга на расстоянии *dS* (рис. 3.26). К нижнему сечению вырезанного элемента приложим внутрен-

нюю силу  $N_z$ , а к верхнему – силу  $N_z + dN_z$ . Из условия равновесия этого элемента находим  $N_z + q_z dS - N_z - dN_z = 0$ . Отсюда следует

$$N_z = \int_0^S q_z dS, \tag{3.1}$$

т.е. величина нормальной силы в произвольном сечении равна сумме проекций на ось стержня всех внешних сил (интегралу), приложенных к отсеченной части.

На рис. 3.2 в показана эпюра  $N_z$  для бруса (рис. 3.2а) при  $q_z = \text{const}$ .

Все вышесказанные правила построения эпюр  $N_z$  можно свести к простым практическим приемам. Для определения  $N_z$  в любом сечении стержня (колонн), используем <u>метод сечений</u> и формулы (1.5) полученные в разделе 1.

$$N_z = -\sum F_{iz}^{\text{neb}} = \sum F_{iz}^{\text{npab}}$$
(A)

При наличии погонной нагрузки  $q_z$  учитываются и формулы (3.1).

Для горизонтальных стержней ось z будем направлять слева направо. Для вертикальных стержней (колонн), ось z будем направлять вниз и за правую отсеченную часть будем считать нижнюю от разреза часть, а за левую – верхнюю. Все внешние нагрузки, направленые вдоль оси z, считаем положительными. Построим эпюру  $N_z$  для колонны, показанной на рис. 3.3.



Рис.3.3

Площадь верхней части колонны A, площадь поперечного сечения нижней части 2A. Обозначим  $\gamma$  – объемный вес материала колонны. Тогда погонные нагрузки от веса будут  $q_1 = \gamma A$ ,  $q_2 = \gamma 2A$ . R – опорная реакция. Для простоты вычислений свяжем силы F и нагрузки от веса формулой

$$\gamma A a = F \tag{B}$$

Найдем опорную реакцию R из условия равновесия всей колонны  $\Sigma z = 0$ .

$$-R + q_2a + 2F + 2F + q_12a - 3F = 0$$

С учетом (В) найдем R = 5F.

Колонна имеет два участка.

<u>I участок</u> (верхний). Проведем в нем сечение на расстоянии  $S_1$  от верхнего торца колонны,  $0 \le S_1 \le 2a$ , т.е. рассмотрим верхнюю часть от разреза, что как указано выше, надо в формулах (А) считать «левой» частью

$$N_{z_1} = -\left(\sum F_{iz}^{\text{neb}} + \int_{0}^{S_1} q_1 dS_1\right) = -\left(-3F + \int_{0}^{S_1} \gamma A dS_1\right) = 3F - \gamma A S_1$$

Эпюра  $N_{z_1}$  линейна, т.к.  $S_1$  в первой степени. Для построения эпюры надо две точки:

$$S_1 = 0, N_{z_1} = 3F; S_1 = 2a, N_{z_1} = 3F - \gamma A 2a = F.$$

В масштабе откладываем эти величины на эпюре  $N_{z_1}$ .

<u>II участок</u>. Проведем в нем разрез на расстоянии  $S_2$  от опоры,  $0 \le S_2 \le a$  и эту нижнюю часть в формулах (А) считаем «правой»

$$N_{z_2} = \sum F_{iz}^{\text{прав}} + \int_{0}^{S_2} q_2 dS_2 = -R + \int_{0}^{S_2} \gamma 2A dS_2 = -5F + 2\gamma AS_2$$

Для построения эпюры достаточно двух точек

$$S_2 = 0, N_{z_2} = -5F; S_2 = a, N_{z_2} = -3F$$

Здесь и на I участке использована зависимость (В). Строим эпюру  $N_{z_2}$ . Верхний участок колонны растянут, а нижний сжат. Скачки  $N_z$  должны быть равны силам, приложенным к колонне в этих сечениях.

#### Напряжения и деформации при растяжении (сжатии). Закон Гука.

Продольная сила  $N_z$ , возникающая в поперечном сечении бруса, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных напряжений  $\sigma_z$ , распределенных по площади поперечного сечения и связаны известной зависимостью (1.6):

$$N_z = \int_A \sigma_z dA \tag{3.2}$$

Здесь  $\sigma_z dA = dN_z$  представляет собой элементарную внутреннюю силу, приходящуюся на площадку dA.

Как уже отмечалось выше, величину  $N_z$  в каждом случае легко можно определить при помощи <u>метода сечений</u>. Однако из формулы (3.2) нельзя найти закон распределения нормальных напряжений  $\sigma_z$  по площади поперечного сечения.

Опыты показывают, что если нанести на поверхность бруса систему линий, перпендикулярных к его оси, то после нагружения стержня поперечные линии переместятся параллельно самим себе. Значит, если мысленно представить себе брус состоящим из тонких продольных призматических элементов (волокон), то все поверхностные элементы будут удлиняться одинаково. Естественно предположить, что и внутренние продольные элементы тоже удлиняются одинаково, т.е. поперечные сечения смещаются параллельно начальным положениям, что соответствует *гипотезе плоских сечений (гипотезе Бернулли)*.

Согласно этой гипотезе сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

Так как одинаковым удлинениям в однородном материале соответствуют одинаковые напряжения, то напряжения в поперечных сечениях всех призматических элементов (волокон), а следовательно, и во всех точках поперечного сечения бруса, равны между собой. Это позволяет в (3.2) вынести величину  $\sigma_z$  за знак интеграла. Тогда

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} \tag{3.3}$$

Итак, в поперечных сечениях бруса при центральном растяжении или сжатии возникают равномерно распределенные нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

#### Напряжения в наклонных сечениях бруса

Рассечем растянутый стержень плоскостью  $n - n_1$ , наклонной к поперечному сечению  $n - n_2$  под углом  $\alpha$  (рис. 3.4а). Угол  $\alpha$  условимся считать положительным, когда поперечное сечение для совмещения с наклонным сечением надо повернуть на этот угол против часовой стрелки.



Как уже известно, удлинения всех волокон, параллельных оси бруса, при его растяжении (сжатии)  $N_z = \text{const}$  одинаковы. Это позволяет предполагать, что напряжения  $\rho$  во всех точках и наклонного сечения одинаковы.

Площадь наклонного сечения стержня можно выразить через площадь поперечного сечения:

$$A_{\alpha} = \frac{A}{\cos \alpha}$$

Из условия равновесия отсеченной части (рис. 3.4б) легко установить, что равнодействующая внутренних сил в наклонном сечении  $\rho A_{\alpha} = F$ , откуда

$$\rho = \frac{F}{A_{\alpha}} = \frac{F}{A} \cos \alpha = \sigma_z \cdot \cos \alpha$$

Разложим напряжение  $\rho$  на два составляющих напряжения: нормальное  $\sigma_{\alpha}$ , перпендикулярное к плоскости сечения  $n - n_1$ , и касательное  $\tau_{\alpha}$ , параллельное этой плоскости (рис. 3.4в):

$$\sigma_{\alpha} = \rho \cdot \cos \alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha$$
  

$$\tau_{\alpha} = \rho \cdot \sin \alpha = \sigma_z \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_z}{2} \sin 2\alpha$$
(3.4)

Нормальное напряжение считается положительным при растяжении и отрицательным при сжатии. Касательное напряжение положительно, если изображающий его вектор стремиться вращать тело относительно любой т.*C*, лежащей на внутренней нормали к сечению, по *часовой стрелке*. На рис. 3.4в показано  $\tau_{\alpha} > 0$ .

Из формул (3.4) видно, что в <u>поперечных сечениях</u> ( $\alpha = 0$ , cos0 = 1, sin0 = 0) нормальные напряжения будут наибольшими  $\sigma_{max} = \sigma_z$ , а касательные напряжения отсутствуют. При  $\alpha = 90^{\circ}$  и нормальные и касательные напряжения равны нулю. <u>Таким образом, в площадках с</u> наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями касательные напряжения равны нулю.

Из второй формулы (3.4) следует, что касательные напряжения принимают значения от  $\frac{\sigma_z}{2}$  (при  $\alpha = 45^\circ$ ) до  $-\frac{\sigma_z}{2}$  (при  $\alpha = -45^\circ$ ).

Таким образом, <u>наибольшие касательные напряжения</u> будут в площадках, наклонных под углом 45° к оси бруса:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_z$$

Нормальные напряжения в этих площадках ( $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ) равны

$$\sigma_{45} = \frac{1}{2}\sigma_z = \tau_{\max} \,.$$

#### Определение деформаций

Опыт показывает, что при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры сокращаются. При сжатии, наоборот, длина стержня уменьшается, а поперечные размеры увеличиваются (рис. 3.5).



Изменение первоначальной длины стержня  $\Delta l$  называется *абсолютным* удлинением.

Выделим (рис. 3.5) бесконечно малый элемент стержня длиной dz. После приложения нагрузки он получит удлинение  $\Delta dz$ . Относительная продольная линейная деформация этого элемента

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$
 и  $\Delta dz = \varepsilon_z dz$ 

При простом растяжении для всех сечений  $\sigma_z = \text{const}$ , значит удлинения всех малых элементов одинаковы, т.е.  $\varepsilon_z = \text{const}$ .

Суммируя удлинения малых элементов по всей длине стержня получим

$$\Delta l = \int_{0}^{l} \Delta dz = \int_{0}^{l} \varepsilon_{z} dz = \varepsilon_{z} \int_{0}^{l} dz = \varepsilon_{z} l.$$

Таким образом, относительная продольная деформация при растяжении равна

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} \tag{3.5}$$

Аналогично найдутся поперечные деформации (рис. 3.5)

$$\varepsilon_a = -\frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_b = -\frac{\Delta b}{b}.$$
 (3.6)

Здесь знак (–) поставлен потому, что при растяжении поперечные размеры уменьшаются. Для <u>изотропных</u> материалов <u>поперечные</u> деформации одинаковы:  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon_{\pi}$ .

Деформации  $\varepsilon_z$  и  $\varepsilon_{\pi}$  – безразмерные величины.

Отношение поперечной деформации к продольной, взятое по абсолютной величине, называется коэффициентом Пуассона

$$\mu = \frac{|\varepsilon_{\Pi}|}{|\varepsilon_{z}|} \tag{3.7}$$

Коэффициент Пуассона есть величина постоянная только для данного материала в пределах упругих деформаций и <u>определяется</u> экспериментально. Для различных материалов коэффициент Пуассона имеет значения от нуля (для пробки) до величины, близкой к 0,5 (для резины и парафина). Для стали  $\mu = 0.25 - 0.30$ .

Чем больше величина силы, тем больше, при прочих равных условиях, удлинения бруса; чем больше площадь поперечного сечения бруса, тем удлинение бруса меньше. Брусья из различных материалов удлиняются различно.

Для целого ряда материалов при нагрузках, не превышающих <u>некоторого предела</u>, опытом установлена следующая зависимость

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EA}$$
 или  $\varepsilon_z = \frac{N_z}{AE}$  или  $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$ , (3.8)

где Е – коэффициент, зависящий от физических свойств материалов.

Коэффициент пропорциональности *E* между напряжениями и деформациями называется *продольным модулем упругости* или *модулем* Юнга.

Размерность Е такая же, как и у напряжения.

Из формулы (3.8) получим

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z \tag{3.9}$$

Величина ЕА называется жесткостью бруса при осевой нагрузке.
Впервые закон о прямой пропорциональности между напряжениями и деформациями сформулировал Роберт Гук и этот закон носит его имя.

Формулы (3.8) – (3.9) являются математическими выражениями *закона Гука* при растяжении (сжатии) бруса.

Общая формулировка закона Гука: *относительная продольная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению*.

<u>Для определения полного удлинения</u> ступенчатого бруса и бруса, нагруженного несколькими силами, удлинения подсчитываются на участках с постоянными  $N_z$  и A и результаты суммируются алгебраически по всем участкам

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{z_i} l_i}{EA_i} \tag{3.10}$$

При продольной нагрузке, распределенной по длине бруса, а также в случае, когда площадь бруса переменна по длине его оси  $A_z = f(z)$ , для определения перемещения необходимо рассматривать брус, состоящий из бесконечного множества бесконечно малых участков длиной dS. Удлинения каждого такого участка определяются выражением  $\Delta dS = \frac{N_z dS}{EA_z}$ , а полное

изменение  $\Delta l$  участка бруса длиной l

$$\Delta l = \int_{0}^{l} \frac{N_z dS}{EA_z}$$
 или  $\Delta l = \int_{0}^{l} \frac{\sigma_z dS}{E} = \int_{0}^{l} \varepsilon_z dS$  (3.11)

Здесь  $N_z$  и  $A_z$  – выражения нормальной силы и площади в произвольном сечении.



Иногда требуется определить перемещение какого-либо поперечного сечения стержня. Смещение сечения зависит от деформации не всего бруса, а лишь некоторой его части между сечением и неподвижной заделкой.

*Так, например, для* стержня, показанного на рис. 3.6а, сме-

щение сечения *а* – *а* равно удлинению заштрихованной части.

Если требуется определить изменение расстояния между двумя сечениями: b-b и c-c (рис. 3.6б), то для этого необходимо определить изменение длины заштрихованных участков, лежащих между указанными сечениями.

Учет собственного веса бруса (колонны)





Рис.3.8

Вначале рассмотрим брус переменного сечения (рис. 3.7), для которого задан закон изменения площади поперечных сечений  $A_z = f(z)$ . Продольная сила в любом сечении c - c такого бруса  $N_z$  равна

$$N_z = \int_0^S \gamma \cdot A_z dS = \gamma \int_0^S A_z dS \tag{3.12}$$

где  $\gamma$  – объемный вес материала бруса.  $\gamma A_z = q(z)$  – погонная распределенная нагрузка от веса.

Напряжения в любом сечении равны

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A_z} \tag{3.13}$$

Перемещение любого сечения *с* – *с* относительно заделки находиться так:

$$W_{z} = \int_{S}^{l} \frac{N_{z} dS}{A_{z} E} \qquad \text{или} \qquad W_{z} = \int_{S}^{l} \frac{\sigma_{z}}{E} dS \qquad (3.14)$$

Рассмотрим частный случай, брус постоянного сечения (рис. 3.8)

$$N_z = \gamma AS, \ \sigma_z = \frac{N_z}{A} = \gamma S$$

Эпюры  $N_z$  и  $\sigma_z$ , показывающие изменение продольной силы и нормальных напряжений по длине бруса, изображены на рис. 3.86,в.

Перемещение любого сечения относительно заделки:

$$\begin{split} W_z &= \int_{S}^{l} \frac{\sigma_z}{E} dS = \int_{S}^{l} \frac{\gamma S}{E} dS = \frac{\gamma}{E} \int_{S}^{l} S dS = \frac{\gamma}{2E} \left( l^2 - S^2 \right). \\ &= 0, \text{ при } S = 0 \quad W_z = \Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}. \end{split}$$

Учитывая, что  $\gamma A \cdot l = G$  — вес бруса  $\Delta l = \frac{\gamma l^2 A}{2EA} = \frac{Gl}{2EA}$ . Эпюра перемещении сечений бруса показана на рис. 3.8г.

Найдем  $\Delta l$  – изменение длины колонны, показанной на рис. 3.3. Используем формулы (3.11)

$$\Delta l = \int_{0}^{l} \frac{N_z}{EA_z} dS = \int_{0}^{2a} \frac{N_{z_1}}{EA} dS_1 + \int_{0}^{a} \frac{N_{z_2}}{E \cdot 2A} dS_2$$
(3.15)

Здесь интеграл от 0 до l разбит на сумму двух интегралов по двум участкам, т.к. для каждого участка различны  $N_z$  и  $A_z$ 

I участок  $A_z = A$   $Nz_1 = 3F - \gamma AS_1$ II участок  $A_z = 2A$   $Nz_2 = -5F + 2\gamma AS_2$ 

при  $S = l \quad W_z$ 

Подставив это в (3.15), получим

$$\Delta l = \frac{1}{EA} \int_{0}^{2a} (3F - \gamma A S_{1}) dS_{1} + \frac{1}{2EA} \int_{0}^{a} (-5F + 2\gamma A S_{2}) dS_{2} =$$

$$= \frac{1}{EA} \left( 3FS_{1} - \gamma A \frac{S_{1}^{2}}{2} \right) \Big|_{0}^{2a} + \frac{1}{2EA} \left( -5FS_{2} + 2\gamma A \frac{S_{2}^{2}}{2} \right) \Big|_{0}^{a} =$$

$$= \frac{1}{EA} \left( 3F \cdot 2a - \gamma A \frac{4a^{2}}{2} \right) + \frac{1}{2EA} \left( -5F \cdot a + \gamma A a^{2} \right) = \Delta l$$

Если  $\Delta l > 0$ , то колонна удлиняется, если  $\Delta l < 0 -$  станет короче.

#### Статически неопределимые задачи растяжения (сжатия)

Брусья и шарнирно-стержневые системы, в которых внутренние усилия от заданной нагрузки можно определить при помощи уравнений равновесия, называется статически определимыми. В отличии от них статически неопределимыми называются системы, внутренние усилия в которых нельзя определить при помощи одних лишь уравнений равновесия. Недостающие составляются условия деформации Число уравнения ИЗ системы. необходимых дополнительных уравнений, ДЛЯ расчета системы, характеризует степень ее статической неопределимости.

Усилия в элементах статически определимых систем возникают только от действия внешней нагрузки (включая собственный вес конструкции). В статически неопределимых системах усилия могут возникать и при отсутствии внешней нагрузки – в результате, например, изменения температуры, смещения опорных закреплений, неточности изготовления отдельных элементов конструкции.

Наиболее важным этапом расчета статически неопределимых систем является составление дополнительных (к уравнениям равновесия) уравнений перемещений.

#### Проследим порядок решения таких задач на примерах:



I. Определить усилия в призматическом стержне, заделанным двумя концами, от одной внешней продольной силы F (рис. 3.9). Отбросим одну из заделок и заменим ее действие неизвестной реакцией  $R_B$  (рис. 3.96). В данном случае можно составить только одно уравнение равновесия:

$$\Sigma_z = 0. \quad F - R_A - R_B = 0.$$

$$R_A + R_B = F \tag{a}$$

В этом уравнении два неизвестных усилия  $R_A$  и  $R_B$ . Задача является один раз статически неопределимой. Для ее решения составим дополнительное уравнение деформации из условия, что общая длина стержня не может измениться, т.е.  $\Delta l = 0$ .

По (3.10) 
$$\Delta l = \sum_{1}^{2} \frac{N_{z_i} l_i}{EA}$$
, здесь  $l_1 = a, l_2 = b$ . На каждом участке  $N_{z_i}$ 

найдем по формулам (А).

I участок  $0 \le S_1 \le a$ , левая часть  $N_{z_1} = -(-R_A) = R_A$ 

II участок  $0 \leq S_2 \leq b$ , правая часть  $N_{z_2} = -R_B$ 

$$\Delta l = \frac{1}{EA} (R_A \cdot a - R_B \cdot b) = 0 \qquad \text{или} \quad R_A \cdot a - R_B \cdot b = 0 \qquad (c)$$

Решаем уравнения a) и c), учитывая, что l = a + b, получим

$$R_A = \frac{Fb}{l}, \quad R_B = \frac{Fa}{l}.$$

Эпюры  $N_z$  строим по формулам (в), которые показаны на рис. 3.9в.

Следует отметить, что направления неизвестных реакций можно принимать произвольно. После расчета знаки уточнят действительное направление реакций. Если реакция получается со знаком (+) значит

(B)

направление выбрано правильно, если со знаком (–) – то направление действительное противоположно выбранному.

**II.** Определить усилия в стержнях плоской шарнирно-стержневой системы, состоящей из трех стержней, нижние концы которых соединены общим шарниром D и загружены в нем вертикальной силой F (рис. 3.10).

Пусть площадь сечения среднего стержня равна  $A_1$ , а крайних стержней  $A_2 = nA_1$ , угол между стержнями  $\alpha$ , длины стержней  $l_1$  и  $l_2$ .



Если определить реакции в шарнирах *А*, *В* и *С*, то задача решена.

Число реакции три. Но т.к. система и нагрузка симметричны, то  $R_A = R_C$ . Для решения задачи достаточно определить реакции  $R_A$  и  $R_B$ , т.к. усилия в стержнях  $N_2 = R_A$ ,  $N_1 = R_B$ .

Для плоской системы сил, пересекающихся в одной точке можно составить два уравнения равновесия:

$$\Sigma F_z = 0$$
 и  $\Sigma F_v = 0$ 

Однако условие  $\Sigma F_z = 0$  равносильно уже использованному условию симметрии. Таким образом, для решения задачи необходимо составить одно дополнительное уравнение совместности деформаций стержней.

Уравнения равновесия  $\Sigma F_v = 0$  имеет вид

$$R_B + 2R_A \cdot \cos \alpha - F = 0 \tag{a}$$

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим перемещение системы: удлинение стержня *BD* равно  $\Delta l_1 = \frac{R_B l_1}{EA_1}$ , стержень *AD* удлиняется

на  $\Delta l_2 = \frac{R_A l_2}{EnA_1}$ .

Из построений на рис. 3.10 видна связь между  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ 

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \cos \alpha \tag{6}$$

Стержень 2 из начального положения (сплошная линия) переводим в деформированное состояние (пунктир) так: отсоединим в т.D, удлиним на  $\Delta l_2$ , вращая вокруг т.A соединим в т. $D_1$ . При этом получим прямоугольный треугольник с  $\Delta l_2$  и  $\Delta l_1$ .

Подставим в выражения (б) значения  $\Delta l_2$  и  $\Delta l_1$  полученные выше и учитывая, что  $l_2 = l_1 / \cos \alpha$ , получим:

$$\frac{R_A \cdot l_1}{E \cdot n \cdot A_1 \cdot \cos \alpha} = \frac{R_B l_1}{E A_1} \cos \alpha ,$$

откуда

$$R_A = R_B \cdot n \cdot \cos^2 \alpha \tag{B}$$

Решая совместно уравнения (а) и (в) получим:

$$R_A = \frac{F \cdot n \cdot \cos^2 \alpha}{1 + 2n \cos^3 \alpha} = R_C, \quad R_B = \frac{F}{1 + 2n \cos^3 \alpha} \tag{(r)}$$

Из уравнений (г) видно, что с увеличением площадей поперечных сечений стержней 2 (т.е. n), усилия в них увеличиваются, а усилие в стержне *BD* при этом уменьшается

В статически же определимых системах распределение усилий в конструкции не зависит от жесткости его элементов.

**III**. Бесконечно жесткий брус AB шарнирно прикреплен к неподвижной опоре, подвешен на трех стержнях и нагружен силой F (рис. 3.11). Определить усилия в стержнях?



В стержнях появятся растягивающие усилия  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ . Для бруса *AB* можно записать три уравнения равновесия:  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma F_z = 0$  и  $\Sigma mom_A = 0$ .

Число неизвестных пять: усилия в трех подвесках, вертикальная и горизонтальная составляющие реакции в шарнире *А*. Таким образом, задача дважды статически неопределимая. Следует заметить, что для определения усилий только

в стержнях использовать уравнения равновесия  $\Sigma F_z = 0$  и  $\Sigma F_y = 0$  здесь нецелесообразно, т.к. в них войдут две не интересующие нас опорные реакции в шарнире A.

Условия равновесия  $\Sigma mom_A = 0$  дает:

$$N_1 \cdot a_1 + N_2 \cdot a_2 + N_3 \cos \alpha \cdot a_3 - F \cdot l_{AB} = 0$$
 (a)

Дополнительные уравнения можно записать, рассматривая деформацию системы. Брус *АВ* считаем очень жестким, его собственными деформациями пренебрегаем. Тогда он, оставаясь прямым, займет положение *AB*<sub>1</sub>.

Удлинения стержней (подвесок) будут равны по закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}, \ \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}, \ \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3}$$
(6)

Из подобия треугольников можно найти соотношения между  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  и  $\Delta l_3$ , что дает два дополнительных уравнения, а именно:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a_1}{a_2} \qquad \text{II} \qquad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_3 / \cos \alpha} = \frac{a_1}{a_3} \tag{B}$$

Это условия совместности деформаций стержней.

Здесь, так же как и в задаче №ІІ считаем, что при деформации системы угол между стержнем 3 и брусом *АВ* остался неизменным.

Подставив в уравнения (в) соотношения (б) получим два уравнения, связывающих между собой усилия  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ . Совместно с уравнением (а) получаем систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными величинами  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ , из которых они и могут быть найдены.

IV. Определение монтажных напряжений

Бесконечно жесткий брус закреплен одним концом и подвешен на двух стержнях (рис. 3.12). При изготовлении стержня BC его длина оказалась короче проектной на величину  $\Delta$ . При сборке системы стержень BC придется вытянуть силой  $N_1$ , что вызывает в свою очередь сжатие стержня DE силой  $N_2$ . Определить усилия в стержнях BC и DE.



Опора *А* даст две реа-кции, уравнений статики можно составить три:

 $\Sigma F_{y} = 0, \ \Sigma F_{z} = 0$ и  $\Sigma mom_{A} = 0$ 

данная система является однажды статически неопределимой.

Здесь, так же как и в предыдущей задаче, нецелесообразно использовать пер-вые два уравнения равно-весия, т.к. в них войдут не

интересующие нас реакции в шарнире A. Последнее уравнение равновесия  $\Sigma mom_A = 0$  даст

$$N_1 \cdot L_1 - N_2 \cdot L_2 = 0$$
 (a)

Деформированный вид системы изображен пунктиром на рис. 3.12. Из условия деформации (подобия треугольников) получим:

$$\frac{\Delta l_2}{L_2} = \frac{\left|\Delta\right| - \Delta l_1}{L_1}$$

Подставляя значения удлинений по закону Гука, найдем

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} L_1 = \left( \left| \Delta \right| - \frac{N_1 l_1}{EA_1} \right) L_2 \tag{6}$$

Решая совместно уравнения (а) и (б) найдем  $N_1$  и  $N_2$ , а затем и напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \tag{B}$$

Если площади стержней  $A_1$  и  $A_2$  не заданы, то усилия в стержнях  $N_1$  и  $N_2$  найти нельзя, но можно найти напряжения в них, если задать соотношения площадей, например  $\frac{A_1}{A_2} = k$ . Тогда уравнение б) с учетом в) примет вид

$$\frac{\sigma_2 \cdot l_2}{E} L_1 = \left( \left| \Delta \right| - \frac{\sigma_1 l_1}{E} \right) L_2 \tag{(r)}$$

а уравнение a)  $\sigma_1 A_1 L_1 - \sigma_2 A_2 L_2 = 0$  с учетом заданного соотношения  $\frac{A_1}{A_2} = k$ запишется так

$$\sigma_1 k L_1 - \sigma_2 L_2 = 0 \tag{(d)}$$

Решая уравнения г) и д) можно найти  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

V. Определение температурных напряжений

Определить внутренние усилия в призматическом брусе, заделанном двумя концами, от равномерного нагрева всего бруса на t° (рис.3.13).



При повышении температуры брус стремиться удлиниться и оказывает давление на заделки, в которых возникнут реакции.

Отбросим одну из заделок, а ее действие заменим опорной реакцией *R*. Тогда стержень свободно удлиниться на величину

$$\Delta l_t = \alpha t^\circ \cdot l$$

где *α* – коэффициент температурной деформации. Под дейс-

твием внутренней силы N равной опорным реакциям (N = R), брус должен сократиться на такую же величину, т.к. его длина между заделками не может измениться, т.е.

$$\Delta l_N = \Delta l_t$$

С учетом закона Гука

$$\frac{Nl}{EA} = \alpha t^{\circ} l$$

откуда

 $N = EA\alpha t^{\circ}$ 

При нагревании возникают сжимающие усилия, а при охлаждении – растягивающие и они не зависят от длины бруса.

Общий случай статически-неопределимых задач растяжения (сжатия).

Иногда в статически неопределимых конструкциях приходиться одновременно учитывать влияние внешней нагрузки, изменение температуры и неточности изготовления.

<u>Первый путь</u> – это <u>одновременный</u> учет всех факторов. В этом случае в уравнения совместности деформаций должны быть включены члены, отражающие влияние всех этих обстоятельств. Полученные в результате расчета усилия и напряжения являются окончательными.

<u>Второй путь</u> – заключается в <u>раздельном</u> определении усилий и напряжений, вызванных нагрузкой, температурой, неточностью изготовления. Решается как бы несколько отдельных задач, в каждой из которых учитывается только один из факторов. Окончательные усилия и напряжения определяются путем алгебраического суммирования этих величин. Последний путь часто являются более ясным и удобным, вызывая лишь небольшое увеличение количества выкладок. Он носит название <u>сложения действия сил.</u>

**VI**. Бесконечно жесткий брус KB подвешен на трех стержнях из разных материалов и сечений, нагружен силой F, при этом средний стержень короче проектной длины на величину  $\Delta$ . Во время эксплуатации система может нагреваться на  $\Delta t$ . Определить усилия в стержнях (рис. 3.14).



Полагаем, что усилия во всех стержнях растягивающие. Можно составить два уравнения равновесия:

Первое сумма проекций на вертикаль –

$$N_1 + N_2 + N_3 - F = 0 \quad (a)$$

Второе – сумма моментов относительно т. *D* 

$$N_1 \cdot a - N_3 \cdot b + F \cdot c = 0$$
(б)

Третье уравнение составим из рассмотрения условий дефор-

мации системы, показанной пунктиром на рис. 3.14 (из подобия  $\Delta K_1 D_2 D_1$  и  $\Delta K_1 B_2 B_1$ )

$$\frac{B_2 B_1}{D_2 D_1} = \frac{a+b}{a} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1 - |\Delta|} = \frac{a+b}{a} \tag{B}$$

Значения входящих в это уравнение удлинений с учетом влияния температуры будут следующими:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 A_1} + \alpha_1 \Delta t \cdot l; \ \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2} + \alpha_2 \Delta t \cdot l; \ \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{E_3 A_3} + \alpha_3 \Delta t \cdot l \quad (\Gamma)$$

Подставив соотношения г) в уравнение в) и учитывая уравнения а) и б) придем к системе трех уравнений с тремя неизвестными величинами  $N_1, N_2, N_3$ .

Из этой системы можно найти усилия  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ . Если наши предположения о направлении усилий в каком-нибудь стержне оказалось ошибочными, то из решения мы получим отрицательное значение этого усилия. Здесь использован первый путь.

# Механические свойства материалов

а) Диаграмма растяжения

начальная длина.

Эти диаграммы получают при нагружении специальных стандартных образцов из испытываемого материала на специальных испытательных машинах. Испытатия проводят для определения механических характеристик материалов. Испытательные машины снабжены устройствами, показывающими величину приложенной нагрузки F и величину изменения длины образца  $\Delta l$  или самописцами, рисующим диаграмму зависимости  $\Delta l$  от F. На практике удобнее пользоваться диаграммой в осях  $\sigma = \frac{F}{A_0}$  и  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ , где  $A_0$  – начальная площадь поперченного сечения образца,  $l_0$  – его

Ст.3 – малоуглеродистая сталь, широко используется в строительстве. По ГОСТу образцы изготавливаются из Ст.3 круглыми d = 20мм и длиной  $l_0 = 220$ мм или плоскими с сечением  $30 \times 10$ мм и длиной 220мм.

При испытании таких образцов на растяжение получается диаграмма, показанная на рис. 3.15. На диаграмме отчетливо видны несколько участков:

OB – линейный участок до  $\sigma_{nu}$  – предел пропорциональности. На-

клон этого участка определяет tg $\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E - \underline{\text{продольный модуль упругости}}$  согласно закону Гука. Поэтому, законом Гука можно пользоваться до напряжений, не превышающих  $\sigma_{\text{пц}}$ ;

*OC* – участок упругих деформаций до  $\sigma_y$  – <u>предел упругости</u>. Эти деформации исчезают после снятия нагрузки;

*DL* – горизонтальный участок (площадка текучести при  $\sigma_{\rm T}$  – <u>предел</u> <u>текучести</u>). Здесь образец удлиняется при постоянной нагрузке (течет).

Величины  $\sigma_y$  и  $\sigma_T$  отличаются незначительно, поэтому на практике их считают совпадающими, *LMP* – участок упрочнения, т.к. дальнейшая деформация образца происходит только при увеличении нагрузки до  $\sigma_{\rm Bp}$  – <u>предел прочности</u> (временное сопротивление). До т. *P* ( $\sigma_{\rm Bp}$ ) поперечные деформации образца по всей его длине одинаковы. После т. *P* эти деформации концентрируются в одном (слабом) месте, где начинает образовываться *шейка* – местное значительное сужение образца. За т. *P* 

ординаты диаграммы уменьшаются, нагрузка падает, что объясняется значительным уменьшением поперечного сечения в *шейке*. В т. *К* происходит разрыв образца в *шейке*.

Итак: из этого испытания можно получить следующие <u>механические</u> <u>характеристики Ст.3</u>:  $\sigma_{\pi\mu}$ ,  $\sigma_{\tau}$ ,  $\sigma_{BD}$ , *E*.

Если разгрузить образец из т. M, то диаграмма разгрузки пойдет по линии MN параллельной OB, часть деформаций  $\varepsilon_y$  исчезает, а часть  $\varepsilon_p$  останется.  $\varepsilon_y -$ <u>упругие деформации</u>,  $\varepsilon_p -$ <u>остаточные</u>, объясняются пластическими свойствами материала.

Если сразу вновь начать нагружать образец, то диаграмма пойдет по линии *NMPK*. Эта диаграмма отличается от диаграммы начальной *OBCDLMPK* следующим: 1) увеличился  $\sigma_{nu}$ , 2) исчезла площадка текучести. Это новое поведение материала объясняется «наклепом», полученным при первом нагружении. «Наклеп» может возникать и при других видах деформации. При всякой холодной обработке металла, при которой возникают напряжения выше  $\sigma_{T}$ , появляется «наклеп». Например, при продавливании отверстий в стальных листах их края подвергаются «наклеп», становятся хрупкими (могут появиться трещины). «Наклеп» устраняется отжигом, а также со временем он сам исчезает (при «отдыхе»).

Полученная диаграмма называется условной, т.к.  $\sigma = \frac{F}{A_0}$  определяются

по начальной площади  $A_0$  сечения образца, а эта площадь постоянно уменьшается при нагружении и особенно при появлении *шейки*. Можно построить диаграмму с учетом этого, она называется истинной. Истинная диаграмма мало отличается от условной почти до конца участка упрочнения и значительно отличается после появления *шейки*. В реальных конструкциях не допускаются напряжения выше  $\sigma_{\rm T}$ , поэтому для практики достаточно условной диаграммы.

После разрушения образца можно определить его остаточные деформации.



б) Диаграммы растяжения различных материалов.

На рис. 3.16 показаны сравнительные условные диаграммы различных материалов при растяжении.

<u>Ст.6:</u> обладает более высокой прочностью, чем Ст.3, площадка текучести отсутствует, *шейка* почти не образуется. Остаточные деформации после разрушения меньше, чем у Ст.3.

<u>Чугун:</u> диаграмма не имеет линейного участка, строго говоря, не подчиняется закону Гука.

Рис.3.16

Для определения условного *E* проводят хорду на участке рабочих напряжений. *Шейка* не образуется. Разрушается с малыми остаточными деформациями.

По величине остаточных деформаций после разрушения, материалы делят на хрупкие (чугун, камень, бетон, кирпич и др.) и пластичные (сталь, медь, алюминий и т.д.). Это деление условно, т.к. один материал в разных условиях может разрушаться по-разному. Например, сталь в обычных условиях – пластичный материал, но при очень низких температурах разрушается как хрупкий материал. Поэтому точнее говорить о хрупком и пластичном виде разрушения.

в) Сравнения диаграмм растяжения и сжатия материалов.



Для испытания материалов на сжатие, образцы из них делают в виде кубиков или коротких цилиндров.

<u>Ст.3:</u> при сжатии имеет  $\sigma_{\Pi III}$ ,  $\sigma_{T}$ , *E* такие же, как и при растяжении. Но площадки текучести нет, есть наклонный участок при  $\sigma_{T}$ . При больших –  $\sigma$  образец сплющивается, приобретает вид бочонка из-за трения на торцах о площадки нагружающего устройства. Разрушение не получается (получается «лепешка»).

<u>Чугун:</u> диаграмма при сжатии (сж) похожа на диаграмму растяжения (р),  $E_{\rm p} \approx E_{\rm cw}$ , но  $\sigma_{\rm Bp}^{\rm cw}$  в несколько раз больше, чем  $\sigma_{\rm Bp}^{\rm p}$ , т.е. чугун хорошо работает на сжатие и плохо на растяжение. Чугун при сжатии немного приобретает форму бочонка, а потом раскалывается по площадке  $\approx 45^{\circ}$  к его оси. Согласно (3.4) на этой площадке возникают максимальные касательные напряжения, следовательно, чугун при сжатии и разрушается от  $\tau_{\rm max}$ . Бетон, камень деформируются при сжатии аналогично. У них тоже  $\sigma_{\rm Bp}^{\rm cw} > \sigma_{\rm Bp}^{\rm p}$ . г) Наряду с упругостью и пластичностью к основным механическим характеристикам относится и <u>ползучесть</u> – развитие со временем деформаций при постоянном напряжении. Зависимость  $\varepsilon_p$  – деформации ползучести от T – времени, можно представить графиком (рис. 3.18). На кривой ползучести различаются три участка: AB – неустановившаяся ползучесть; BC – установившаяся ползучесть; CD – стадия разупрочнения.



Рис.3.18

ползучести увеличи-Скорость вается с повышением температуры и уровня напряжений. Для материала есть каждого свои сочетания  $\sigma$  (напряжения) и  $t^{\circ}$ (температура) при которых возникает ползучесть. Цель расче-тов ползучесть определение на времени эксплуатации конструкции до разрушения.

д) Влияние различных факторов на механические характеристики материалов.

1. <u>Влияние скорости нагружения</u>: при динамическом нагружении повышаются  $\sigma_{nu}$ ,  $\sigma_{T}$ ,  $\sigma_{Bp}$ , площадка текучести уменьшается или исчезает, разрушение происходит при меньших деформациях. Модуль *E* не меняется.

2. <u>Влияние температуры</u>: с повышением  $t^{\circ}$  уменьшаются  $\sigma_{\pi\mu}$ ,  $\sigma_{\tau}$ ,  $\sigma_{вp}$ , характеристики пластичности увеличиваются, E – уменьшается,  $\mu$  (коэффициент Пуассона) увеличивается. Может появиться ползучесть. *Жаростойкость* – способность материала сопротивляться окислению. *Жаропрочность* – способность материала сохранять высокие механические характеристики при высоких температурах.

3. <u>Релаксация</u> – постепенное падение напряжений при неизменной деформации материала (имеет место в болтовых соединениях – со временем «стяжка» соединения ослабевает, поэтому периодически болты надо «подтягивать»). Релаксация происходит при нормальной температуре.

4. <u>Старение</u> – самопроизвольное изменение механических характеристик со временем (прочность бетона увеличивается, прочность полимеров – уменьшается).

# РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

В сопротивлении материалов обычно решаются две задачи:

- 1. Определение размеров поперечных сечений стержней А при заданной нагрузке.
- 2. Определение допускаемой нагрузки [F] при заданных размерах сечения А.

Обе задачи можно решать двумя основными методами:

- 1. расчет по допускаемым (расчетным) напряжениям (Д.Н);
- расчет по разрушающим нагрузкам (P.H) (предельному состоянию).

<u>Метод допускаемых напряжений (Д.Н.)</u> Обозначим [σ] – допускаемое напряжение. <u>Условие прочности</u> имеет вид  $\sigma_z = \frac{N_z}{\Lambda} \leq [\sigma]$  – напряжения в стержнях не должны превышать допустимых. Отсюда можно найти  $N_z$  или A.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{on}}}{n}$$

Здесь  $\sigma_{\rm on}$  – опасное напряжение, n – коэффициент запаса прочности. Для хрупких материалов  $\sigma_{\rm on} = \sigma_{\rm Bp}$ ,  $n = 2,5 \div 5$ , для пластичных  $\sigma_{\rm on} = \sigma_{\rm T}$ ,  $n = 1,5 \div 2,5$ . Рекомендации для выбора n приводятся в справочниках. Величины n зависят: a) от класса конструкции (капитальное, временное); б) характера нагрузки (статическая, динамическая и др.); в) возможной неоднородности строительных материалов (бетон); г) от вида деформации (растяжения, сжатия, изгиба, кручения).

Необходимость введения n обуславливается: a) разбросом опытных  $\sigma_{\rm T}$  и  $\sigma_{\rm вр};$  б) неточностью определения нагрузок (ветровой, снеговой и т.д.); в) приближенностью методов расчета; г) неточностью изготовления деталей конструкций (допуски).

<u>Метод разрушающих нагрузок (Р.Н)</u> Обозначим [Р] – допускаемое усилие в стержне. Условие прочности  $N_z \leq [P]$ -усилия в стержнях не должны превышать допускаемых.  $[P] = \frac{P_p}{r}$ , где  $P_{\rm p}$  – разрушающие усилие в стержне. Для пластичных материалов  $P_{\rm p} = \sigma_{\rm T} \cdot A$ , для хрупких  $P_{\rm p} = \sigma_{\rm Bp} \cdot A$ . Коэффициент запаса прочности *n* выбирается так же, как указано выше.

Нетрудно убедиться, что для статически определимых конструкций, элементы которых подвергаются центральному растяжению (сжатию), расчет по методу разрушающих нагрузок приводит к тем же результатам, что и расчет по допускаемым напряжениям, если коэффициенты запаса прочности в том и другом случае одинаковы.

Совсем другие результаты получим, если будем применять метод разрушающих нагрузок к статически неопределимым системам ИЗ пластичных материалов, т.к. появление текучести только в одном наиболее нагруженном элементе еще не приводит систему к разрушению.



Так, например, если в статически неопределимой системе, изображенной на рис. 3.19, при увеличении силы F напряжения, равные пределу текучести, появятся вначале в одном каком-то стержне, то это еще не выведет конструкцию из строя, т.к. в другом стержне напряжения будут меньше  $\sigma_{\rm T}$ . Для полного разрушения конструкции необходимо, чтобы текучесть появилась во всех стержнях. В этом случае

разрушающая сила  $F_{\text{pas}}$  определиться из условия равенства нулю суммы моментов относительно точки A:  $\Sigma mom_A = F_{\text{pas}}l/2 - N_1^p \cdot a - N_2^p \cdot l = 0$ 

$$\Sigma mom_A = F_{\text{pas}} \cdot \frac{l}{2} - A_1 \cdot \sigma_{\text{T}} \cdot a - A_2 \cdot \sigma_{\text{T}} \cdot l = 0,$$

 $[F] = F_{\text{раз}} / n$  – допускаемая нагрузка.

Таким образом, метод расчета по разрушающим нагрузкам позволяет спроектировать статически неопределимую систему из пластичного материала экономичнее, чем при расчете по допустимым напряжениям.

#### Энергия деформации

Выделим из бруса с площадью поперечного сечения A малый элемент длиной dz. Брус растянут силой F, от которой возникнут:  $\sigma_z = \frac{F}{A}$ , по закону Гука  $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{F}$  и  $\Delta dz = \varepsilon_z dz$ . Загрузим брус дополнительной малой силой dF,

тука  $\varepsilon_z = \frac{1}{E}$  и  $\Delta dz = \varepsilon_z dz$ . Загрузим орус дополнительной малой силой dr, от которой возникнут  $d\sigma_z$ ,  $d\varepsilon_z$  и  $\delta dz = d\varepsilon_z dz$ . Сила F + dF совершит на пути  $\delta dz$  работу, которая перейдет в  $d\Pi$  – потенциальную энергию деформации элемента бруса.

$$d\Pi = (\sigma_z + d\sigma_z)A\delta dz = (\sigma_z + d\sigma_z)Adz d\varepsilon_z \approx \sigma_z d\varepsilon_z dV$$
 (a)

Здесь dV = Adz — объем элемента бруса,  $d\sigma_z \approx 0$ , т.к. значительно меньше основного напряжения  $\sigma_z$ .

Обозначим *W* – *удельная энергия деформации*, т.е. энергия в единице объема тела. Тогда приращение *dW* с учетом а) будет

$$dW = \frac{d\Pi}{dV} = \sigma_z d\varepsilon_z \tag{6}$$

Если известна зависимость  $\sigma_z = f(\varepsilon_z)$ , то

$$W = \int_{0}^{\varepsilon_{z}} f(\varepsilon_{z}) d\varepsilon_{z}$$
(B)

Для упругих деформаций по закону Гука  $\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$ , тогда

$$W = \int_{0}^{\varepsilon_{z}} E\varepsilon_{z} d\varepsilon_{z} = E \frac{\varepsilon_{z}^{2}}{2} = \frac{1}{2} \sigma_{z} \varepsilon_{z} = \frac{1}{2E} \sigma_{z}^{2}$$
(3.16)

Учитывая, что  $\sigma_z = \frac{N_z}{A}, \, \varepsilon_z = \frac{N_z}{EA}$ из (3.16) получим

$$W = \frac{N_z^2}{2EA^2} \tag{3.17}$$

Энергию деформации всего бруса U можно представить так:

$$U = \int_{0}^{l} WAdz = \int_{0}^{l} \frac{N_{z}^{2}}{2EA}dz$$
(3.18)

Возможны несколько частных случаев:

- 1.  $N_z$  и *A* постоянны по l длине бруса:  $U = \frac{N_z^2 l}{2EA}$
- 2.  $N_{z_i}$  и  $A_i$  скачкообразно меняются по участкам бруса

$$U = \frac{1}{2E} \sum_{i} \frac{N_{z_i}^2 l_i}{A_i}$$

Из зависимости в) следует, что *W* определяется площадью, ограниченной диаграммой деформирования. Полезно отметить следующие зависимости, получаемые из (3.16) с учетом закона Гука:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z \tag{3.19}$$

# РАЗДЕЛ 4. СДВИГ

Такой вид деформации возникает, например, при работе ножниц, часто болты и заклепки в соединениях работают только на сдвиг, в поперечных сечениях брусьев, как указано выше, могут действовать перерезывающие силы  $Q_y$  и  $Q_x$ , которые вызывают сдвиг.  $Q_y$  есть равнодействующая сила напряжений  $\tau_{yz}$  и они связаны известной зависимостью  $Q_y = \iint_A \tau_{yz} dA$ . Пока закон изменения  $\tau_{yz}$  по площади сечения A бруса неизвестен и будем считать, что  $\tau_{yz}$  равномерно распределены по сечению A, тогда  $Q_y = \tau_{yz} \cdot A$ или

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y}{A} \tag{4.1}$$

При этом, очевидно, нарушается закон парности  $\tau$  на верхнем и нижнем углах бруса. Уточнением этого вопроса займемся позднее.



## Закон Гука при сдвиге

Рассмотрим деформацию малого элемента, испытывающего сдвиг от  $Q_y$ . Длины ребер при этом не меняются, а горизонтальные грани повернуться на угол  $\gamma_{yz}$  – угол сдвига или относительный сдвиг в плоскости <u>yz</u>. Экспериментально установлено, что в определенных пределах деформация сдвига происходит упруго, а величина ее пропорциональна  $Q_y$ .

$$\gamma_{yz} = \frac{Q_y}{A \cdot G}$$

С учетом (4.1) получим

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$$
 или  $\tau = G \cdot \gamma$  (4.2)

Эти соотношения называют законом Гука при сдвиге. Коэффициент G называют модулем упругости при сдвиге. Из (4.2) следует, что G имеет размерность напряжений (Кн/см<sup>2</sup>), т.к.  $\gamma_{yz}$  – безразмерная величина (радианы). Для каждого материала G определяются экспериментально и приводятся в справочниках. Например, для стали  $G = 8 \cdot 10^5 \,\mathrm{krc/cm^2} =$ 

8.10<sup>3</sup> Кн/см<sup>2</sup>. Из опытов на кручение трубчатых образцов можно построить диаграмму зависимости  $\tau = f(\gamma)$ , аналогичную диаграмме при растяжении Ст.3 (см. рис. 3.15).

Напряжение  $\tau_{nij}$  – *предел пропорциональности при сдвиге*, является границей справедливости закона Гука (4.2)

Напряжение  $\tau_{\rm T}$  – *предел текучести при сдвиге*, при нем наблюдается значительный рост сдвигов при постоянном напряжении (площадка текучести). Величины  $\tau_{\rm nu}$  и  $\tau_{\rm T}$  для разных материалов приводятся в справочниках. Для многих материалов справедливо соотношение:

$$\tau_{\rm T} \approx \sigma_{\rm T} / \sqrt{3}$$
.

## Зависимость между параметрами Е, G, µ

Величины: *Е – продольный модуль упругости (модуль Юнга)*; *G – модуль сдвига*; *µ - коэффициент Пуассона*, определяются для каждого материала экспериментально и приводятся в справочниках.

Аналитически можно получить формулу, которая связывает эти величины

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{4.3}$$

Это формула имеет практическое значение, т.к. позволяет проверить правильность полученных из экспериментов величин *E*, *G*, *µ*.

#### Энергия деформации при сдвиге

По аналогии с определением энергии деформации при центральном растяжении (сжатии), формулы (3.16)  $W = \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z$ , можно получить формулы для удельной энергии деформации при сдвиге:

$$W = \frac{1}{2}\tau \cdot \gamma, \qquad W = \frac{\tau^2}{2G}, \qquad W = G\frac{\gamma^2}{2}$$
(4.4)

Две последние формулы получены с учетом закона Гука при сдвиге (4.2)

#### Расчет заклепочных (болтовых) соединений

На рис. 4.1а показано соединение двух листов в «нахлестку» с помощью заклепок, на рис. 4.16 – соединение трех листов, на рис. 4.1в вид на эти соединения сверху. В таких соединениях обычно полагают, что заклепки (болты) работают только на сдвиг.

Введем обозначения величин: F – сдвигающее усилие в соединение;  $N_i$  – растягивающее усилие в  $i^{M}$  листе;  $t_i$  – толщины листов; b – ширина соединяемых листов; n – общее число заклепок (отверстий) в соединении; d – диаметр заклепок (отверстий); m – число плоскостей среза каждой



заклепки;  $K_i$  — число отверстий в первом ряду от нагрузки  $N_i$  в каждом листе.

В заклепочных (болтовых) соединениях возможны три вида разрушений: 1) срез заклепок (болтов);

2) смятие отверстий в листах, т.е. за счет об-жатия поверхности отвер-стия телом заклепки оно из круглого может превратиться в эллиптическое;

3) возможен разрыв листов по первому ряду отверстий от нагрузки  $N_i$ .

#### 1. Условие прочности заклепок на срез

Считаем, что в момент «разрушения» напряжения во всех заклепках равны  $\tau_{\rm T}$  – пределу текучести, поэтому срезающие усилия во всех заклепках одинаковы, а допускаемое напряжение в них  $[\tau] = \frac{\tau_{\rm T}}{n}$ , где n – коэффициент запаса прочности. Обычно  $[\tau]$  приводиться в справочниках. Обозначим  $A_{\rm cp} = \frac{\pi d^2}{4} m \cdot n$  – суммарная площадь среза всех заклепок. <u>Условие прочности</u> <u>заклепок на срез</u> имеет вид:

$$\frac{F}{A_{\rm cp}} = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2 \cdot m \cdot n} \le [\tau]$$
(4.5)

Отсюда можно найти F – допускаемую нагрузку (при заданных других параметрах d, m, n) или «d» или «n». При проектировании соединения обычно определяют «d».

2. Условие «несмятия» отверстий в листах

Смятие стенок отверстий происходит тогда, когда напряжения обжатия их телом заклепки равно  $\sigma_{\rm T}$  – пределу текучести. Допускаемое напряжение на смятие

$$[\sigma]_{\rm CM} = \frac{\sigma_{\rm T}}{n}$$

где n – коэффициент запаса прочности. Обычно  $[\sigma]_{cm}$  приводятся в справочниках для разных материалов листов.

Площадь обжатия отверстия  $A_{ob} = t_i d$ .

Условия несмятия отверстий во всех листах

$$\frac{N_i}{dt_i n} \le \left[\sigma\right]_{\rm cm} \tag{4.6}$$

Отсюда можно найти  $N_i$  – допускаемые усилия в каждом листе, а через них и F или  $d, t_i, n$ .

При проектировании соединения обычно находят *t<sub>i</sub>* – толщины листов.

3. Условие прочности листов на разрыв по первому ряду отверстий

 $[\sigma]$  – допускаемое напряжение на разрыв материала листа, приводится в справочниках. Площадь разрыва каждого листа с учетом ослабления его отверстиями  $A_i^{\text{нетто}} = bt_i - K_i dt_i$ 

Условие прочности листов на разрыв

$$\frac{N_i}{A_i^{\text{нетто}}} \le [\sigma] \quad \text{или} \quad \frac{N_i}{bt_i - K_i dt_i} \le [\sigma]$$
(4.7)

При проектировании соединения отсюда обычно определяют *b* – ширину листов.

В спроектированном соединении должны выполняться все эти три условия прочности для всех листов, поэтому из всех возможных геометрических параметров:  $n, d, t_i, b$  найденных из всех условий прочности, надо брать <u>максимальные</u> величины, а из всех возможных допустимых нагрузок F надо брать <u>минимальную</u> величину. При размещении заклепок (рис. 4.1в) желательно соблюдать следующие правила: расстояния между рядами заклепок не менее 3d, расстояние от осей отверстий до краев листов не менее 2d.

#### Расчет сварных соединений

На рис. 4.2 показано соединение двух листов в «нахлестку» с помощью сварки. Продольные швы *1* называют фланговыми, а поперечные



Рис.4.2

2 – торцевыми. Разрушение швов (фланговых и торцевых) происходит от среза по наименьшей возможной площади среза, т.е. под углом 45° к катетам шва *h* (см. рис. 4.2b). Считаем, что сдвигающие напряжения в момент

разрушения равны  $\tau_{\rm T}$  и поэтому равномерно распределены по длине фланговых швов. Допускаемые напряжения в них  $[\tau] = \frac{\tau_{\rm T}}{n}$ , где n -коэффициент запаса прочности. Обычно  $[\tau]$  приводятся в специальных справочниках по сварке. Обозначим: l -длина «нахлестки»; b -длина торцевого шва; L -суммарная длина сварного шва.

Очевидно, что L = 2l + b.

Суммарная площадь среза сварного шва (с учетом рис. 4.2b)

$$A_{\rm cp} = h \cdot \cos 45^\circ \cdot L \approx 0.7 hL$$

Условие прочности сварного шва

$$\frac{F}{A_{\rm cp}} = \frac{F}{0,7hL} \le \left[\tau\right] \tag{4.8}$$

Отсюда можно найти F – допускаемую нагрузку или L – суммарную длину шва и т.к. L = 2l + b, можно определить  $l = \frac{L - b}{2}$  длину «нахлестки» листов. На концах сварного шва его качество ухудшается из-за «стекания» расплавленного металла, получается «непровар» на длине  $\approx 0,5$  см.

Поэтому расчетная длина фланговых швов  $l_p$  увеличивается по концам на 0,5 см.

$$l_{\rm p} = l + 2 \cdot 0.5 \, [\rm cm]$$

Материал шва не имеет, как правило, ярко выраженной текучести. Поэтому в предельном состоянии в сварном шве касательные напряжения полностью не выравниваются по длине фланговых швов. Исходя из этих соображений, ограничивают длину фланговых швов  $l \le 60h$ . При этом условии отступление от принятого допущения о равномерном распределении  $\tau$  по длине флангового шва оказывается не слишком велико. С другой стороны, необходимо, чтобы  $l \ge 4h$  или  $l \ge 40$  мм.

При малой толщине  $t_{\rm H}$  – листа-накладки (до 5мм), катет шва  $h = t_{\rm H}$ . При большой толщине  $t_{\rm H}$ , h определяется по справочнику сварщика.

# РАЗДЕЛ 5. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

Призматический стержень испытывает деформацию изгиба в том случае, если в плоскостях, проходящих через ось стержня, к нему приложены пары сил (моменты) или силы, перпендикулярные к его оси.

Стержень, работающий на изгиб, обычно называется *балкой*. На балку могут действовать кроме внешних сил и реакции опор. Для решения задач сопротивления материалов обычно необходимо знать и те и другие.

Опыт показывает, что при действии указанных сил ось балки искривляется, т.е. балка изгибается.

В случае, когда изгибающий момент в поперечном сечении балки является <u>единственным</u> силовым фактором, а все остальные равны нулю, имеем <u>чистый изгиб</u> (рис. 5.1а).



изгибающим Если наряду С моментом в поперечных сечениях поперечные возникают также И силы. а нормальная сила (продольная) при этом равна нулю, то имеем поперечный изгиб (рис. 5.16).

Если все силы, в том числе и опорные реакции, лежат в плоскости, совпадающей с осью симметрии сечения, то изогнутая ось балки будет также лежать в этой

плоскости. Такой изгиб называют <u>плоским изгибом</u>. Мы рассмотрим плоский изгиб в плоскости YOZ (см. рис. 5.1). Ось z будем направлять горизонтально, слева направо. Ось у направим вниз, ось x направлена на «нас», при этом оси XYZ составят правую систему координат.

# <u>Основные типы балок и опорных связей.</u> <u>Определение опорных реакций</u>

Для того, чтобы балка смогла воспринимать нагрузку и передавать ее на конструкцию, она должна быть соединена с ней опорными связями. Опорные реакции зависят от устройства опорных связей или, как говорят, типа опор. Различают три основных типа опор:

# **1.** Шарнирно-неподвижная опора. <sub>Н</sub> $\stackrel{R}{\longleftarrow}$ или <sub>Н</sub> $\stackrel{R}{\longleftarrow}$

Эта опора допускает свободный поворот сечения балки в плоскости изгиба, но препятствует перемещениям как по вертикали, так и по горизонтали. В

такой опоре возникает <u>две составляющие</u> опорной реакции: R – вертикальная

и **H** – горизонтальная. **2.** Шарнирно-подвижная опора. нк или н или

Эта опора кроме поворота сечения допускает перемещение в одном направлении (в данном случае – по горизонтали). Реакция такой опоры *R* направлена вдоль опорной связи или перпендикулярна плоскости опирания катков.

Такая опора не допускает ни поворота, ни перемещений по двум направлениям сечения балки, примыкающего к заделке. В заделке возникают реакции R, H и момент M.

Применяют различные варианты прикрепления балки к основанию с помощью рассмотренных опор. Наименьшее число связей, обеспечивающее неподвижность балки по отношению к основанию в одной плоскости, равно трем (рис. 5.2).





Рис.5.3

На рис. 5.2 показаны некоторые типы балок в зависимости от способов крепления к основанию:

а) простая двухопорная балка;

б) балка, заделанная одним концом.

Могут быть балки с консолями.

Встречаются и более сложные типы балок, состоящие из системы брусьев, соединенных между собой связями (рис. 5.2 в). Точка «К» шарнир.

<u>Недопустимые случаи</u> крепления балки: когда все три опорных стержня параллельны друг другу (рис. 5.3а) или когда направления трех опорных стержней пересекаются в одной точке (рис. 5.3б).

Задача определения опорных реакций подробно изучалась в теоретической механике (раздел статика).

При определении опорных реакций необходимо стремиться так составить уравнения *статики*, чтобы в каждое из них входило только одно

неизвестное. Для этого уравнения моментов составляются относительно оси х, проходящей через опорные точки.

При расчете сложных балок (рис. 5.2в) следует иметь в виду, что <u>уравнения равновесия</u> можно применить как <u>ко всей системе</u> в целом, так и к <u>каждому брусу</u> в отдельности. В таких задачах общее число опорных реакций больше трех, но зато и независимых уравнений статики больше трех. Так для системы на рис. 5.2в, можно составить <u>дополнительное условие</u> – равенство нулю момента относительно шарнира «*К*».

Устройство опор балок в действительности далеко не всегда соответствует разобранным схемам. Поэтому, приступая к определению опорных реакций балки, необходимо технически грамотно схематизировать опорные части, заменяя действительную конструкцию наиболее приближающейся к ней схемой.

<u>Например</u>, если устройство опор балки допускает хотя бы небольшой поворот или перемещение – этого достаточно, чтобы считать опору шарнирной или подвижной.

# Внутренние силовые факторы. Метод сечений

Как уже ранее было показано, внешние нагрузки, действующие на сооружение, вызывают появление в нем внутренних усилий, которые определяются уже известным методом сечений, т.е. чтобы определить внутренние силовые факторы в произвольном поперечном сечении, необходимо мысленно рассечь балку на две части плоскостью и рассмотреть равновесие одной из ее частей.

При действии на брус внешних нагрузок, расположенных в плоскости *YOZ*, проходящей через ось бруса и ось симметрии поперечного сечения (т.е в случае плоского изгиба), в каждом поперечном сечении бруса возникают следующие внутренние силовые факторы (ВСФ), <u>действующие в этой же плоскости:</u>

а) продольная сила  $N_z$ , приложенная в центре тяжести сечения

б) поперечная сила  $Q_v$ , проходящая через его центр тяжести

в) изгибающий момент  $M_x$ 

Из рис. 5.1 видно, что деформация изгиба сопровождается растяжением одних волокон и сжатием других, т.е. в поперечных сечениях возникают нормальные напряжения при изгибе  $\sigma_z$ , а внешние поперечные силы уравновешиваются касательными напряжениями  $\tau_{yz}$  в сечениях.

В общем случае ВСФ  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$  являются статическим эквивалентом распределенных внутренних напряжений  $\sigma_z$  и  $\tau_{yz}$  и связаны между собой известными зависимостями (1.6)

$$M_x = \iint_A \sigma_z y dA, \qquad Q_y = \iint_A \tau_{yz} dA, \qquad N_z = \iint_A \sigma_z dA. \tag{5.1}$$

В сопротивлении материалов принято следующее <u>правило знаков</u> для внутренних усилий:

1. Изгибающий момент считают положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон.

2. Поперечную силу считают положительной, если она стремиться повернуть вырезанный из балки элемент бесконечно малой длины по ходу часовой стрелки.

Это правило иллюстрируется на рис. 5.4, где показаны положительные направления внутренних силовых факторов как для левой, так и для правой отсеченных частей.



Рис.5.4

Необходимо обратить особое внимание на правило знаков для поперченной силы: для левой отсеченной части  $+Q_y$  – вниз, для правой части  $+Q_y$  – вверх.

Внутренние силовые факторы в поперечном сечении определяются из условия равновесия отсеченной части стержня.

Для определения внутренних усилий, действующих <u>со стороны правой</u> <u>части бруса на левую</u>, рассмотрим равновесие левой отсеченной части бруса (рис. 5.4)

1. Сумма проекций на вертикальную ось у дает:  $-R_A + F + Q_y = 0$ , откуда

$$Q_v = R_A - F$$

2. Сумма моментов относительно оси x, проходящей через центр тяжести сечения (т.O) дает:  $-R_AS + F(S-a) + M_x = 0$ , откуда

$$M_{\rm r} = R_{\rm A}S - F(S-a)$$

Нетрудно убедиться в том, что внутренние силовые факторы, действующие <u>со стороны правой части на левую</u> равны по величине и противоположны по направлению силовым факторам, действующим <u>со стороны левой части на правую</u>.

Последние определяются из условия равновесия правой отсеченной части. Из этих соображений можно получить следующее <u>правило для определения</u> <u>внутренних силовых факторов</u> в любом поперечном сечении балки, изложенное в разделе 1 формулы (1.5).

1. Изгибающий момент  $M_x$  относительно центральной оси х в <u>поперечном сечении</u> по величине и по знаку равен сумме моментов относительно этой оси всех внешних сил, приложенных к правой части балки или сумме моментов (относительно той же оси), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к левой части:

$$M_x = \sum mom_x F_i^{\text{прав}} = -\sum mom_x F_i^{\text{лев}}$$
(5.2)

При этом моменты внешних сил F<sub>i</sub> положительны, когда они действуют против хода часовой стрелки и для левой и для правой части.

2. Поперечная сила  $Q_v$  в сечении по величине и по знаку равна сумме проекций на ось у всех внешних сил, приложенных к правой части балки, или сумме проекций (на ту же ось у), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к левой части бруса:

$$Q_{y} = \Sigma F_{iy}^{\text{прав}} = -\Sigma F_{iy}^{\text{лев}}$$
(5.3)

При этом проекции внешних сил на ось у  $F_{iy}$  положительны, когда они направлены вдоль оси у, т.е. вниз и для правой и для левой частей балки.

Отметим, что при определении внутренних усилий учитываются внешние моменты и силы, приложенные к балке по одну (и только одну) сторону сечения (т.е слева или справа от сечения).

С невыполнением этого условия связано большинство ошибок при определении внутренних усилий.

<u>Дифференциальные зависимости между  $M_{\underline{x}}$ ,  $Q_{\underline{y}}$  и q</u> Здесь  $q = q_{\underline{y}}$  – погонная (распределенная) нагрузка на балку в плоскости YOZ, она принимается положительной, если направлена вниз, т.е. вдоль оси у. В разделе 1 получены более общие дифференциальные уравнения равновесия прямого бруса (1.7), из которых в нашем случае будем использовать следующие (полагая  $m_x = 0$  – погонный изгибающий момент):

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \tag{5.4}$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q \tag{5.5}$$

Из двух полученных дифференциальных зависимостей вытекает третья:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q \tag{5.6}$$

## Построение эпюр изгибающих моментов и перерезывающих сил

Для расчетов на прочность необходимо отыскать опасное сечение балки, в котором действуют наибольшие внутренние силы. Для этого необходимо знать закон изменения внутренних усилий в поперечных сечениях балки по ее длине, возникающих от действия на балку нагрузок. Этот закон можно выразить в виде аналитических зависимостей и изобразить с помощью специальных графиков, называемых эпюрами, которые В масштабе изображают значения функций  $M_x$  и  $Q_y$  на протяжении всей балки.

Для определения этих эпюр определяют численные значения моментов и перерезывающих сил для ряда сечений и по ним строят соответствующие эпюры.

На основании зависимостей, характеризуемых выражениями (5.2) и (5.3) легко определить значения  $M_x$  и  $Q_y$  для любого сечения, а затем построить их эпюры.

<u>Условимся</u>: на эпюрах  $Q_y$  и  $M_x$  положительные ординаты откладывать вниз (т.е. вдоль оси *y*), а отрицательные – вверх от оси балки.

Рассмотрим несколько примеров, из которых можно усвоить технику построения эпюр  $Q_v$  и  $M_x$ .



<u>Дано:</u> Двухопорная балка с левой консолью. Нагрузки:  $F = 2\kappa H$ ,  $m_0 = 1\kappa Hm$ ,  $m_1 = 2\kappa Hm$ ,  $l_1 = 1m$ ,  $l_2 = 2m$ ,  $l_3 = 1,5m$ ,  $q_1 = q_2 = q_3 = 1\kappa H/m$ (рис.5.5). Решение задачи:

I. Начнем с определения опорных реакций: опора *В* – шарнирно-подвижная, в ней может возникнуть



только вертикальная реакция  $R_B$  – направим ее произвольно вверх. Опора A – шарнирно-неподвижная, в ней могут быть две реакции:  $H_A$  – горизонтальная и  $R_A$  –вертикальная, нарисуем их тоже произвольно. Для определения всех реакций составим три уравнения статики для всей балки:

1)  $\Sigma F_z = 0$ .  $H_A + 0 = 0$ . Откуда  $H_A = 0$ .

2) Для определения  $R_B$  составим сумму моментов относительно оси x, проходящей через т. A, т.е.  $\Sigma mom_{xA} = 0$ . Все внешние моменты, направленные против хода часовой стрелки, считаем положительными. Все погонные нагрузки  $q_i$  постоянные, поэтому их равнодействующие  $Q_i = q_i l_i$  действуют в середине участков.

$$q_1 l_1 (l_3 + l_2 + 0.5 l_1) + m_0 - R_B (l_3 + l_2) - q_2 l_2 (l_3 + 0.5 l_2) + F l_3 + q_3 l_3 \cdot 0.5 l_3 + m_1 = 0$$

Откуда  $R_B = 1,75$ кH.

Реакция *R<sub>B</sub>* получилась положительной, следовательно, направив ее вверх, мы угадали ее действительное направление.

3) Для определения  $R_A$  составим  $\Sigma mom_{xB} = 0$ :

$$R_A(l_2 + l_3) + m_1 - q_3 l_3 (l_2 + 0.5 l_3) - F l_2 + q_2 l_2 \cdot 0.5 l_2 + m_0 + q_1 l_1 \cdot 0.5 l_1 = 0.$$

Откуда  $R_A = 0,75$ кH.

Обязательно надо сделать <u>проверку реакций</u>, составив еще одно уравнение статики, например,  $\Sigma F_y = 0$ , т.е. суммировать все нагрузки и найденные реакции на ось *y*:  $q_1 l_1 - R_B - q_2 l_2 + F + q_3 l_3 - R_A = 0$ . Получим 0 = 0. Итак:  $R_A = 0.75$ кH;  $R_B = 1.75$ кH;  $H_A = 0$ .

II. Построение эпюр внутренних силовых факторов. В соответствии с характером конструкции балки и нагрузки делим балку на три участка. Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  будем строить по участкам, используя метод сечений и формулы (5.2) и (5.3):

<u>І участок</u> длиной  $l_1$ . Проведем сечение в пределах участка. Видно, что проще рассмотреть левую отсеченную часть. Тогда сечение определим расстоянием  $S_1$  от т.D.  $0 \le S_1 \le l_1$  (лев) – пределы изменения  $S_1$ .

$$Q_y = -\Sigma F_{iy}^{\text{jeb}} = -(q_1 S_1) = -q_1 S_1$$

т.е. эпюра  $Q_y$  линейна, поэтому для ее построения достаточно двух точек.

$$M_x = -\Sigma mom_x F_i^{\text{JEB}} = -(q_1 S_1 0, 5S_1) = -0, 5q_1 S_1^2$$

т.е. эпюра  $M_x$  меняется по закону квадратной параболы, поэтому необходимо не менее трех точек на ней.

Посчитаем величины  $Q_y$  и  $M_x$  при следующих значениях  $S_1$ :

$$S_{1} = 0 \begin{cases} Q_{y} = 0 \\ M_{x} = 0 \end{cases} S_{1} = l_{1} \begin{cases} Q_{y} = -1\kappa H \\ M_{x} = -0,5\kappa H M \end{cases} S_{1} = 0,5l_{1} M_{x} = -0,125\kappa H M$$

Строим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  на этом участке, откладывая в масштабе отрицательные значения  $Q_y$  и  $M_x$  вверх от оси бруса.

<u>II участок</u> длиной  $l_2$ . Рассмотрим тоже левую часть  $l_1 \le S_2 \le (l_1 + l_2)$  (лев)

$$\begin{aligned} Q_y &= -(q_1 l_1 - R_B - q_2 (S_2 - l_1)) = -q_1 l_1 + R_B + q_2 (S_2 - l_1); \\ M_x &= -(q_1 l_1 (S_2 - 0.5 l_1) - R_B (S_2 - l_1) + m_0 - q_2 (S_2 - l_1) 0.5 (S_2 - l_1)); \end{aligned}$$

Считаем:

$$S_{2} = l_{1} = 1 \text{ M } \begin{cases} Q_{y} = 0,75 \text{ kH} \\ M_{x} = -1,5 \text{ kHm} \end{cases} S_{2} = l_{1} + l_{2} \begin{cases} Q_{y} = 2,75 \text{ kH} \\ M_{x} = 2 \text{ kHm} \end{cases} S_{2} = 2 \text{ M } M_{x} = -0,25 \text{ kHm} \end{cases}$$

Строим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  на этом участке, учитывая, что для построения  $Q_y$  надо два значения (линейная зависимость), а для построения  $M_x$  необходимо не менее трех значений  $M_x$  в пределах участка (парабола).

<u>Ш участок</u>. Проводим сечение, видно, что проще рассмотреть правую отсеченную часть. В этом случае расстояние до сечения  $S_3$  будем отсчитывать от опоры A,  $0 \le S_3 \le l_3$  (правая часть)

a) 
$$Q_y = \Sigma F_{iy}^{\text{прав}} = -R_A + q_3 S_3$$
  
b)  $M_x = \sum mom_x F_i^{\text{прав}} = m_1 + R_A S_3 - q_3 S_3 0,5S_3$   
Считаем:  
 $(Q_x = 0.75 \text{ kH})$ 

$$S_{3} = 0 \begin{cases} Q_{y} = -0,75 \text{ kH} \\ M_{x} = 2 \text{ kHm} \end{cases} \qquad S_{3} = l_{3} = 1,5 \text{ m} \begin{cases} Q_{y} = 0,75 \text{ kH} \\ M_{x} = 2 \text{ kHm} \end{cases}$$

Эпюра  $Q_y$  линейна, строим ее по двум точкам. Видно, что при некотором значении  $S_3 = S_3^3$  эпюра  $Q_y$  меняет знак, т.е.  $Q_y = 0$ , а согласно зависимости (5.4) в этом сечении величина  $M_x = M_x^3$  – принимает экстремальное значение. Подставим в формулу а)  $Q_y = 0$  при  $S_3 = S_3^3$ :  $0 = -R_A + q_3 S_3^3$ , отсюда  $S_3^3 = 0,75$  м. Подставим  $S_3 = S_3^3 = 0,75$  м в формулу б) и найдем  $M_x^3 = 2,28$  кНм. Это будет третьей точкой для построения эпюры  $M_x$ .

Экстремальные значения  $M_x^3$  при построении эпюр  $M_x$  вычислять обязательно.

На эпюрах ставим знаки, размерность величин, штриховка перпендикулярна к оси бруса (вертикальная).

## Проверка построенных эпюр

Существует несколько способов проверки эпюр, в том числе с использованием зависимостей (5.4) и (5.5). Рассмотрим два самых простых способа:

1. Проверка эпюры  $Q_y$ : при движении по эпюре  $Q_y$  (ее обводке) справа – налево скачки на ней должны быть равны по величине и направлению локальным силам, приложенным к балке в этих сечениях. Проверим эпюру  $Q_y$  на рис. 5.5: в сечении A скачок вверх на 0,75кH, здесь действует  $R_A = 0,75$ кH вверх; сечение C, здесь скачок вниз от 0,75 до 2,75 т.е. на 2 кH, здесь действует F = 2кH вниз; в сечении B скачок от 0,75 до -1, т.е. на 1,75кH вверх, здесь действует  $R_B = 1,75$ кH вверх; в сечении D нет скачка и нет силы. Итак, во всех сечениях правило выполняется.

2. Проверка эпюры  $M_x$ : скачки на эпюре  $M_x$  по модулю должны быть равны локальным моментам, действующим на балку в этих сечениях. Проверим эпюру  $M_x$  на рис. 5.5: в сечении A скачок на 2кНм, здесь действует  $m_1 = 2$ кНм; в сечении B скачок на 1кНм, здесь приложен  $m_0 = 1$ кНм; больше скачков на эпюре  $M_x$  нет и на балке нет локальных моментов.

Итак, во всех сечениях правило выполняется. Наличие на эпюре  $M_x$  скачка без приложенного момента на балке говорит об ошибочности эпюры  $M_x$ .

## Пример 2.



Рис.5.6

Опорные реакции в заделке  $R_k$ ,  $H_k$ ,  $M_k$  можно определить из обычных трех уравнений статики. По виду конструкции арки и ее нагрузки имеем только один участок. В произвольном месте арки делаем разрез (сечение) в т. D. Очевидно, что проще рассмотреть ту часть арки CD, где приложены нагрузки, тогда не надо определять все реакции опор  $R_k$ ,  $H_k$ ,  $M_k$ . Положение разреза т. D определим угловой координатой  $\varphi$  (т. D надо выбрать так на рис. 5.6, чтобы угол  $\varphi$  был *острым*). В сечении D вводим оси YDZ так, чтобы ось Z была направлена по <u>касательной</u> к арке в т. D, а ось Yпо радиусу. Здесь  $0 \le \varphi \le 180^\circ$ , т.е. в пределах всей арки рассматривается *левая* часть арки от разреза. Силы F и P разложим на составляющие по осям Y и Z на рис. 5.6. При этом получим два *прямоугольных* треугольника, в которых необходимо найти  $\varphi$  по признакам равенства углов (два угла равны, если их стороны параллельны или взаимно перпендикулярны).

Кроме  $Q_y$  и  $M_x$  в поперечном сечении арки возникают  $N_z$  – внутренние продольные силы, которые определяются по формулам, аналогичным (5.2) и (5.3), полученным в разделе 1.

$$N_z = \Sigma F_{iz}^{\text{прав}} = -\Sigma F_{iz}^{\text{лев}}$$
(5.7)

Учитывая, что мы рассматриваем *левую* отсеченную часть арки, по формулам (5.2), (5.3) и (5.7) получим:

a) 
$$N_z = -(F_z - P_z) = -(F\sin\varphi - P\cos\varphi) = -F\sin\varphi + P\cos\varphi$$
  
B)  $Q_y = -(F_y + P_y) = -(F\cos\varphi + P\sin\varphi) = -F\cos\varphi - P\sin\varphi$  (5.8)

c)  $M_x = -(m_0 + F \cdot BD + P \cdot CB) = -m_0 - F \cdot R \sin \varphi - P(R - R \cos \varphi)$ 

Здесь  $\overline{DB}$  и  $\overline{CB}$  – плечи у сил F и P, определяются из рис. 5.6. Все эпюры криволинейны, поэтому определяем не менее трех точек на каждой эпюре по формулам (5.8):

$$\varphi = 0 \begin{cases} N_z = 2\kappa H \\ Q_y = -4\kappa H \\ M_x = -2\kappa H m \end{cases} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \begin{cases} N_z = -4 \\ Q_y = -2 \\ M_x = -14 \end{cases} \qquad \varphi = \pi \begin{cases} N_z = -2 \\ Q_y = 4 \\ M_x = -10 \end{cases}$$

Выбираем масштабы для  $N_z, Q_y, M_x$  и откладываем полученные значения с учетом знаков: положительные – внутрь, т.е. вдоль оси Y, отрицательные – наружу, против оси У. В каждом сечении величины откладываются по радиусам. На каждой эпюре полученные точки соединяем плавными кривыми. Далее, при необходимости, надо уточнить эпюры с учетом следующих правил:

1. Если на эпюре  $N_z$  меняется знак, надо найти величину  $\varphi = \varphi_1$ , где  $N_z$ = 0. В этом сечении, при  $\varphi = \varphi_1$  на эпюре  $Q_y$  будет экстремум. Для этого в формулу (5.8а) подставим  $N_z = 0$  при  $\varphi = \varphi_1$  и найдем угол  $\varphi_1$ . Далее в (5.8в) подставим  $\varphi = \varphi_1$  и найдем  $Q_y^3$ . На нашей эпюре  $N_z$  этот случай присутствует. Вычислим:

$$0 = -F\sin\varphi_1 + P\cos\varphi_1$$

Отсюда tg $\varphi_1 = \frac{P}{F} = 0,5$  и угол  $\varphi_1 = 26^{\circ}30'$  $Q_v^{\mathfrak{I}} = -F\cos\varphi_1 - P\sin\varphi_1 = -4,47\kappa\mathrm{H}$ 

2. Если на эпюре  $Q_v$  меняется знак (как у нас), надо найти  $\varphi = \varphi_2$ , где  $Q_v = 0$  по (5.8в). В этом сечении, т.е. при  $\varphi = \varphi_2$  на эпюре  $N_z$  и на эпюре  $M_x$ будут экстремумы. Вычислим их:

 $\Pi o (5.8B) \qquad 0 = -F \cos \varphi_2 - P \sin \varphi_2$  $tg \varphi_2 = -\frac{F}{P} = -2$ и угол  $\varphi_2 = 116^{\circ}30'$ 

По (5.8а) и (5.8с) найдем при  $\varphi = \varphi_2$ 

$$N_z^3 = -F\sin\varphi_2 + P\cos\varphi_2 = -4,47\kappa\mathrm{H}$$

$$M_x^3 = -m_0 - FR\sin\varphi_2 - P(R - R\cos\varphi_2) = -14,94$$
кHм

Найденные экстремальные значения откладываем на эпюрах и с их учетом строим окончательные эпюры  $N_z, Q_v$  и  $M_x$ , которые показаны на рис. 5.6. На эпюрах ставятся знаки, штриховка делается по радиусам.

## Нормальные напряжения при чистом изгибе

Выше (см. зависимости (5.1)) было установлено, что при отсутствии в балке продольных сил нормальные напряжения в поперечных сечениях зависят от изгибающего момента, а касательные – лишь от поперечной силы.

Это позволяет упростить вычисление  $\sigma_z$ , а именно провести его для случая, когда  $Q_y = 0$ . Такой случай, как уже было установлено выше, называется *чистым изгибом*.

Кроме того полагаем, что балка <u>симметрична</u> относительно плоскости внешних сил, поэтому обе ее половинки деформируются симметрично относительно этой плоскости, т.е. рассматриваем *случай плоского изгиба*.

Уравнения статики (5.1) в таком случае имеют вид

$$\int_{A} \sigma_z dA = 0 \quad \text{i} \qquad \int_{A} \sigma_z \cdot y \cdot dA = M_x \tag{5.9}$$

Однако найти  $\sigma_z$  из этих уравнений нельзя, т.к. мы не знаем закона распределения  $\sigma_z$  по ординате *y*.

Для решения задачи необходимо привлечь условия деформации, которые можно сформулировать только на основании экспериментальных наблюдений. Так, например, если на боковую поверхность бруса нанести сетку в виде продольных и поперечных прямых и загрузить брус по концам положительными изгибающими моментами, то после деформации продольные линии примут криволинейное очертание, а <u>поперечные линии останутся прямыми</u>. Этот факт и другие экспериментальные исследования изгиба балок дают основания для ряда <u>допущений</u>, положенных в основу дальнейших выводов:

- 1. При чистом изгибе поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза Бернулли);
- 2. Продольные волокна друг на друга не давят и испытывают простое линейное растяжение или сжатие;
- 3. Материал балки подчиняется закону Гука, причем модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.





Рассмотрим элемент бруса длиной dz, который после деформации искривляется (рис. 5.7). Два смежных сечения, согласно принятой гипотезе Бернулли, останутся плоскими, но наклонятся друг к другу, образовав между собой угол  $d\varphi$ . При этом верхние волокна окажутся сжатыми, а нижние растянутыми. На каком-то уровне по высоте балки волокна останутся

недеформированными, назовем их *нейтральными*. На поперечном сечении (рис. 5.7б) поверхность, в которой лежат нейтральные волокна, образует след

– нейтральную линию ОХ. Радиус кривизны нейтрального волокна обозначим
 *р*.

Найдем удлинение какого-либо волокна *AB*, расположенного на расстоянии *y* от нейтрального слоя и растянутого напряжением  $\sigma_z$ . Первоначальная длина этого волокна равна  $dz = \bigcirc O_1 O_2 = \rho \cdot d\varphi$ . После деформации его длина стала равной  $\bigcirc A_1 B_1 = (\rho + y) d\varphi$ . Абсолютное удлинение  $\Delta l = (\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi = y d\varphi$ . Относительное удлинение равно

$$\varepsilon_z = \frac{y \, d\varphi}{\rho \, d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

На основании второго и третьего допущений для вычисления напряжений можно воспользоваться <u>законом Гука при растяжении</u>

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$$
 или  $\sigma_z = \frac{E}{\rho} \cdot y$  (5.10)

Из выражения (5.10) видно, что напряжения распределены по высоте сечения по линейному закону. Однако вычислить их значения еще нельзя, т.к.  $\rho$  неизвестно, следовательно, неизвестно расположение нейтрального слоя по высоте сечения.

Подставим зависимость (5.10) в первое уравнение статики (5.9)

$$\int_{A} \frac{E}{\rho} y \, dA = 0$$

Так как  $\frac{E}{\rho}$  = const ≠ 0, то

$$\int_{A} y \, dA = 0 = S_x$$

Полученный интеграл представляет собой *статический момент площади* поперечного сечения относительно нейтральной оси. Так как он равен нулю, то, следовательно, *нейтральная ось должна проходить через центр тяжести сечения*.

Подставим теперь зависимость (5.10) во второе уравнение (5.9)

$$M_x = \int_A \frac{E}{\rho} y \cdot y \, dA = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 \, dA.$$

Как известно, интеграл, входящий в это выражение, представляет собой момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси *X*, т.е.

$$\int_{F} y^2 dA = J_x$$

поэтому

$$M_x = \frac{E}{\rho} J_x$$

откуда находим кривизну нейтрального слоя:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \tag{5.11}$$

Подставив это выражение в формулу (5.10) получим

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \tag{5.12}$$

<u>Примечание:</u> Если главная центральная ось у сечения не является осью симметрии сечения (например, швеллер), то для плоского изгиба необходимо, чтобы внешняя нагрузка и опорные реакции лежали в плоскости, параллельной плоскости *YOZ* и проходящей через *центр жесткости сечения*.

#### Экстремальные напряжения. Момент сопротивления сечения

Из формулы (5.12) видно, что экстремальные (max) напряжения (растягивающие (p) и сжимающие (сж)) будут в точках сечения балки, наиболее удаленных от нейтральной оси *x*:

$$\sigma_{z\max}^{p} = \frac{M_{x}}{J_{x}} y_{\max}^{p}, \qquad \sigma_{z\max}^{cw} = \frac{M_{x}}{J_{x}} y_{\max}^{cw}$$

Здесь  $M_x$  и координаты  $y_{\text{max}}$  надо подставлять со своими знаками, при этом автоматически получается знак  $\sigma_{z \text{max}}$ . Это важно для балок, изготовленных из хрупких материалов (чугун, бетон), которые хорошо работают на сжатие и плохо на растяжение. Балки из пластичных материалов (стали) одинаково сопротивляются растяжению и сжатию, поэтому обычно их поперечные сечения симметричны относительно оси *x* (двутавр), для них

$$\left| y_{\max}^{p} \right| = \left| y_{\max}^{c \kappa} \right| = \left| y_{\max} \right| \left| u \right| \sigma_{z}^{\max} \right| = \frac{M_{x}}{J_{x}} \left| y_{\max} \right|$$

Обозначим

$$W_x = \frac{J_x}{|y_{\text{max}}|}$$
 – момент сопротивления симметричного сечения (5.13)

Тогда

 $\left|\sigma_{z}^{\max}\right| = \frac{M_{x}}{W_{r}} \tag{5.14}$ 

Здесь знак напряжений для расчетов на прочность роли не имеет и определяется по физическому смыслу (в растянутой зоне сечения « $\oplus$ »). Для прямоугольного сечения шириной *b* и высотой *h*:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \ W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

Для круглого сечения радиуса *R* 

$$J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4}, \ W_x = W_y = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4}$$

Для кольцевого сечения с R и r

$$J_{x} = J_{y} = \frac{\pi}{4}(R^{4} - r^{4}), W_{x} = W_{y} = \frac{\pi}{4R}(R^{4} - r^{4}),$$

Значения  $W_x$  для стандартных двутавров и швеллеров приводятся в таблицах ГОСТа.

Балки из хрупких материалов обычно изготавливают несимметричными относительно оси *x*. При этом, для равнопрочности их желательно, чтобы расстояния до крайних точек сечения от оси *x* были пропорциональны допускаемым напряжениям на растяжение и сжатие.

# <u>Нормальные и касательные напряжения в прямоугольном сечении балки</u> <u>при поперечном плоском изгибе</u>

В отличие от чистого изгиба при поперечном изгибе в сечениях балки, наряду с нормальными напряжениями, появляются также и касательные напряжения, параллельные равнодействующей им силе

$$Q_y = \int_A \tau_{yz} dA$$

На основании закона парности касательных напряжений, последние возникают также и в продольных сечениях и вызывают сдвиги отдельных волокон относительно друг друга. Касательные напряжения в продольных сечениях обращаются в нуль на верхний и нижний поверхностях бруса и возрастают по какому-то закону к нейтральной оси.

Следовательно, поперечные сечения балки, плоские до деформации, при поперечном изгибе от  $M_x$ , оставаясь плоскими, поворачиваются, а под действием касательных напряжений, возникающих от  $Q_y$ , искривляются. Это искривление, в соответствии с характером изменения величины касательных напряжений, возрастает от краев балки к нейтральной оси (рис. 5.8). Следовательно, гипотеза плоских сечений при поперечном изгибе нарушается.



\_\_\_\_

1) Рассмотрим случай, когда  $Q_y$  = const по длине балки Так как в двух соседних сеченииях  $Q_y$  одинаковы, значит, искривления сечений будут одинаковыми и продольные

волокна между этими сечениями не получат дополнительных удлинений по сравнению с удлинениями от изгиба сечения. Поэтому, в этом случае, для определения нормальных напряжений можно пользоваться формулой (5.12), полученной для чистого изгиба

**2)**  $Q_y \neq \text{const, т.е. } Q_y$  меняется по длине балки.

В этом случае абсолютные сдвиги не одинаковы и, следовательно, за счет сдвига продольные волокна получают дополнительные удлинения и, значит, будет добавка в нормальных напряжениях. Однако, теоретические и экспериментальные исследования показали, что влияние указанного эффекта на величину нормальных напряжений невелико и им обычно на практике пренебрегают.

Таким образом, гипотеза плоских сечений *условно* распространяется также и на поперечный изгиб.

Следовательно, при поперечном изгибе, нормальные напряжения определяются по той же формуле чистого изгиба

$$\sigma_z \approx \frac{M_x}{J_x} y$$

Относительно распределения касательных напряжений  $au_{yz}$  Д.И.

Журавским были сделаны следующие допущения:

- 1. Касательные напряжения в любой точке сечения направлены параллельно поперечной силе  $Q_v$ ;
- 2. Касательные напряжения, действующие на одном и том же расстоянии от нейтральной оси *x*, равны между собой, т.е. по ширине сечения касательные напряжения распределяются равномерно.

Исследования показывают, что оба допущения оказываются достаточно правильными для балок прямоугольного сечения, если высота балки больше ширины.

С учетом этих допущений и была получена формула Журавского в виде

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{orc}}}{J_x b} \tag{5.15}$$

Здесь: b — ширина сечения, где определяются  $\tau_{yz}$ ;  $S_x^{\text{отс}}$  — статический момент относительно оси *х отсеченной* части сечения.

Выясним характер распределения  $\tau_{yz}$  по высоте прямоугольного сечения балки (рис. 5.9), в котором действуют  $Q_y > 0$  (вниз).



Рис.5.9

Найдем  $\tau_{yz}$  в произвольном сечении *с-с* на расстоянии *у* от оси *х*. Ниже сечения *с-с* будет отсеченная площадь  $A_{orc}$  (заштрихована на рис. 5.9). Расстояние от оси *х* до центра тяжести  $A_{orc}$  обозначим  $Y_c$ . Тогда
$$S_x^{\text{otc}} = A_{\text{otc}} \cdot Y_c = b \left(\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{8} \left(h^2 - 4y^2\right)$$

Из рис. 5.9 видно:

$$A_{\text{orc}} = b\left(\frac{h}{2} - y\right), \ Y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)$$

Подставим  $S_x^{\text{отс}}$  в формулу (5.15)

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y}{J_x} \frac{h^2 - 4y^2}{8}$$
(A)

Видно, что  $\tau_{vz}$  по высоте сечения (координате y) меняется по закону квадратной параболы. Для построения эпюры  $\tau_{yz}$  поэтому надо не менее трех точек подсчитать по формуле (А)

1) y = 0 (точка на оси x)  $\tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{\max} = \frac{Q_y h^2}{8J_x}$ 2)  $y = \frac{h}{2} \tau_{yz}^{(2)} = 0$ 3)  $y = \frac{h}{4} \tau_{yz}^{(3)} = \frac{Q_y}{I} \frac{3h^3}{32}$ 

По этим точкам строим нижнюю половину эпюры  $\tau_{yz}$  на рис. 5.9. Ввиду симметрии прямоугольника относительно оси x и эпюра  $au_{yz}$  симметрична относительно x. Напряжения  $au_{yz}$  распределены по сечению и направлены, как и  $Q_y$ , вниз.



Касательные напряжения в двутавровом сечении

Рис.5.10

Для стенки, вследствие малой ее ширины (*d*), допущения Журавского справедливы и  $\tau_{yz}$  в ней можно вычислить по (5.15). Для произвольного сечения на расстоянии «*y*» от оси *x* в пределах стенки, т.е.  $0 \le y \le k$ , где k = 0.5h - t, можно записать с учетом обозначений на рис. 5.10

$$S_x^{\text{orc}} = A_c \cdot Y_c + A_{\Pi} \cdot Y_{\Pi} = 0.5d(k^2 - y^2) + bt(k + 0.5t)$$
(B)  
- v)  $Y = 0.5(k + y) - A_{\Pi} = bt - Y_{\Pi} = k + 0.5t$ 

где:  $A_c = d(k - y)$ ,  $Y_c = 0,5(k + y)$ ,  $A_{\Pi} = bt$ ,  $Y_{\Pi} = k + 0,5t$ 

Подставляем (В) в формулу (5.15), в которой заменяем размер «*b*» на размер «*d*» - ширина стенки, получим расчетную формулу, по которой можно построить эпюру  $\tau_{yz}$  в стенке. Эпюра  $\tau_{yz}$  криволинейна (в (В) «*y*» в квадрате), поэтому надо не менее трех точек. Считаем:

1) y = 0, по (В) находим  $S_{x(1)}^{\text{отс}}$ , подставим в (5.15) и вычислим  $\tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{\max}$  и откладываем ее в масштабе на эпюре  $\tau_{yz}$  рис. 5.10;

2) y = 0.5k, аналогично вычислим  $\tau_{yz}^{(2)}$ ;

3) y = k, находим  $\tau_{yz}^{(3)}$ 

По этим точкам строим нижнюю часть эпюры  $\tau_{yz}$ , а т.к. двутавр симметричен относительно оси *x*, то и эпюра  $\tau_{yz}$  симметрична. Направление  $\tau_{yz}$  совпадает с направлением  $Q_y$ . Если  $Q_y > 0$  (вниз), то и  $\tau_{yz}$  в стенке направлены вниз, а закон их изменения по высоте стенки показан на эпюре  $\tau_{yz}$ .

Полка двутавра широкая и малой высоты и допущения Журавского для нее несправедливы и, следовательно, пользоваться (5.15) нельзя.

В консолях полок возникают горизонтальные  $\tau_{xz}$ , которые можно найти по формуле

$$\tau_{xz} = \frac{Q_y \cdot S_x^{\omega}}{J_x t} \tag{5.16}$$

Определение  $S_x^{\omega}$  поясним с помощью рис. 5.10.

На верхней левой консоли полки проведем сечение на расстоянии  $\omega$  и в этом сечении найдем  $\tau_{xz}$ . Обозначим длину консоли полки m = 0,5b - 0,5d. Тогда  $0 \le \omega \le m$ ,  $A_{\omega}$  – отсеченная площадь

$$S_x^{\omega} = A_{\omega} \cdot Y_{\Pi} = t\omega(k+0.5t) \tag{C}$$

где

$$A_{\omega} = t \cdot \omega, \quad Y_{\Pi} = k + 0.5t$$

Из зависимости (С) видно, что  $S_x^{\omega}$  линейно меняется по  $\omega$  и, следовательно, из (5.16) видно, что  $\tau_{xz}$  линейно меняются по длине консоли полки. Поэтому, для построения эпюры  $\tau_{xz}$  надо две точки:

1)  $\omega = 0$  (конец консоли), по (С)  $S_{x(1)}^{\omega} = 0$  и из (5.16)  $\tau_{xz}^{(1)} = 0$ .

2)  $\omega = m$ , вычислим  $S_{x(2)}^{\omega}$  и по (5.16)  $\tau_{xz}^{(2)} = \tau_{xz}^{\max}$ 

Аналогичный закон изменения  $\tau_{xz}$  будет и в трех других консолях полок.

Направления  $\tau_{xz}$  во всех полках показаны на рис. 5.10 при  $Q_y > 0$ . Они с  $\tau_{yz}$  в стенке составляют единый поток. Если  $\tau_{yz}$  направлены вниз ( $Q_y > 0$ ), то  $\tau_{xz}$  в верхней полке «сходятся», а в нижней полке «расходятся». Если  $Q_y < 0$ , направления  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{xz}$  меняются на противоположные.

## <u>Условия прочности при поперечном изгибе.</u> <u>Подбор сечений</u>

Расчет балок на прочность обычно ведется по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. Обозначая эти напряжения  $\sigma_z^{\max}$ , получим <u>условие прочности</u>

$$\sigma_z^{\max} \leq [\sigma]$$

I. Так как пластичные материалы одинаково сопротивляются как растяжению, так и сжатию, то для них  $[\sigma_p] = [\sigma_{c\pi}] = [\sigma]$ . Поэтому балки из пластичных материалов обычно имеют поперечные сечения, симметричные относительно своих нейтральных осей. <u>Подбор сечения</u> проводится из условия прочности действию наибольшего по абсолютной величине изгибающего момента

$$\sigma_z^{\max} = \frac{\left| M_x^{\max} \right|}{W_x} \le [\sigma] \tag{5.17}$$

Отсюда определяется необходимая величина момента сопротивления

$$W_{x}^{\mathrm{H}} \geq \frac{\left|M_{x}^{\max}\right|}{[\sigma]}$$

Размеры сечения (при выбранной форме) подбираются так, чтобы его момент сопротивления равнялся или был чуть больше требуемой величины.

При проектировании балки <u>прямоугольного сечения</u>, задаются соотношением сторон  $k = \frac{h}{b}$ , тогда  $W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{6k}$  и  $h = \sqrt[3]{6kW_x^{\text{H}}}$ . Для <u>круглого сечения</u>  $W_x = \frac{\pi r^3}{4}$ , откуда  $r = \sqrt[3]{\frac{4W_x^{\text{H}}}{\pi}}$ .

Подбор стальных балок <u>прокатного профиля</u> производится с помощью таблиц сортамента по величине  $W_x$ .

В случае применения тонкостенных профилей типа двутавра или деревянных прямоугольных сечений балок, при значительной поперечной нагрузке  $Q_y$ , проводится проверка по максимальным касательным напряжениям:

$$\tau_{yz}^{\max} = \frac{\left| Q_{y}^{\max} \right| \cdot S_{x (\max)}^{\text{orc}}}{J_{x} \cdot b} \leq [\tau]$$
(5.18)

 $[\sigma]$  и  $[\tau]$  берутся из нормативных документов для каждого материала.

Подобранные сечения балки должны удовлетворять условиям прочности как по нормальным (5.17), так и по касательным напряжениям (5.18). Для деревянных балок расчет на прочность по  $\tau_{yz}^{max}$  может иметь решающее значение, т.к. дерево плохо сопротивляется скалыванию вдоль волокон. Допускается перегрузка до 5% от [ $\sigma$ ] и [ $\tau$ ].

Балки из хрупких материалов, плохо работающих на растяжение, изготавливают обычно с несимметричным относительно оси *х* сечением



тировании таких сечений, необходимо, чтобы  $y_{max}^{cw} > y_{max}^{p}$ , а для равнопрочности желательно, чтобы

$$y_{\text{max}}^{\text{cw}} / y_{\text{max}}^{\text{p}} \approx [\sigma_{\text{cw}}] / [\sigma_{\text{p}}]$$

В железобетонных балках растянутая зона армируется металлом, чтобы увеличить  $[\sigma_{\rm p}]$ .

## Определение деформации балок при изгибе

## Прогиб и поворот сечения балки

При действии внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей инерции сечения балки, наблюдается искривление ее оси в той же плоскости, происходит плоский изгиб.



На рис. изображена искривленная ось балки в плоскости YOZ, защемленной одним концом и нагруженной на другом конце силой F. Центр тяжести C какого-либо сечения с абсциссой z при деформации балки переместится в т.  $C_1$ .

Перемещение  $CC_1$  ц.т. сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется *прогибом балки* в этом сечении. <u>Прогиб обозначается</u> <u>буквой</u> V.

$$V = CC_1$$

При деформации балки сечение поворачивается на некоторый угол  $\theta$ , который называется *углом поворота сечения*.

Обе величины, определяющие деформации балки, являются функцией от *Z*.

Уравнение V = f(z) – представляет собой уравнение кривой, по которой изогнется ось балки, это будет *уравнение изогнутой оси балки*.

Касательная к изогнутой оси балки в т.  $C_1$  составит с осью Z угол, равный  $\theta$ . С другой стороны, тангенс угла, образованного касательной к кривой V = f(z) и осью Z, как известно, равен

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dV}{dz}$$

Так как на практике прогибы балки обычно малы по сравнению с длиной балки, то углы  $\theta$  малы.

Для таких углов можно считать, что тангенс угла равен самому углу, выраженному в радианах. Следовательно

$$\theta = \frac{dV}{dz} = V' \tag{5.19}$$

При выбранных нами направлениях координатных осей (см. рис) положительный прогиб будет вниз, а положительный угол поворота сечения  $\theta$  – по направлению вращения часовой стрелки.

## Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Для получения зависимости V = f(z) надо установить, как зависят деформации балки от внешних сил, изгибающих ее, от размеров и материала балки.

Такая зависимость была получена нами ранее при выводе формулы нормальных напряжений при изгибе в виде связи кривизны оси балки с изгибающим моментом (5.11):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \tag{a}$$

где *р* – радиус кривизны изогнутой оси балки.

Однако в общем случае использовать зависимость (а) для определения прогибов не удается.

С другой стороны, из курса высшей математики известна зависимость между радиусом кривизны плоской кривой и координатами Z и V ее точек:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{V''}{\left(1 + (V')^2\right)^{3/2}} \tag{6}$$

Приравнивая выражения (а) и (б) исключим радиус кривизны:

$$\frac{M_x}{EJ_x} = \pm \frac{V''}{\left(1 + (V')^2\right)^{3/2}}$$
(B)

Это дифференциальное уравнение изогнутой оси, или дифференциальное уравнение упругой линии.

Выше мы уже отмечали, что  $V' = \theta$  – величины очень малые, поэтому их квадратом можно пренебречь по сравнению с единицей. Тогда уравнение (в) упростится

$$\pm E J_x V'' \approx M_x \tag{(\Gamma)}$$

Это приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси. Правило знаков для изгибающего момента  $M_x$  установлено ранее.

Знак в формуле (г) зависит от выбора направлений осей координат. В нашем случае, когда ось z горизонтальна и направлена вправо, а ось y – вниз, надо брать знак «–». Итак

$$EJ_x V'' = -M_x \tag{5.20}$$

Если ось *у* направлена вверх, надо взять знак «+».

## Интегрирование дифференциального уравнения упругой линии

Для того, чтобы получить аналитические выражения для прогибов и углов поворота необходимо найти решение дифференциального уравнения (5.20). Правая часть уравнения является известной функцией для каждой конкретной балки с конкретным загружением. Интегрируя его один раз, получим:

$$EJ_{x}V' = EJ_{x}\theta = -\int M_{x}dz + C$$

Это выражение определяет закон изменения углов поворота сечений балки.

После повторного интегрирования найдем уравнение оси балки

$$EJ_xV = -\int dz \int M_x dz + Cz + D$$

Постоянные интегрирования С и D находятся из граничных условий.

Уравнения (5.20) записываются для каждого участка балки и интегрируются. При большом числе участков определение const  $C_i$  и  $D_i$  осложняется, т.к. приходится решать большое число совместных алгебраических уравнений, из которых они вычисляются. Поэтому для таких балок были разработаны другие методы.

Один из таких методов сводится к уравниванию однотипных const интегрирования, для чего, при составлении аналитических выражений изгибающих моментов  $M_x$  по участкам балки, необходимо соблюдать ряд условий.

## <u>Метод уравнивания произвольных постоянных</u> <u>(метод Клебша)</u>

Равенство между собой произвольных постоянных ( $C_1 = C_2 = ... = C$  и  $D_1 = D_2 = ... = D$ ) при большом числе участков балки возможно при соблюдении следующих условий:

- 1) Отсчет координат S<sub>i</sub> всех участков должен вестись от одного конца балки.
- 2) Все составляющие выражения  $M_x$  предыдущего участка, должны сохраняться неизменными в выражениях  $M_x$  последующего участка. Поэтому, если на каком-то участке появляется распределенная нагрузка q, не идущая до конца балки, то ее надо продлить до конца балки, добавив на этих же участках такую же распределенную нагрузку с противоположном знаком.
- 3) Сосредоточенные моменты  $m_0$  вводятся в виде  $m_0(S_i d)^0$ , где d -расстояние от начала балки до сечения, где приложены  $m_0$ .
- 4) Интегрирование дифференциальных уравнений должно вестись без раскрытия скобок.

Поясним выполнение перечисленных условий на примере:

<u>Пример (рис.5.11)</u>:

Дано:  $l_1 = 1,5$ м;  $l_2 = 4,5$ м;  $l_3 = 4$ м; F = 20кH; q = 45кH/м;  $m_0 = 20$ кHм;  $E = 2 \cdot 10^4$  кH/см<sup>2</sup>;  $[\sigma] = 16$ кH/см<sup>2</sup>;  $[\tau] = 10$ кH/см<sup>2</sup>;



Рис.5.11

На рис. 5.11 сплошными линиями и перечеркнутыми показаны нагрузки *q* – заданные, а пунктиром показаны добавки нагрузок *q* согласно п.2 метода Клебша. Сначала учитываем только заданные нагрузки *q*. По правилам, показанным при решении примера 1 на рис. 5.5, находим:

1) Из уравнений равновесия всей балки при заданных нагрузках находим все опорные реакции:  $R_A = -154, 12$  кH;  $R_B = 84, 12$  кH;  $H_B = 0$ .

2) Строим эпюру  $Q_y$  и эпюру  $M_x$ , из которых находим  $M_x^{\text{max}} = -105,68$ кНм и  $Q_y^{\text{max}} = -106,62$ кН

Для балки подберем стандартный двутавр:

Из условия прочности балки (5.17) находим

$$W_x^{\rm H} \ge \frac{\left|M_x^{\rm max}\right|}{[\sigma]} = \frac{105,68 \cdot 100}{16} = 660,5 \,{\rm cm}^2$$

Из таблиц сортамента двутавров видно, что  $W_x^{\text{H}}$  лежит между: №33  $W_x^{\text{T}} = 597 \text{ см}^3$  и №36  $W_x^{\text{T}} = 743 \text{ см}^3$ . Сначала проверим №33 с учетом допускаемой перегрузки 5% от [ $\sigma$ ], т.е. [ $\sigma$ ]=16÷16,8кH/см<sup>2</sup>.

$$\sigma_z^{\max} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{W_x^{\mathrm{T}}} = \frac{10568}{597} = 17,7 \,\mathrm{\kappa H/cm^2}$$

Итак, №33 не подходит балке даже с учетом перегрузки.

Проверяем №36

$$\sigma_z^{\text{max}} = \frac{\left| M_x^{\text{max}} \right|}{W_x^{\text{T}}} = \frac{10568}{743} = 14,22 \le [\sigma] = 16 \text{ kH/cm}^2$$

Проверяем №36 по условию прочности (5.18), подставляя данные из сортамента:  $b = d_{\rm T} = 0,75$ см;  $S_{x\,({\rm max})}^{\rm orc} = S_x^{\rm T} = 423$ см<sup>3</sup>;  $J_x^{\rm T} = 13380$ см<sup>4</sup>

$$\tau_{yz}^{\max} = \frac{\left| Q_{y}^{\max} \right| \cdot S_{x}^{T}}{J_{x}^{T} d_{T}} = \frac{106,62 \cdot 423}{13380 \cdot 0,75} = 4,49 \le [\tau] = 10 \text{ kH/cm}^{2}$$

Итак, окончательно для балки выбираем двутавр №36, который отвечает всем условиям прочности.

Для определения деформации балки, т.е.  $\theta$  – углов поворота сечений и *V* – прогибов балки, с соблюдением условий метода Клебша для всех трех участков балки, записываем дифференциальные уравнения (5.20) и интегрируем их:

**І участок**  $0 \le S_1 \le l_1$  левая часть (см. рис. 5.10)

$$\begin{bmatrix} a \\ EJ_{x}V_{1}'' = -\left(-\left(FS_{1} - q\frac{S_{1}^{2}}{2}\right)\right) \\ B \\ EJ_{x}\theta_{1} = F\frac{S_{1}^{2}}{2} - q\frac{S_{1}^{3}}{6} + C_{1} \\ c \\ EJ_{x}V_{1} = F\frac{S_{1}^{3}}{6} - q\frac{S_{1}^{4}}{24} + C_{1}S_{1} + D_{1} \end{bmatrix}$$

Здесь в формуле а) первый минус – т.к. левая часть, второй минус – т.к. он стоит в (5.20)

II участок  $l_1 \le S_2 \le (l_1 + l_2) = d$  левая часть

$$II \begin{cases} a) EJ_x V_2'' = -\left(-\left(FS_2 - q\frac{S_2^2}{2} - R_A(S_2 - l_1)\right)\right) \\ B) EJ_x \theta_2 = F\frac{S_2^2}{2} - q\frac{S_2^3}{6} - R_A\frac{(S_2 - l_1)^2}{2} + C_2 \\ c) EJ_x V_2 = F\frac{S_2^3}{6} - q\frac{S_2^4}{24} - R_A\frac{(S_2 - l_1)^3}{6} + C_2S_2 + D_2 \end{cases}$$

Здесь слагаемое с  $R_A$  интегрируется без раскрытия скобок согласно п.4 метода Клебша.

III участок  $d \le S_3 \le (l_1 + l_2 + l_3) = L$  левая часть

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{a)} EJ_{x}V_{3}'' = -\left(-\left(FS_{3} - q\frac{S_{3}^{2}}{2} - R_{A}(S_{3} - l_{1}) + m_{0}(S_{3} - d)^{0} + 2q\frac{(S_{3} - d)^{2}}{2}\right)\right) \\ \text{III} \\ \text{B)} EJ_{x}\theta_{3} = F\frac{S_{3}^{2}}{2} - q\frac{S_{3}^{3}}{6} - R_{A}\frac{(S_{3} - l_{1})^{2}}{2} + m_{0}(S_{3} - d) + 2q\frac{(S_{3} - d)^{3}}{6} + C_{3} \\ \text{c)} EJ_{x}V_{3} = F\frac{S_{3}^{3}}{6} - q\frac{S_{3}^{4}}{24} - R_{A}\frac{(S_{3} - l_{1})^{3}}{6} + m_{0}\frac{(S_{3} - d)^{2}}{2} + 2q\frac{(S_{3} - d)^{4}}{24} + C_{3}S_{3} + D_{3} \end{aligned}$$

Все условия метода Клебша выполнены, поэтому должно быть:  $C_1 = C_2 = C_3 = C$ ,  $D_1 = D_2 = D_3 = D$ . Для определения const C и D рассмотрим условия закрепления балки:

1) Сечение A, опора, т.е. при  $S_1 = l_1 V_1 \equiv 0$ . Подставим это в формулу Ic), получим

$$0 = F \frac{l_1^3}{6} - q \frac{l_1^4}{24} + Cl_1 + D \tag{1}$$

2) Сечение *B*, опора, т.е. при  $S_3 = L = l_1 + l_2 + l_3$   $V_3 \equiv 0$ . Подставим это в формулу IIIс)

$$0 = F \frac{L_3}{6} - q \frac{L_4}{24} - R_A \frac{(L - l_1)^3}{6} + m_0 \frac{(L - d)^2}{2} + 2q \frac{(L - d)^4}{24} + CL + D \quad (2)$$

Решаем уравнения (1) и (2) найдем

$$C = -173,67, D = 258,75$$

По формулам в) и с) на каждом участке балки вычислим  $EJ_x\theta_i$  и  $EJ_xV_i$ . Результаты вычислений сведем в таблицу

$S_i$ м	0	1	1,5	2	3	4	5	6	7
$EJ_x\theta_i$	-173,7	-171,2	-172,8	-174,4	-112,8	-12,1	82,8	126,8	109,9
кНм <sup>2</sup>									
$EJ_xV_i$	258,8	86,5	0	-88,7	-237,4	-301,3	-263,5	-152,6	-28,2
кНм <sup>3</sup>									

$S_i M$	8	9	10	$S_2^3 = 4,12$
$EJ_x\theta_i$	42,1	-31,6	-66,2	0,47≈0
кНм <sup>2</sup>				
$EJ_xV_i$	50,1	54,0	0	-302,2
кНм <sup>3</sup>				

По этим данным строим эпюру  $EJ_x\theta$  и эпюру  $EJ_xV$ . Из эпюры  $EJ_x\theta$ видно, что при  $S_2 > 4$ м на эпюре  $EJ_x\theta$  меняется знак, а согласно зависимости (5.19)  $\theta = V'$  в сечении, где  $\theta = 0$  величина V имеет экстремум. Найдем его. Расчеты показали, что при  $S_2^3 = 4,12$ м величина  $EJ_x\theta_2 = 0,47$ , т.е. близка к нулю. В этом сечении балки  $EJ_xV_2^{\text{max}} = -302,2$ кНм<sup>3</sup>. С учетом этого строим окончательные эпюры на рис. 5.11. (По аналогии с  $S_2^3$  надо найти  $S_3^3$  (на Ш участке при  $S_3 > 8$  м) и вычислить max  $EJ_xV_3$ ).

## Проверка балок на жесткость

Из условий нормальной работы конструкций часто ограничивают максимальные прогибы балок. Обычно вводят следующие ограничения: допускаемые прогибы пролета балки длиной  $l_{\rm np} \ [f]_{\rm np} = l_{\rm np}/300$ , а для консолей длиной  $l_{\rm kohc} \ [f]_{\rm kohc} = l_{\rm kohc}/150$ , или эти данные берут из справочников.

Условия жесткости балки:

$$-$$
 в пролете  $V_{np}^{\max} \leq [f]_{np}$ 

- в консолях  $V_{\text{конс}}^{\max} \leq [f]_{\text{конс}}$ 

Проверим балку рассматриваемого примера.

Из рис. 5.11 или таблицы находим

<u>левая консоль</u>:  $l_{\text{конс}} = l_1 = 1,5$ м,  $[f]_{\text{конс}} = l_1/150 = 1$ см,  $(EJ_xV)_{\text{конс}}^{\text{max}} = 258,8$ кНм<sup>3</sup>,  $E = 2 \cdot 10^4$  кН/см<sup>2</sup>,  $J_x^{\text{T}}$  (№36) = 13380см<sup>4</sup>,

$$V_{\text{конс}}^{\text{max}} = (EJ_x V)_{\text{конс}}^{\text{max}} / (EJ_x^{\text{T}}) = \frac{258.8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^4 \cdot 13380} = 0,967 \le [f]_{\text{конc}} = 1 \text{ cm}$$

Условия жесткости консоли выполняется.

<u>пролет</u>:  $l_{\rm np} = l_2 + l_3 = 8,5$ м,  $[f]_{\rm np} = l_{\rm np} / 300 = 2,83$ см,  $(EJ_xV)_{\rm np}^{\rm max} = 302,2$ кНм<sup>3</sup>

$$V_{\rm np}^{\rm max} = \frac{302, 2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 13380} = 1,129 \le [f]_{\rm np} = 2,83 \,\rm cm$$

<u>Итак</u>: Двутавр №36 отвечает всем требованиям к прочности и жесткости рассматриваемой балки.

<u>Примечание</u>: Если жесткость где-то не выполняется, берут следующий номер двутавра и проверяют его на жесткость.

#### Статически неопределимые балки при изгибе

Как уже ранее мы отмечали, в случае действия нагрузки на балку в одной плоскости, минимальное число связей, обеспечивающее

неподвижность балки по отношению к основанию, равно трем. Эти три связи являются абсолютно необходимыми. Удаление хотя бы одной из таких связей превращают балку в геометрически изменяемую систему (механизм). Поскольку для плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия, то балки, закрепленные тремя связями, являются *статически определимыми*. Исключение составляют многопролетные шарнирные балки, которые могут быть статически определимыми и при числе внешних связей больше трех (об этом выше уже говорилось).

Очень часто, для обеспечения требуемой прочности и жесткости балки, оказывается необходимым увеличить число опорных закреплений, т.е. ввести некоторые «лишние» связи.

В балках с «лишними» связями все реакции нельзя определить только из уравнений равновесия. Такие балки будут *статически неопределимыми*.

Число «лишних» неизвестных определяет степень статической неопределимости системы.

Для раскрытия статической неопределимости балок разработаны несколько методов. Рассмотрим один из них – с использованием метода Клебша для определения деформации балки. Порядок расчета таких балок заключается в следующем:

- 1. Составляем обычные три уравнения статики для всей балки (как при определении опорных реакций).
- 2. Для всех участков балки с учетом правил метода Клебша записываем дифференциальные уравнения (5.20) и интегрируем их.
- 3. Из условий закрепления балки составляем дополнительные уравнения, которые с уравнениями статики дают необходимую систему алгебраических уравнений для определения всех опорных реакций и констант *C* и *D*.

После определения всех опорных реакций, расчет балки на прочность и жесткость ведется обычным (как показано выше) путем.



<u>Пример:</u> Здесь четыре опорных реакции:  $H_A$ ,  $R_A$ ,  $M_A$  и  $R_B$ . Задача однажды статически неопределима.

1. Уравнения статики:

$$\Sigma F_z = 0 - H_A + 0 = 0. \quad H_A = 0$$
  

$$\sum mom_{xA} = 0 \qquad R_B l - q l^2 / 2 - M_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum mom_{xB} = 0$$
  $-M_A - R_A l + q l^2 / 2 = 0$  (2)

2. Уравнения деформации балки. Здесь один участок  $0 \le S \le l$  лев. часть

a) 
$$EJ_xV'' = -(-(-M_A(S-0)^0 - R_AS + qS^2/2)))$$
  
B)  $EJ_x\theta = -M_AS - R_AS^2/2 + qS^3/6 + C$ 

c)  $EJ_xV = -M_AS^2/2 - R_AS^3/6 + qS^4/24 + CS + D$ 

3. Рассмотрим закрепление балки:

Сечение *A* (заделка), при S = 0,  $\theta = 0$ . Подставим в уравнение в), найдем C = 0. Сечение *A*, при S = 0 и V = 0. Подставим в с) найдем D = 0. Сечение *B*, опора, при S = l, V = 0. Подставим в с)

$$0 = -M_A l^2 / 2 - R_A l^3 / 6 + q l^4 / 24 + 0 \cdot l + 0$$
(3)

Решаем уравнения (1)÷(3) и находим  $R_A, M_A, R_B$ .

Энергия деформации.

От  $M_x$  в точках сечения возникают  $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$  и  $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$  (1)

От  $Q_y$  возникают  $\tau_{yz}$ , определяемый формулой Журавского и  $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$ -по закону Гука при сдвиге.

Как показано выше в разделе 3 (3.16), при действии  $\sigma_z$  и  $\varepsilon_z$  удельная энергия деформации  $W_1 = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2}$ , аналогично от  $\tau_{yz}$  и  $\gamma_{yz}, W_2 = \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2}$ . В общем случае  $W = W_1 + W_2$ . Анализ показал, что  $W_2$  много меньше  $W_1$ , поэтому  $W \approx W_1 = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2}$ .

В объеме тела dV = dAdz энергия деформации  $dU = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} dAdz$ .

Подставляя сюда (1) получим

$$dU = \frac{1}{2} \frac{\sigma_z^2}{E} dAdz = \frac{1}{2E} \frac{M_x^2}{I_x^2} y^2 dAdz$$
(2)

В объеме всего бруса, площадью сечения A и длиной l, полную энергию U найдем интегрированием по A и l

$$U = \frac{1}{2E} \int_{0}^{l} dz \iint_{A} \frac{M_{x}^{2}}{J_{x}^{2}} y^{2} dA = \frac{1}{2E} \int_{0}^{l} \frac{M_{x}^{2}}{J_{x}^{2}} dz \iint_{A} y^{2} dA = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \frac{M_{x}^{2}}{EJ_{x}} dz$$

Здесь учтено, что  $M_x$  и  $J_x$  const по A,  $J_x = \iint_A y^2 dA$ .

Итак, при плоском изгибе

$$U = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \frac{M_{x}^{2}}{EJ_{x}} dz$$
 (5.21)

В случае чистого изгиба, когда  $M_x = const$  по l и балка постоянного сечения  $(J_x = const)$  получим из (5.21)

$$U = \frac{M_x^2 l}{2EJ_x} \tag{5.22}$$

# РАЗДЕЛ 6. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_z$  (вдоль оси бруса будем всегда располагать ось Z). Кручение часто встречается на практике в различных элементах машин и сооружений. Кручение прямого бруса происходит при загружении его внешними скручивающими моментами (парами сил), плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси. Наряду с кручением, элементы машин и сооружений иногда испытывают также изгиб и растяжение (сжатие). Такие сложные случаи нагружения будут рассмотрены позднее, а здесь ограничимся рассмотрением только одного кручения. Стержни (брусья), работающие на кручение, часто называют валами.

Если прямой брус находится в состоянии покоя или равномерного вращения, то алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу, равна нулю.

При расчете валов, в ряде случаев, величины внешних скручивающих моментов определяются по величине потребляемой (передаваемой) мощности и по скорости вращения вала.

Мощность определяется в «лошадиных силах» (л.с.) или в киловаттах (КВт), а скорость вращения об/мин. В этих случаях крутящий момент  $M_{\rm kp}$  определяется в кгм так:

$$M_{\rm kp} = 716.2 \frac{N(\rm J.c)}{n(\rm of/Muh)} [\rm krm] \qquad M_{\rm kp} = 973.6 \frac{K(\rm Kbt)}{n(\rm of/Muh)} [\rm krm] \qquad (6.1)$$

Здесь учтено, что 1л.с.= 75 кгм/сек, 1 Квт= 102 кгм/сек

## Построение эпюр М<sub>г</sub>

К валу в разных сечениях может быть приложено несколько внешних моментов и поперечные размеры его могут изменяться. Рассмотрим пример, показанный на рис. 6.1.



<u>Дано:</u>  $M_1 = 10$ кНм;  $M_2 = 5$ кНм;  $M_3 = 3$ кНм;  $d_1 = 10$ см;  $d_2 = 20$ см;  $d_3 = 6$ см;  $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ м  $M_{\rm B}$  – неизвестный опорный момент.

*М*<sub>в</sub> – неизвестный опорный момент. Его можно найти из условия равновесия вала:

 $\sum mom_z = 0.$   $M_1 - M_2 - M_3 - M_B = 0$ Отсюда  $M_B = 2$ кНм.

Внутренние крутящие моменты  $M_z$ , возникающие в поперечных

сечениях вала, определяются известным методом сечений по формуле (1.5).

$$M_z = \sum mom_z F_i^{\text{прав}} = -\sum mom_z F_i^{\text{лев}}$$
(6.2)

Здесь  $mom_z F_i^{\text{прав}}$  – внешние моменты относительно оси Z для правой или левой отсеченных частей, они положительны, если с конца оси Z видны против хода часовой стрелки. По (6.2) можно определить  $M_{z_i}$  на каждом участке вала и построить эпюру  $M_z$ . Построим эпюру  $M_z$  для вала, показанного на рис. 6.1.

**І участок**  $0 \le S_1 \le l_1$  левая часть

$$M_{z_1} = -(-M_{\rm B}) = M_{\rm B} = 2\kappa {\rm Hm}$$

II участок  $l_1 \le S_2 \le (l_1 + l_2)$  левая часть

$$M_{z_2} = -(-M_{\rm B} + M_1) = -8\kappa {\rm Hm}$$

III участок  $0 \le S_3 \le l_3$  правая часть

$$M_{z_2} = -M_3 = -3\kappa Hm$$

По этим данным строим эпюру  $M_z$  на рис. 6.1. Следует учитывать, что тах внутренний  $M_z$  часто не равен тах внешнему моменту. Все расчеты вала на прочность ведутся на внутренние  $M_z$ .

#### Напряжения и деформации при кручении круглых валов

Исследования показали, что характер деформаций в вале зависит от формы его поперечного сечения. Здесь рассмотрим кручение валов с круглым или кольцевыми сечениями. Сначала рассмотрим результаты эксперимента: на боковую поверхность круглого вала нанесем сетку из продольных и окружных линий. После закручивания вала обнаружим:

- Продольные линии поворачиваются на угол γ, а прямоугольники, образованные сеткой, превращаются в ромбы, т.е. подвергаются сдвигу γ.
- -Ось вала останется прямой, контуры поперечных сечений не меняются, остаются <u>плоскими</u>, но поворачиваются друг относительно друга на некоторый угол, называемый *углом скручивания* φ.
- -Расстояния между сечениями не меняются, т.е. волокна в продольном направлении не деформируются

Перечисленные наблюдения дают основания для принятия следующих гипотез (допущений) при кручении круглых валов:

- 1. Поперечные сечения не меняют форму и размеры, остаются плоскими (гипотеза Бернулли)
- 2. Продольные волокна не деформируются:  $\varepsilon_z = 0$ ,  $\sigma_z = 0$ .

Согласно гипотезе 2  $\sigma_z = 0$  и в поперечном сечении возникают только  $\tau$  – касательные напряжения, перпендикулярные к радиусам сечения. Для определения этих напряжений получена формула

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (0 \le \rho \le R)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p}$$
(6.3)

Формула (6.4) определяет относительный угол закручивания вала.

Из (6.3) видно, что  $\tau$  линейно меняется в сечении:  $\tau = 0$  при  $\rho = 0$  (в центре) и  $\tau_{\text{max}}$  будет при  $\rho = R$ , т.е. в точках сечения у поверхности вала.

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_p} R = \frac{M_z}{W_{\rho}}$$
(6.5)

Здесь:  $J_{\rm p}$  – полярный момент инерции сечения;  $W_{\rho}$  – полярный момент сопротивления сечения

Для сплошного круглого сечения радиуса *R* 

$$J_{\rm p} = \pi R^4 / 2;$$
  $W_{\rho} = J_{\rm p} / R = \pi R^3 / 2$ 

Для кольцевого сечения (труба) с r и R

$$J_{\rm p} = \pi (R^4 - r^4)/2;$$
  $W_{\rho} = J_{\rm p}/R = \pi (R^4 - r^4)/2R$ 

Интегрируя (6.4) получим угол поворота одного сечения вала относительно другого сечения, расположенных на расстоянии l друг от друга.

$$\varphi(l) = \int_{0}^{l} \frac{M_z}{GJ_p} dz \tag{6.6}$$

Здесь *G* – модуль сдвига материала вала, *GJ*<sub>р</sub> называют жесткостью вала при кручении.

Если на участке вала длиной  $l M_z$  и диаметр вала не меняются, то

$$\varphi(l) = \frac{M_z l}{GJ_p} \tag{6.6a}$$

Если  $M_z$  и диаметр меняются на длине l (см. рис. 6.1), то  $\varphi(l)$  определяется как алгебраическая сумма углов закручивания по участкам с постоянными  $M_{z_i}$  и  $J_{p_i}$ 

$$\varphi(l) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{z_i} l_i}{GJ_{\mathbf{p}_i}} \tag{6.6b}$$

## *Расчеты на прочность. Подбор сечений вала* Условие прочности вала с учетом (6.5) имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{\rho}} \le [\tau] \tag{6.7}$$

Это условие должно выполняться для каждого участка вала (при переменных  $d_i$ ). Если диаметр вала постоянный, то в (6.7) берут  $M_z = \left| M_z^{\max} \right|$  из эпюры  $M_z$ . Допускаемые напряжения  $[\tau]$  для различных материалов приводятся в справочниках.

Из (6.7) находят необходимый  $W_{\rho}^{H} \ge M_{z}/[\tau]$ , а по нему определяют размеры сечения вала:

- 1. Для сплошного круглого сечения радиуса  $R W_{\rho} = \pi R^3 / 2 \ge W_{\rho}^{\text{H}}$  отсюда  $R \ge \sqrt[3]{2W_{\rho}^{\text{H}} / \pi}$
- 2. Для кольцевого сечения (трубы) надо задать отношение R/r = k, т.к.  $W_{\rho} = \pi (R^4 - r^4)/(2R)$  подставим r = R/k,  $W_{\rho} = \pi R^3 (1 - 1/k^4)/2 \ge W_{\rho}^{\text{H}}$ , отсюда  $R \ge \sqrt[3]{2W_{\rho}^{\text{H}}/(\pi (1 - 1/k^4))}$ .

Следует иметь ввиду, что кольцевое сечение более экономично по весу.

В необходимых случаях валы рассчитываются не только на прочность, но и на *жесткость*.

Условие жесткости вала на кручение с учетом (6.6а) и (6.6в) имеет вид  $\varphi(l) \leq [\varphi]$ 

Здесь [ $\varphi$ ] допускаемый угол закручивания вала, для различных случаев приводятся в справочниках и нормативной литературе. Например, при обычном кручении [ $\varphi$ ] = 0,3<sup>0</sup> ÷ 2<sup>0</sup> на один метр длины вала. Если условие жесткости не выполняется, увеличивают размеры сечения вала, т.е.  $J_p$  и снова проверяют условие жесткости с учетом (6.6а) и (6.6в).

<u>Примечание:</u> по (6.6)÷(6.6в)  $\varphi(l)$  определяется в радианах.

## Статически неопределимые задачи при кручении

Задачи на кручение являются статически неопределимыми, если внутренние крутящие моменты  $M_z$  в поперечных сечениях вала нельзя найти только из уравнений равновесия (6.2). Рассмотрим пример на рис. 6.2.



От внешнего момента  $M_{\rm kp}$  в заделках появятся неизвестные опорные моменты  $M_A$  и  $M_B$ .

Для их определения можно составить уравнение равновесия вала:

$$\sum mom_z = 0. \quad M_A + M_B - M_{\rm kp} = 0$$
 (a)

Уравнение одно, неизвестных два. Задача однажды статически неопределима. Дополнительное уравнение можно составить из условия деформации вала. Оба конца защемлены, поэтому очевидно, что  $\varphi(l) = 0$ , т.е.

концы вала не поворачиваются друг относительно друга. Здесь  $l = l_1 + l_2$ , а  $\varphi(l)$  найдем по (6.6в). Здесь два участка:

**І участок**  $0 \le S_1 \le l_1$  левая часть

$$M_{z_1} = -(M_{\rm B}) = -M_{\rm B} \tag{B}$$

II участок  $0 \le S_2 \le l_2$  правая часть

$$M_{z_2} = M_A \tag{c}$$

 $\varphi(l) = \sum_{1}^{2} \frac{M_{z_i} l_i}{GJ_p} = 0$ , сокращая на  $GJ_p$ , получим

$$-M_{\rm B}l_1 + M_{\rm A}l_2 = 0 \tag{d}$$

Решаем уравнения (a) и (d) находим  $M_A$  и  $M_B$ , далее по (в) и (c) строим эпюру  $M_z$  и делаем все необходимые расчеты.

## Свободное кручение стержней некруглого сечения

Теория кручения круглых валов основана на гипотезе плоских сечений. Экспериментально установлено, что при кручении некруглых стержней эта гипотеза не подтверждается. В некруглых стержнях при кручении поперечные сечения коробятся (депланируют), т.е. точки сечения выходят из плоскости сечения. Если депланации сечения ничто не мешает, то в сечении  $\sigma_z = 0$  и имеем *свободное кручение*, при котором в сечении возникают только  $\tau$  – касательные напряжения. Если депланации чем-то ограничены (заделка, скачок на эпюре  $M_z$ ), то рядом расположенные сечения коробятся поразному и поэтому в сечении должны возникнуть  $\sigma_z \neq 0$  и  $\tau$ . Это будет *стесненное кручение*, расчет при этом достаточно сложный и здесь рассматриваться не будет. Мы рассмотрим только *свободное кручение*.

## <u>Свободное кручение тонкостенных стержней</u> замкнутого контура



Рассмотрим кручение произвольного тонкостенного стержня с замкнутым контуром (эллиптическая, прямоугольная труба). Здесь  $\delta$  – толщина стенки, величина малая, пунктиром показан срединный контур сечения длиной S. Ввиду малости  $\delta$  возникающие в стенке  $\tau$  полагаем постоянными по толщине и по контуру сечения и определяются они по формуле Бредта

$$\tau = \frac{M_z}{2A\delta} \tag{6.8}$$

Относительный угол закручивания определяется так

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z \cdot S}{4GA^2\delta} \tag{6.9}$$

Здесь А – площадь, ограниченная срединным контуром сечения.

Открытый (не замкнутый) контур имеют поперечные сечения швеллера, двутавра, уголка и др. Здесь *б*-толщина стенки, *S* – длина срединной линии (пунктир) сечения. При кручении таких  $\tau$  – касательные сечений возникают напряжения, линейно меняющиеся по  $\delta$  – толщине стенки,  $\tau = 0$  в точках срединной будет на внутренней и линии,  $\tau_{\rm max}$ внешней поверхностях сечения. Поток касательных напряжений В сечении рис. стрелками. В таких показан на сечениях обычно S много больше  $\delta$  и

 $\tau_{\rm max}$  определяются так

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\frac{1}{3}S\delta^2} \tag{6.10}$$

а относительный угол закручивания

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{\frac{1}{3}GS\delta^3} \tag{6.11}$$

<u>Пример</u>: Сравнить кручение круглой трубы с радиусом срединной линии  $R_0 = 10$ см, толщиной стенки  $\delta = 1$ см (замкнутый контур) и той же трубы, с продольным разрезом (разомкнутый контур).

1. Замкнутый контур: используем формулы (6.8) и (6.9), подставляя в них:  $S = 2\pi R_0, A = \pi R_0^2$ 

$$\tau_1 = \frac{M_z}{2\pi R_0^2 \delta}, \ \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_1 = \frac{M_z \cdot 2\pi R_0}{4G\pi^2 R_0^4 \delta} \tag{1}$$

2. Открытый (разомкнутый контур). Используем формулы (6.10) и (6.11), подставляя в них  $S = 2\pi R_0$ , т.к. толщина разреза примерно 1мм, не влияет на S.

$$\tau_2^{\max} = \frac{M_z}{\frac{1}{3}2\pi R_0 \delta^2}, \ \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_2 = \frac{M_z}{\frac{1}{3}G2\pi R_0 \delta^3}$$
(2)

Поделим формулы из (2) на формулы (1). После сокращения получим

$$\frac{\tau_2^{\text{max}}}{\tau_1} = \frac{R_0}{\frac{1}{3}\delta} = \frac{10 \cdot 3}{1} = 30 \text{ pas}, \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_2 / \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_1 = \frac{R_0^2}{\frac{1}{3}\delta^2} = \frac{3 \cdot 10^2}{1} = 300 \text{ pas}$$

Итак: в разомкнутой трубе напряжения в 30 раз больше, чем в замкнутой, а углы закручивания больше в 300раз. Из этого вывода следуют практические рекомендации: если в конструкции какой-то стержень



испытывает кручение, то этот стержень <u>нежелательно</u> делать с открытым поперечным сечением, т.е. из швеллера, двутавра, уголка и т.д. Лучше его изготовить из трубы или сварить из швеллеров прямоугольную трубу, как показано на рис. При этом получим замкнутый контур, хорошо работающий на кручение.



#### <u>Кручение прямоугольных сечений</u>

Полученные формулы для открытого контура сечения можно применить и для прямоугольного сечения. Если  $b/\delta \ge 10$ , то формулы (6.10) и (6.11) дают точное решение, т.к. они получены при допущении, что  $S >> \delta$ .

На рис. показана эпюра  $\tau$  в точках сечения у верхней поверхности, аналогична и на нижней поверхности сечения. В углах сечения  $\tau = 0$ , а на

большей части размера «*b*»  $\tau = \tau_{max} = const$ . По толщине « $\delta$ »  $\tau$  меняются по линейному закону, в точках срединной линии (пунктир)  $\tau = 0$ .

Если  $b/\delta < 10$ , то  $\tau$  будут переменны по размеру «*b*»,  $\tau_{max}$  будет в середине длинной стороны, а в углах  $\tau = 0$ . Здесь можно использовать формулы:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_k}, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_k}$$
(6.12)

Здесь:  $W_k = \alpha b \delta^2$  – геометрический момент сопротивления,  $J_k = \beta b \delta^3$  – геометрический момент инерции.

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от отношения  $b/\delta$  и приводятся в справочниках. При  $b/\delta > 10 \ \alpha = \beta = \frac{1}{3}$ , т.е. получаются формулы (6.10) и (6.11).

#### Кручение тонкостенных профилей

Рассмотрим кручение стержня двутаврового поперечного сечения, показанного на рис. Такое сечение можно разбить на прямоугольники с размерами  $b_i$  и  $\delta_i$ . Максимальные  $\tau_{\max}^{(i)}$  будут возникать в точках сечения у



поверхностей в середине каждой длинной стороны «*b<sub>i</sub>*» прямоугольников и вычисляются по формуле

$$\tau_{\max}^{(i)} = \frac{M_z}{J_k} \delta_i \tag{6.13}$$

При кручении форма поперечного сечения не меняется, т.е. все прямоугольники закручиваются одинаково, относительный угол закручивания всего сечения определяется так

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_k} \tag{6.14}$$

В формулах (6.13) и (6.14)  $J_k$  вычисляется суммированием по всем прямоугольникам сечения.

$$J_k = \eta \frac{1}{3} \Sigma b_i \delta_i^3 \tag{6.15}$$

Аналогично рассчитываются сечения типа швеллера, уголка и др. Для стандартных профилей в (6.15) введен коэффициент  $\eta$  – коэффициент формы.  $\eta = 1,2$  для двутавров,  $\eta = 1,12$  для швеллеров.

## РАЗДЕЛ 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ БРУСА

До сих пор изучались простые виды деформации бруса: 1) центральное осевое растяжение (сжатие); 2) чистый сдвиг; 3) плоский изгиб, когда  $M_x \neq 0, Q_y \neq 0$ ; 4) кручение. Каждый вид этих деформаций вызывается своей нагрузкой.

На практике часто на конструкцию действует достаточно произвольная нагрузка, которая может вызвать несколько простых деформаций одновременно. В этом случае стержень (брус) будет испытывать <u>сложную</u> <u>деформацию</u>.

#### Определение внутренних силовых факторов (ВСФ)

При сложной деформации в поперечном сечении бруса могут возникнуть шесть компонент внутренних сил и моментов (ось z – всегда вдоль оси бруса, оси cx и cy – в поперечном сечении бруса и составляют правую систему координат xyz):  $N_z$  – продольная сила,  $Q_x$  – поперечная (перезывающая) сила вдоль оси x,  $Q_y$  – поперечная сила вдоль оси y,  $M_x$  – изгибающий момент относительно (вокруг) оси x,  $M_y$  – изгибающий момент. Для их определения в произвольном сечении бруса используют «метод сечений», который дает полученные ранее (1.5) шесть уравнений, рассматривая одну из отсеченных частей бруса (левую или правую):

$$N_{z} = -\Sigma F_{iz}^{\text{neB}} = \Sigma F_{jz}^{\text{npaB}}; \qquad M_{x} = -\Sigma \text{mom}_{cx} F_{i}^{\text{neB}} = \Sigma \text{mom}_{cx} \Sigma F_{j}^{\text{npaB}}$$
$$Q_{x} = -\Sigma F_{ix}^{\text{neB}} = \Sigma F_{jx}^{\text{npaB}}; \qquad M_{y} = -\Sigma \text{mom}_{cy} F_{i}^{\text{neB}} = \Sigma \text{mom}_{cy} \Sigma F_{j}^{\text{npaB}} \qquad (7.1)$$
$$Q_{y} = -\Sigma F_{iy}^{\text{neB}} = \Sigma F_{jy}^{\text{npaB}}; \qquad M_{z} = -\Sigma \text{mom}_{cz} F_{i}^{\text{neB}} = \Sigma \text{mom}_{cz} \Sigma F_{j}^{\text{npaB}}$$

На рис. 7.1 показаны положительные направления всех ВСФ в сечении левой части бруса.



Левой отсеченной частью условно будем считать ту часть бруса, у которой нормаль v к сечению (внешняя) направлена вдоль оси z(у правой части нормаль vнаправлена против оси z).

В сечении левой части:  $N_z > 0, Q_x > 0, Q_y > 0$  направлены вдоль осей z, x, y соответственно;  $M_x > 0, M_y > 0, M_z > 0$ , если с концов осей x, y и z эти моменты видны против хода часовой стрелки или от этих моментов правый винт (буравчик) перемещается вдоль направлений осей x, y и z соответственно.

В сечении правой части бруса, отброшенной на рис. 7.1, положительные направления ВСФ по III закону Ньютона (действия и противодействия) направлены противоположно показанным на рис. 7.1 направлениям. Составляющие (компоненты) по осям внешних сил  $F(F_x, F_y, F_z)$  для левой и правой частей в уравнениях (7.1) положительны, если они направлены вдоль осей; внешние моменты от них в сечении бруса относительно осей *cx*, *cy* и *z* положительны, если от них правый винт (буравчик) перемещается вдоль направлений осей *x*, *y* и *z* (совпадают с направлениями  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  на рис. 7.1).

С учетом этих правил по формулам (7.1) можно построить эпюры (графики) всех ВСФ по длине бруса, по которым определяется опасное сечение бруса.



Эп.  $N_z$  строится в любой плоскости (*xz* или *yz*), **обязательно указать знак**; Эп.  $Q_x$  – в плоскости *xz*, положительные значения откладывать вдоль направления оси *x*;

Эп.  $Q_y$  – в плоскости *yz*,  $Q_y > 0$  вдоль оси *y*;

Эп.  $M_x$  строится в плоскости изгиба бруса *yz*,

 $M_x > 0$  вдоль оси *y*;

Эп.  $M_v$  – в плоскости xz,  $M_v > 0$  вдоль направления оси x;

Эп.  $M_z$  – в любой плоскости (*xz* или *yz*), желательно указывать знак.

Часто ось бруса состоит из отрезков прямых, соединенных под углами 90° (ломанный брус) и загружена произвольной нагрузкой. В этом случае брус разбивается на участки, границами которых служат точки излома оси бруса, точки приложения сосредоточенных нагрузок, начало и конец распределенных нагрузок. На каждом участке вводим правую систему координат  $C_i x_i y_i z_i$  (т. C – центр тяжести поперечного сечения бруса, оси  $C_i x_i$  и  $C_i y_i$  – главные центральные оси сечения; оси правые, если кратчайший поворот оси  $x_i$  к оси  $y_i$  с конца оси  $z_i$  виден против хода часовой стрелки).

## Пример построения эпюр ВСФ

Рассмотрим «ломанный брус», показанный на рис. 7.2. Исходные данные:

- $P_1 = F_1 = 1 \text{ kH}, \quad P_2 = F_2 = 2 \text{ kH}, \quad P_3 = 3 \text{ kH}, \quad q = 1 \text{ kH/m}, \quad l_1 = l_{ab}, \quad l_2 = l_{bc}, \quad l_3 = l_{cd}, \quad l_4 = l_{ck}, \quad l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1 \text{ m}$
- Из рис. 7.2 видно, что брус имеет четыре участка. За первый участок примем тот, который имеет свободный конец (a - b или d - c). Выберем участок a-bдлиной  $l_1$ . Ось  $z_1$  вдоль оси бруса от т. a. На этом участке возьмем произвольное сечение с ц.т.  $C_1$  на расстоянии  $S_1$  от т.*а* и проведем оси  $C_1 x_1$  и  $C_1 y_1$  так, чтобы с осью  $z_1$  они составили правую систему координат  $x_1y_1z_1$ . Для записи уравнений (7.1) выгоднее рассмотреть часть бруса  $a - C_1$  с известными нагрузками  $P_1, P_2, P_3$ . Внешняя нормаль v<sub>1</sub> к сечению этой части направлена вдоль оси z<sub>1</sub>, поэтому эта часть считается «<u>левой</u>» при использовании формул (7.1). Правую часть рассматривать невыгодно, т.к. она более сложная и содержит в заделке «*k*» шесть опорных реакций (которые предварительно придется найти). поступательно, без вращения вокруг оси  $z_1$ Далее оси  $x_1y_1z_1$ (поворачиваются вокруг оси x), перемещаются на второй участок b - c и в сечении  $C_2$  оси  $C_2 x_2, C_2 y_2$  и ось  $z_2$ . Проще рассмотреть участки  $a - b - C_2$  и эта часть бруса считается тоже <u>левой</u>, т.к. нормаль  $v_2$  в сечении  $C_2$  направлена вдоль оси  $z_2$ . Положение сечения  $C_2$  определим расстоянием  $S_2$ , причем  $0 \le S_2 \le l_2$ . Далее оси перемещаем на III участок c - d и в сечении  $C_3$  проводим оси  $C_3 x_3$  и  $C_3 y_3$ . Положение сечения  $C_3$  определим расстоянием  $S_3$  ( $0 \le S_3 \le l_3$ ) и рассмотрим <u>правую</u> часть  $C_3 - d$ , т.к. нормаль  $v_3$  в сечении направлена против оси  $z_3$ . На IV участок оси переводим из положения  $x_2y_2z_2$  поворачивая их в т. С вокруг оси y, ось  $z_4$  вдоль стержня c - k. Проводим произвольно сечение в т.  $C_4$ , в котором располагаем оси  $C_4 x_4$  и  $C_4 y_4$ . Рассмотрим всю переднюю часть, поэтому сечение  $C_4$  определим расстоянием  $S_4$  $(0 \le S_4 \le l_4)$ , эта часть бруса будет «<u>левой</u>», т.к.  $\nu_4$  направлена вдоль оси  $z_4$  (для правой части надо определить 6 опорных реакций в заделке «k»). Для каждого участка бруса запишем формулы (7.1), по которым построим

Для каждого участка бруса запишем формулы (7.1), по которым построим все эпюры ВСФ:

I участок  $0 \le S_1 \le l_1$  (левая часть)

$$N_{z_1} = -(P_3) = -P_3 = -3 ext{ KH} - ext{const}$$
  
 $Q_{x_1} = -(P_2) = -P_2 = -2 ext{ KH} - ext{const}$   
 $Q_{y_1} = -(P_1) = -P_1 = -1 ext{ KH} - ext{const}$   
 $M_{x_1} = -(P_1S_1) = -P_1S_1 - ext{линейная зависимость:}$ 

Считаем : 
$$\begin{cases} S_1 = 0 \quad M_{x_1} = 0 \\ S_1 = l_1 \quad M_{x_1} = -1 \kappa \text{Hm} \end{cases}$$
$$M_{y_1} = -(-P_2 S_1) = P_2 S_1 \\ M_{z_1} = -(0) = 0 \end{cases}$$
Считаем 
$$\begin{cases} S_1 = 0 \quad M_{y_1} = 0 \\ S_1 = l_1 \quad M_{y_1} = 2 \kappa \text{Hm} \end{cases}$$

По этим данным строим эпюры (графики) всех ВСФ на I участке на рис.7.3 по вышеуказанным правилам.

II участок  $0 \le S_2 \le l_2$  (левая часть)

$$\begin{split} N_{z_2} &= -(-P_1) = P_1 = 1 \,\mathrm{kH} - \mathrm{const} \\ Q_{x_2} &= -(P_2) = -P_2 = -2 \,\mathrm{kH} \\ Q_{y_2} &= -(P_3 + qS_2) = -P_3 - qS_2 - \mathrm{линей} \mathrm{Hag} \, \mathrm{3aBucumoctb} \\ \mathrm{Cчитаем} : \begin{cases} S_2 &= 0 \quad Q_{y_2} = -3 \mathrm{kH} \\ S_2 &= l_2 \quad Q_{y_2} = -4 \mathrm{kH} \end{cases} \\ M_{x_2} &= -(P_1 l_1 + q \frac{S_2^2}{2} + P_3 S_2) - \mathrm{kBadpathag} \, \mathrm{параболa} \\ \mathrm{Cчитаем} \begin{cases} S_2 &= 0 \quad M_{x_2} = -4 \mathrm{kH} \\ S_2 &= l_2 / 2 \quad M_{x_2} = -1 \mathrm{kHm} \\ S_2 &= l_2 / 2 \quad M_{x_2} = -2,125 \mathrm{kHm} \\ \mathrm{S}_2 &= l_2 \quad M_{x_2} = -4,5 \mathrm{kHm} \end{cases} \end{split}$$

Считаем

$$M_{y_2} = -(-P_2S_2) \begin{cases} S_2 = 0 & M_{y_2} = 0 \\ M_{z_2} = -(P_2l_1) = -2\kappa Hm - \text{const} \end{cases} \begin{cases} S_2 = l_2 & M_{y_2} = 2\kappa Hm \\ S_2 = l_2 & M_{y_2} = 2\kappa Hm \end{cases}$$

Строим эпюры на II участке III участок  $0 \le S_3 \le l_3$  (правая часть)

$$\begin{split} N_{z_3} = 0; & Q_{x_3} = F_1 = 1 \mbox{kH}; & Q_{y_3} = -F_2 = -2 \mbox{kH}\\ M_{x_3} = F_2 S_3 & \mbox{Cчитаем} \begin{cases} S_3 = 0 & M_{x_3} = 0\\ S_3 = l_3 & M_{x_3} = 2 \mbox{kHm} \end{cases}\\ M_{y_3} = F_1 S_3 & \mbox{Cчитаеm} \begin{cases} S_3 = 0 & M_{y_3} = 2 \mbox{kHm} \\ S_3 = l_3 & M_{y_3} = 0 \end{cases}\\ S_3 = l_3 & M_{y_3} = 1 \mbox{kHm} \end{cases} \end{split}$$

Строим эпюры на III участке. IV участок  $0 \le S_4 \le l_4$  (левая часть)

$$N_{z_4} = -(-F_1 - P_2) = 3\kappa H;$$
  $Q_{x_4} = -(-P_1) = 1\kappa H;$   
 $Q_{y_4} = -(P_3 + ql_2 - F_2) = -2\kappa H$   
 $M_{x_4} = -(P_3S_4 + P_2l_1 + ql_2S_4 - F_2S_4) -$  линейная зависимость

Считаем 
$$\begin{cases} S_4 = 0 \quad M_{x_4} = -2\kappa \text{HM} \\ S_4 = l_4 \quad M_{x_4} = -4\kappa \text{HM} \end{cases}$$
$$M_{y_4} = -(P_1 S_4 - P_2 l_2 + F_1 l_3) - \text{линейная зависимость} \\ \text{Считаем} \begin{cases} S_4 = 0 \quad M_{y_4} = 1\kappa \text{HM} \\ S_4 = l_4 \quad M_{y_4} = 0 \end{cases}$$
$$M_{z_4} = -(-P_3 l_2 - P_1 l_1 - q l_2^2 / 2 - F_2 l_3) = 6,5\kappa \text{HM} \end{cases}$$

Эпюры всех внутренних силовых факторов приведены на рис. 7.3 (1÷6).

По эпюрам можно определить тип сложного сопротивления бруса, найти опасное (расчетное) сечение на каждом участке «ломанного» бруса и величины всех ВСФ в них.



Рис.7.3

# <u>Типы сложного сопротивления бруса:</u> Косой изгиб: обязательно $M_z = 0, M_x \neq 0, M_y \neq 0$ . Изгиб с кручением: обязательно $M_z \neq 0, M_x \neq 0$ или $M_y \neq 0$ или оба $M_x \neq 0$ и $M_y \neq 0$ .

Внецентренное растяжение (сжатие): обязательно  $N_z \neq 0$ ,  $M_x = \text{const}, \ M_y = \text{const}, \ Q_x = Q_y = M_z = 0$ .

Другие комбинации ВСФ относятся к общему случаю сложного сопротивления бруса.

Определим тип сложного сопротивления, найдем опасное (расчетное) сечение на каждом участке бруса из анализа полученных эпюр рис. 7.3.

<u>I участок</u>: Здесь косой изгиб и сжатие. Опасное сечение при  $S_1 = l_1$ , где:  $N_{z1} = -3\kappa H$ ,  $Q_{x1} = -2\kappa H$ ,  $Q_{y1} = -1\kappa H$ ,  $M_{x1} = -1\kappa H M$ ,  $M_{y1} = 2\kappa H M$ ,  $M_{z1} = 0$ .

<u>II участок</u>: Здесь косой изгиб с кручением и растяжением. Опасное сечение при  $S_2 = l_2$ , где:  $N_{z2} = 1 \kappa H$ ,  $Q_{x2} = -2 \kappa H$ ,  $Q_{y2} = -4 \kappa H$ ,  $M_{x2} = -4,5 \kappa H m$ ,  $M_{y2} = 2 \kappa H m$ ,  $M_{z2} = -2 \kappa H m$ .

<u>III участок</u>: Здесь косой изгиб. Опасное сечение  $S_3 = l_3$ , где:  $N_{z_3} = M_{z_3} = 0$ ,

$$Q_{x_3} = 1\kappa H$$
,  $Q_{y_3} = -2\kappa H$ ,  $M_{x_3} = 2\kappa H M$ ,  $M_{y_3} = 1\kappa H M$ .

<u>IV участок</u>: Здесь косой изгиб с кручением и растяжением. Опасное сечение при  $S_4 = l_4$ , где:  $N_{z4} = 3\kappa H$ ,  $Q_{x4} = 1\kappa H$ ,  $Q_{y4} = -2\kappa H$ ,  $M_{x4} = -4\kappa Hm$ ,  $M_{y4} = 0$ ,  $M_{z4} = 6,5\kappa Hm$ .

Т.к. в опасном сечении  $M_{y_4} = 0$ , то расчет этого сечения можно вести по формулам плоского изгиба.

## Определение напряжений

Ранее получены формулы для определения  $\sigma_z$  от  $N_z$  и  $M_x$ :  $\sigma_z = \frac{N_z}{4}$ ,

 $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$ . По аналогии можно записать формулу для  $\sigma_z$  от  $M_y$ 

 $\sigma_z = -\frac{M_y}{J_y} x$  (a). В этих формулах x и y координаты точки сечения

бруса, где определяется  $\sigma_z$ . Очевидно, что при  $M_y > 0$  и x > 0  $\sigma_z < 0$  (сжатие) получается. Поэтому в формуле (а) стоит знак минус. При одновременном действие в сечении бруса  $N_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$  суммарные напряжения в любой точки сечения с координатами x и y можно определить так

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$
(7.2)

Это одна из основных формул сопротивления материалов. В (7.2)  $N_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и координаты точки сечения x и y надо подставлять со своими знаками. Если  $\sigma_z > 0$  получится, значит в этой точке сечения –

растяжение, если  $\sigma_z < 0$  – то сжатие. Это важно при оценке прочности хрупких материалов.

От  $Q_y$  в сечении бруса возникают  $au_{yz}$ , определяемые по известной формуле

Журавского 
$$\tau_{yz} = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x b}$$
. Аналогично, от  $Q_x$  возникают  $\tau_{xz}$ ,

определяемые по формуле  $\tau_{xz} = \frac{Q_x \cdot S_y^{\text{отс}}}{J_y d}$ . От кручения  $M_z$  круглых

валов возникают  $\tau_{\rm kp}$ , определяемые известной формулой  $\tau_{\rm kp} = \frac{M_z}{J_p} \rho$ .

Направления касательных напряжений от  $Q_y$ ,  $Q_x$  и  $M_z$  были выяснены раньше. В каждой точки сечения эти напряжения надо суммировать геометрически (векторно), т.е. суммарные напряжения





 $\bar{\mathbf{\tau}}_{\Sigma} = \bar{\mathbf{\tau}}_{xz} + \bar{\mathbf{\tau}}_{yz} + \bar{\mathbf{\tau}}_{kp}$  .

На рис. 7.4 показаны правила геометрического сложения напряжений  $au_{xz}$ ,  $au_{yz}$  и  $au_{\kappa p}$  в т.Bкруглого сечения бруса. Определив в этой же точке «B»  $\sigma_z$  от  $N_z, M_x, M_y$  по (7.2), можно оценить прочность в точке «В» сечения ПО одной ИЗ теорий прочности. Например, по III теории прочности получим

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\Sigma}^2} \le [\sigma]$$

Рассмотрим подробнее частные случаи сложного сопротивления бруса.

## І. КОСОЙ ИЗГИБ

- Здесь в поперечных сечениях бруса могут быть  $N_z$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ , а  $M_z = 0$ . Косой изгиб может быть <u>чистым</u>, когда вдоль бруса отсутствуют  $Q_x = Q_y = 0$  и <u>поперечным</u>, когда  $Q_x \neq 0$  и $Q_y \neq 0$ , а  $M_x$ ,  $M_y$  переменны по длине бруса. Косой изгиб может быть <u>плоским</u>, когда вся внешняя нагрузка лежит в одной плоскости и <u>не плоским</u>, когда нагрузки в плоскостях *хz* и *yz* изменяются произвольно по длине бруса.
- Величины и знаки  $N_z$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $M_y$  в любом сечении бруса определяются из эпюр. Введем понятие <u>полный изгибающий момент</u>, определяемый так

$$M_{u} = \sqrt{M_{x}^{2} + M_{y}^{2}}$$
(7.3)

Если  $M_x$  и  $M_y$  представить в виде векторов (длина векторов определяет величину  $M_x$  и  $M_y$ , а направления по правилу правого «буравчика»), то  $M_u$  есть геометрическая сумма  $M_x$  и  $M_y$ , что показано на рис. 7.5. Положение  $M_u$  удобно определять углом  $\alpha$ , который он составляет с осью x ( $\alpha > 0$  отсчитывается от оси x против хода часовой стрелки). Из рис. 7.5 видно:



$$M_x = M_u \cos \alpha, \ M_y = M_u \sin \alpha \qquad (1)$$

 $\frac{M_y}{M_y} = \text{tg}\alpha$ 

Отсюда

(2)

Нормальное напряжение  $\sigma_z$  в любой точки сечения с координатами x и y определяется по формуле (7.2), полагая в ней  $N_z = 0$ 

$$\sigma_{z} = \frac{M_{x}}{J_{x}} y - \frac{M_{y}}{J_{y}} x$$
(7.4)
  
С учетом (1)
$$\sigma_{z} = Mu \left( \frac{\cos \alpha \cdot y}{J_{x}} - \frac{\sin \alpha \cdot x}{J_{y}} \right)$$



В формулы (7.4) и (7.5) все надо подставить со своими знаками: знаки  $M_x$  и  $M_y$  берутся из  $M_{u} > 0$ эпюр, всегда. Величина и знак α определяется из формулы (2). Во многих случаях известны величина И направле-ние поперечной нагрузки (Fили q), направлениях их будем определять углом β, отсчи-тываемый от оси х (рис. 7.6),

 $\beta > 0$  против хода часовой стрелки. В произвольном сечении балки на расстоянии S от торца от F возникнет  $M_u = F \cdot S$ , который с

направлением F составляет угол 90°, а с осью x угол  $\alpha$ , т.е.  $\alpha = 90^{\circ} + \beta$ . Зная  $\alpha$  и  $M_u$ ,  $\sigma_z$  можно вычислять по (7.5). Но проще силу F разложить по осям x и y, т.е.  $F_x = F \cos \beta$ ,  $F_y = F \sin \beta$  (видно из рис. 7.6). От  $F_y$  строят эпюру  $M_x$ , а от  $F_x$  – эпюру  $M_y$  и далее  $\sigma_z$ определяют по формуле (7.4). Аналогично и от погонной нагрузки  $q = \text{const}: q_x = q \cos \beta$ ,  $q_y = q \sin \beta$ , от  $q_x$  – эпюру  $M_x$ , от  $q_y$  – эпюру  $M_y$ .

## Нейтральная ось (Н.О)

Нейтральная ось – линия в сечении балки, относительно которой сечение поворачивается, оставаясь плоским (гипотеза Бернулли). Обозначим координаты точек на нейтральной оси через  $x_0, y_0$ . Согласно определения Н.О в этих точках  $\sigma_z = 0$ . Подставляя  $\sigma_z = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  в (7.5), сокращая на  $M_u$  получим

$$\frac{\cos\alpha \cdot y_0}{J_x} = \frac{\sin\alpha \cdot x_0}{J_y}$$
(3)

Это уравнение Н.О. Видно, что это уравнение прямой линии проходящей через начало координат, т.к. при  $x_0 = 0$  должно быть  $y_0 = 0$ . Положение Н.О удобно определять через угол ее наклона к одной из осей координат. Обозначим  $\varphi$  – угол наклона Н.О к оси x (рис. 7.7),  $\varphi > 0$  против хода часовой стрелки.



пендикулярна Н.О. При  $J_x \neq J_y$  эти плоскости не совпадают  $\varphi \neq \alpha$ , поэтому эту деформацию и назвали «косой изгиб». При  $J_x = J_y$  (сечение квадратное, круглое и т.д.)  $\varphi = \alpha$  и косого изгиба не будет.

Определение напряжений. Расчеты на прочность.



Для исследования напряженного состояния в сечении бруса строят эпюры  $\sigma_z$ в аксонометрии (Эп.  $\sigma_z(1)$ ) или в плоскости сечения (Эп.  $\sigma_z(2)$ ), используя формулы (7.4) или (7.5), эпюры показаны на рис. 7.8.

Для построения эпюр  $\sigma_z(1)$ вычисляют  $\sigma_i$  в угловых точках сечения (i = 1, 2, 3, 4) и откладывают их в масштабе с учетом знаков ( $\oplus$  – растяжение, наружу от сечения, (–) – сжатие – противоположно).

Далее точки соединяют прямыми линиями, т.к. из (7.4) и (7.5) видно, что  $\sigma_z$  линейны по координатам *x* и *y*. Итак, Н.О делит сечение на две зоны, растянутую ⊕ и сжатую (–) (рис. 7.8).

- Для построение эпюры  $\sigma_z(2)$  перпендикулярно Н.О проводят линию a-b. В т. «b» в масштабе откладывают  $\sigma_1 > 0$ , а в т. «a»  $\sigma_3 < 0$  и далее соединяют их прямой линией.
- Из эпюр  $\sigma_z$  видно, что экстремальные напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от Н.О. Это будут т.1 и т.3. В них  $y_1 = y_{\text{max}}, x_1 = -x_{\text{max}}, y_3 = -y_{\text{max}}, x_3 = x_{\text{max}}$  и по (7.4)

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} - \frac{M_y}{J_y} (-x_{\max}) = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \qquad \qquad W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$$
  
$$\sigma_3 = \frac{M_x}{J_x} (-y_{\max}) - \frac{M_y}{J_y} x_{\max} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}. \qquad \qquad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}$$

Итак, в т.1 и т.3 сечения  $\sigma_z$  равны по величине и противоположны по знаку

$$\sigma_z^{3\text{KC}} = \pm \left( \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \right)$$
(7.7)

Здесь знак выбирают по физическому смыслу,  $\oplus$  в растянутой зоне, (–) в сжатой. Аналогично определяются  $\sigma_z^{3\kappa c}$  в других сечения с выступающими углами.

Для балок из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, условие прочности в опасном сечении бруса можно записать так с учетом (7.7)

$$\sigma_{z}^{_{3\text{KC}}} = \frac{|M_{x}|}{W_{x}} + \frac{|M_{y}|}{W_{y}} = \frac{1}{W_{x}} \left( |M_{x}| + \frac{W_{x}}{W_{y}}|M_{y}| \right) \leq [\sigma]$$
(7.8)

При подборе размеров сечения балки используем вторую формулу (7.8), при этом надо задать отношение  $W_x/W_v$  с учетом рационального расположения сечения: для прямоугольника при *h* > *b* (размер *h* вдоль оси y) если  $|M_x| > |M_y|$  то  $W_x / W_y = h/b$ ; если  $|M_y| > |M_x|$ , то размер h вдоль оси x (т.е. повернуть на 90°) и  $W_x/W_y = b/h$ . Условие прочности одно, а неизвестных два h и b, поэтому сами задаем отношение h/b = k. Зная  $W_x / W_y$  по (7.8) вычисляем необходимый  $W_x^{\rm H}$ , а по нему размеры hи *b* с учетом отношения h/b = k. При подборе стандартных двутавров и если  $|M_x| > |M_v|$  сечение швеллеров аналогично: располагаем вертикально, как в таблицах ГОСТа и берем: для двутавров  $W_x / W_y = 8 \div 10$ , для швеллеров  $W_x / W_y = 6 \div 8$ ; если  $|M_y| > |M_x|$  сечение располагаем горизонтально и для двутавров  $W_x / W_y = \frac{1}{8} \div \frac{1}{10}$ , для швеллеров  $W_x / W_y = \frac{1}{6} \div \frac{1}{8}$ . Далее по (7.8) находимый необходимый  $W_x^{\rm H}$ и по нему стандартный номер профиля (в первом случае  $W_x^{\text{н}} \approx W_x^{\text{табл}}$ , во втором  $W_x^{H} \approx W_v^{\text{табл}}$ ). Определив номер профиля, делаем его проверку по первой формуле (7.8), подставляя табличные значения  $W_x$  и  $W_y$  из ГОСТа с учетом вышеуказанного в скобках. Можно учесть  $N_z$ , добавив  $\sigma_z = N_z / A_{\text{табл}}$ .

- Для произвольного сечения условия прочности имеют вид  $\sigma_z^{\mathfrak{sc}} \leq [\sigma]$ : надо найти наиболее удаленные от Н.О точки сечения, найти в них  $\sigma_z^{\mathfrak{sc}}$  и сравнить их с допускаемыми.
- Для балок из хрупких материалов отдельно делается проверка прочности в растянутой (р) и сжатой (сж) зонах, т.к. для них  $|[\sigma]_{cw}| >> [\sigma]_p$ . Размеры произвольного сечения определяются методом попыток (подбором). При каждой попытке необходимо уточнить положение Н.О и координаты точек сечения с  $\sigma_z^{3\kappa c}$ .

#### Определение прогибов

Определяют закон изменения прогибов V = V(z) в плоскости *уz* как указано в разделе 5, используя известное уравнение  $EJ_xV'' = -M_x$  и метод Клебша. Далее определяют прогибы U = U(z) в горизонтальной плоскости *xz* используя метод Клебша и аналогичное уравнение  $EJ_yU'' = M_y$ . Полный прогиб «*f*» в любом сечении балки найдем геометрическим сложеним прогибов V и U в каждом сечении:  $f = \sqrt{U^2 + V^2}$ . Вычислив «f» в нескольких сечениях по длине балки, строят изогнутую ось балки и проверяют ее жесткость.

## **II. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ (РАСТЯЖЕНИЕ)**



Рис.7.9

Эта деформация возникает обычно в вертикальных брусьях и колоннах при действии на них продольных сил F, приложенных в т. «P» (полюс) не совпадающей с т. O– центром тяжести сечении (рис. 7.9).

При переносе силы F в т. O брус нагрузится продольной силой  $N_z = F$  и изгибающим моментом  $M_u$ , причем все сечения бруса по его длине будут загружены одинаково.

# Определение напряжений

Пусть на брус в т. «P» с координатами  $x_p > 0$  и  $y_p > 0$  действует растягивающая сила F > 0 (рис. 7.9). Перенесем силу F сначала на ось x (плечо  $y_p$ ), а затем в т. O (плечо  $x_p$ ). В итоге в поперечном сечении бруса возникнут:

$$N_z = F, M_x = F \cdot y_p = N_z \cdot y_p, \quad M_y = -F \cdot x_p = -N_z \cdot x_p$$
 (6)

В произвольной точке «В» сечения с координатами x > 0 и y > 0  $\sigma_z$  найдем по (7.2)

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \tag{7}$$

Подставляя (6) в (7) получим

$$\sigma_z = N_z \left( \frac{1}{A} + \frac{y_p y}{J_x} + \frac{x_p x}{J_y} \right)$$
(7.9)

Учитывая, что  $J_x = i_x^2 A$ ,  $J_y = i_y^2 A$  и подставляя в (7.9)

$$\sigma_{z} = \frac{N_{z}}{A} \left( 1 + \frac{y_{p}y}{i_{x}^{2}} + \frac{x_{p}x}{i_{y}^{2}} \right)$$
(7.10)

В произвольных случаях нагружения в формулы (7.9) и (7.10)  $N_z$ ,  $x_p$ ,  $y_p$ , x и

у надо подставлять со своими знаками в заданных главных

центральных осях x и y.  $N_z > 0$  при растяжении бруса,  $N_z < 0 -$  при сжатии.

Эпюры  $\sigma_z$  в сечении строятся аналогично как при косом изгибе.

## Нейтральная ось (Н.О)

Обозначим координаты точек на Н.О через  $x_0$ ,  $y_0$ . В этих точках  $\sigma_z = 0$ .

Подставляя  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  и  $\sigma_z = 0$  в (7.10) и сокращая на  $N_z / A \neq 0$  получим

$$1 + \frac{y_p y_0}{i_x^2} + \frac{x_p x_0}{i_y^2} = 0$$
(7.11)

Это уравнение Н.О. Видно, что это уравнение прямой ( $x_0$  и  $y_0$  в первой степени), не проходящей через начало координат (т.к. при  $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ ). Положение Н.О удобно определять отрезками  $a_x$  и  $a_y$ , которые Н.О отсекает на осях координат (рис. 7.9) и проходит через т. «m» и т. «n». Допустим пока, что  $a_x > 0$  и  $a_y > 0$ . Точка «m» в этом случае имеет координаты  $x_0 = 0, y_0 = a_y$ . Подставляем это в (7.11) получим

$$1 + \frac{y_{\rm p}a_y}{i_x^2} + 0 = 0$$

Отсюда

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_p} \tag{7.12a}$$

Аналогично т. «*n*». Подставляя  $x_0 = a_x$ ,  $y_0 = 0$  найдем

$$1+0+\frac{x_{\mathrm{p}}a_x}{i_y^2}=0$$

Отсюда

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p} \tag{7.12b}$$

Из (7.12) видно, что при  $x_p > 0$  и  $y_p > 0$  получим  $a_x < 0$  и  $a_y < 0$ , т.е. наше допущение неверно и правильно Н.О показана на рис. 7.9.

## Свойства нейтральной оси

Из формул (7.12) следует:

- 1. Положение Н.О не зависит от величины и знака F.
- **2.** Н.О и полюс т. «*P*» лежат по разные стороны от центра тяжести сечения т. *O*.
- 3. При удалении полюса от т. О, Н.О приближается к нему и наоборот.

- 4. Если полюс расположен на одной из осей координат, то H.O перпендикулярна к этой оси (при  $y_p = 0$  полюс на оси x,  $a_y = \infty$ , т.е. H.O параллельна оси y или перпендикулярна оси x).
- 5. При вращении Н.О вокруг произвольной точки « $\kappa$ » на ней (рис. 7.9), полюс перемещается по прямой линии, не проходящей через т. *О*. Подставим в (7.11)  $x_0 = x_{\kappa}$ ,  $y_0 = y_{\kappa}$ . Получим уравнение, которое относительно координат  $x_p$  и  $y_p$  есть уравнение прямой не проходящей через т. *О*.
- 6. Н.О делит сечение на две зоны: растянутую и сжатую, заштрихованную на рис. 7.9 при F > 0.

Из соотношений (7.12) можно решить обратную задачу: зная положение H.O (т.е.  $a_x$  и  $a_y$ ) найти положение полюса, т.е.  $y_p$  и  $x_p$ 

$$y_{\rm p} = -\frac{i_x^2}{a_y}, \ x_{\rm p} = -\frac{i_y^2}{a_x}$$
 (7.13)

#### <u>Расчеты на прочность</u>

Определив положение Н.О, проведем к контуру сечения касательные, параллельные Н.О. Получим т.1 с координатами  $x_1$  и  $y_1$  и т.2 с координатами  $x_2$  и  $y_2$ . Если в т. «*P*» действует F > 0, то в т. 1 будут  $\sigma_1^{\text{max}} > 0$  – растягивающие (р), а в т. 2  $\sigma_2^{\text{max}} < 0$  – сжимающие (сж). Обычно колонны изготавливают из хрупких материалов, поэтому прочность проверяется отдельно в растянутой и сжатой зонах по формулам (7.9) или (7.10):

$$\sigma_{1}^{\max} = \frac{N_{z}}{A} \left( 1 + \frac{y_{p}y_{1}}{i_{x}^{2}} + \frac{x_{p}x_{1}}{i_{y}^{2}} \right) \leq [\sigma]_{p}$$

$$\sigma_{2}^{\max} = \frac{N_{z}}{A} \left( 1 + \frac{y_{p}y_{2}}{i_{x}^{2}} + \frac{x_{p}x_{2}}{i_{y}^{2}} \right) \geq [\sigma]_{c*}$$
(8)

При действии на колонну сжимающей силы F в т. 1 будут  $\sigma_1^{\max} < 0$ , в т. 2  $\sigma_2^{\max} > 0$  – растягивающие.

- Размеры сечения обычно определяются методом подбора: задают размеры, определяют положение H.O, т.1 и т.2 и проверяют в них прочность по (8). Если эти условия не выполняются, меняют размеры сечения и снова проверяют.
- Для брусьев с сечениями типа прямоугольника, двутавра или швеллера из пластичных материалов, у которых  $[\sigma]_p = |[\sigma]_{c\pi}| = [\sigma]$ , первую попытку можно провести как при косом изгибе по второй формуле (7.8), определив  $M_x$  и  $M_y$  по (6), а  $N_z$  пока не учитывать. Здесь подбор

размеров сечения проводить так, как указано ниже формулы (7.8). Определив размеры сечения, делать проверку по (8) с учетом  $N_z$ .

## Ядро сечения

Для колонн из хрупких материалов (чугун, бетон, камень и т.д.), плохо работающих на растяжение желательно, чтобы от сжимающей силы *F* во всех точках сечения были только сжимающие напряжения. Этого можно добиться, если Н.О не пересекает сечение колонны, а согласно свойства 3 Н.О. это получим, ограничивая удаление полюса «*P*» от т. *O*.



Ядро сечения – это некоторая область вокруг ц.т. (т. *O*) сечения, внутри которой можно располагать полюс т. «*P*», не вызывая в сечении колонны напряжений разных знаков (только знака *F*).

Если полюс «*P*» расположен на границе ядра сечения, то Н.О только касается контура сечения. На этом и основан <u>порядок построения</u> ядра сечения, показанный на рис. 7.10:

- 1. Даем Н.О все возможные положения, касательные к контуру сечения, учитывая симметрию сечения. Это Н.О (1) ÷ Н.О (4).
- 2. Для каждого положения H.O (1) ÷ H.O (3), т.е. вертикальных и горизонтальных, легко определить величины и знаки отрезков  $a_x^i$  и  $a_y^i$  (i = 1, 2, 3), зная размеры сечения и положение главных центральных осей *XOY*.

Например, для Н.О (1)  $a_x^1 = \infty$  (Н.О (1) и ось *х* параллельны),  $a_y^1 < 0$  показан на рис. 7.10.

- **3.** По формулам (7.13) вычисляем для каждого положения Н.О координаты полюса, т.е.  $x_p^i$  и  $y_p^i$  и определяем эти т.1 ÷ т.3 на рисунке сечения, выполненного в масштабе (рис. 7.10).
- Для Н.О (4) наклонной, определить  $a_x^4$  и  $a_y^4$  затруднительно. Поэтому здесь лучше использовать уравнение Н.О в виде (7.11). Н.О (4) проходит через т.т. «*a*» и «*b*» сечения, координаты которых  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $x_b$  и  $y_b$  легко определить (величины и знаки). Подставляем их в (7.11) вместо  $x_0$  и  $y_0$  получим

$$1 + \frac{y_{p}y_{a}}{i_{x}^{2}} + \frac{x_{p}x_{a}}{i_{y}^{2}} = 0, \qquad 1 + \frac{y_{p}y_{b}}{i_{x}^{2}} + \frac{x_{p}x_{b}}{i_{y}^{2}} = 0$$
(9)

107

Решаем эти два уравнения для вычисления  $x_p$  и  $y_p$ , это и будут координаты т. 4 на ядре. Из рис. 7.10 видно, что Н.О из одного положения в другое переводятся вращением вокруг точек сечения колонны, а согласно свойства 5 Н.О полюс при этом перемещается по прямой. Поэтому т.1 ÷ т.4 на рис. 7.10 надо соединить прямыми линиями. Получим половину ядра сечения, заштрихованную на рис. 7.10. Сечение колонны симметрично относительно оси *y*, поэтому и ядро его сечения симметрично относительно оси *y* (вторая половина ядра показана пунктиром).

## Ядра сечений некоторых фигур

*1*. Прямоугольное сечение  $b \times h$ :



Ввиду двух осей симметрии *x* и *y* достаточно двух положений H.O

H.O (1):  $a_x^1 = b/2, a_y^1 = \infty, J_x = \frac{bh^3}{12},$  $A = b \cdot h, i_x^2 = \frac{J_x}{4} = h^2/12, J_y = \frac{hb^3}{12}$ 

$$i_y^2 = \frac{b^2}{12}, \ x_p^1 = -\frac{i_y^2}{a_x^1} = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot b} = -\frac{b}{6},$$

$$y_{\rm p}^1 = -\frac{i_x^2}{a_y^1} = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0$$
 т.е. т.1 на оси *x*. Н.О (2):

$$a_x^2 = \infty, a_y^2 = \frac{h}{2}, x_p^2 = -\frac{i_y^2}{a_x^2} = 0$$
, т.е. т.2 на оси  $y$ .  $y_p^2 = -\frac{i_x^2}{a_y^2} = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}$ .

Строим т.2., т.3 симметрична т.1, а т.4 симметрична т.2. Соединяем т.1+т.4 прямыми линиями, получим ядро сечения в виде ромба с размерами h/3 и b/3.

**2.** Круглое сечение радиуса R.


Ввиду осевой симметрии, достаточно одного положения Н.О

$$a_{x} = R, \ a_{y} = \infty, \ J_{x} = J_{y} = \frac{\pi R^{4}}{4},$$
  

$$A = \pi R^{2}, \ i_{x}^{2} = i_{y}^{2} = \frac{\pi R^{4}}{4 \cdot \pi R^{2}} = \frac{R^{2}}{4},$$
  

$$x_{p} = -\frac{i_{y}^{2}}{a_{x}} = -\frac{R^{2}}{4 \cdot R} = -\frac{R}{4}, \ y_{p} = -\frac{i_{x}^{2}}{a_{y}} = -\frac{i_{x}^{2}}{\infty} = 0$$

. Получим т.1 на ядре. Ядро сечения здесь круг с радиусом  $r_{\rm s} = R/4$ .

### III. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Эта деформация возникает в пространственных «ломанных» брусьях, в валах различных механизмов, передающие крутящие моменты. Здесь изгиб возникает от веса вала, веса шкивов, натяжения ремней, от зацепления зубчатых колес и т.д. Зная все нагрузки, можно построить все эпюры ВСФ. Опасное сечение определяется по эпюрам  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ . Как указано в разделе 6, брусья с некруглыми сечениями и тонкостенные незамкнутые сечения (двутавры, швеллера и т.д.), очень плохо работают на кручение. Поэтому, при наличии изгиба с кручением, желательно использовать брусья с круглыми или трубчатыми сечениями. Для них опасное сечение однозначно определяется по *полному изгибающему моменту* 

$$M_{u} = \sqrt{M_{x}^{2} + M_{y}^{2}}$$
(10)

Расчеты на прочность стержней, испытывающих изгиб с кручением, зависят от формы их поперечных сечений.

#### Расчет стержней круглого сечения

Для круглых стержней  $J_x = J_y$  и косой изгиб для них невозможен, поэтому расчет можно вести на Mu, определяемый по (10). Плоскость изгиба перпендикулярна Mu (рис. 7.13) и

$$\sigma_{\max} = M_u / W \tag{11}$$



где  $W = \pi r^3 / 4$ , r - радиус сечения. Знаки  $\sigma_{\text{max}}$  зависят от направления вектора  $M_u$ . На рис. 7.13 в т. «*a*» будет сжатие (– ), в т. «*b*» – растяжение  $\oplus$ .

От кручения  $M_z \tau_{max}$ , как известно, возникают на контуре сечения и определяются так

$$\tau_{\text{max}} = M_z / 2W = M_z / W_\rho$$
(12)
$$W = \pi r^3 / 2 - 2W = \text{подарный}$$

где  $W_{\rho} = \pi r^3 / 2 = 2W -$ полярный момент

инерции сечения. Поэтому, наиболее опасными точками в сечении являются т. «*a*» и т. «*b*», где действуют  $\sigma_{max}$  и  $\tau_{max}$  и, следовательно, возникает плоское напряженное состояние (ПНС), которое излагается в разделе 12.

Главные напряжения при ПНС в осях ХОУ определяются по (12.10)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$
(13)

В нашем случае надо подставлять:  $\sigma_x = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{\max}$  из зависимостей (11), (12) и условие прочности запишется так

$$\frac{\sigma_{\max}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} \le [\sigma] \tag{I}$$

А это, как известно, есть *I теория прочности*. (см. раздел 13) Известны еще несколько теорий прочности, которые для ПНС в осях *XOY* 

записываются так (см. раздел 13):

 $II meoрия прочности
 <math>
 \frac{1}{2} \left[ (1-\mu)(\sigma_x + \sigma_y) + (1+\mu) \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] \leq [\sigma].$ 

В нашем случае подставляя:  $\mu = 0,3$  (коэффициент Пуассона),  $\sigma_x = \sigma_{\max}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{\max}$  получим

$$0,35\sigma_{\max} + 0,65\sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} \le [\sigma]$$
(II)

*Ш теория прочности*  $\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \le [\sigma]$ В нашем случае

$$\sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} \le [\sigma] \tag{III}$$

*IV теория прочности*  $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \le [\sigma]$  В нашем аливес

В нашем случае

$$\sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} \le [\sigma] \tag{IV}$$

110

Формулы (I)-(IV) используются для проверки прочности валов с заданными размерами сечений. І и II теории прочности рекомендуются для валов из хрупких материалов (чугун), для которых  $[\sigma] = [\sigma]_p$  (растяжение). III и IV теории прочности (т.п.) рекомендуется для валов из пластических материалов (стали и т.д.). При наличии в опасном сечении вала  $N_z \neq 0$ ,  $\sigma_{max}$  вычисляется с ее учетом

$$\sigma_{\max} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_u}{W} \tag{14}$$

Для проектирования вала, т.е. определения размеров его сечения, преобразуем формулы (I)-(IV): подставим формулы (11) и (12) в (I), получим

$$\frac{1}{2} \left( \frac{M_u}{W} + \sqrt{\frac{M_u^2}{W^2} + 4\frac{M_z^2}{4W^2}} \right) = \frac{1}{W} \left( \frac{1}{2} \left( M_u + \sqrt{M_u^2 + M_z^2} \right) \right) = \frac{M_p^I}{W} \le [\sigma]$$
  
где  $M_p^I = \frac{1}{2} \left( M_u + \sqrt{M_u^2 + M_z^2} \right)$  – расчетный (приведенный) момент по

теории прочности.

Подставляя (11) и (12) в другие теории прочности, легко убедится, что условия прочности I-IV можно записать одним обобщенным выражением

$$M_{\rm p}^i/W \le [\sigma] \tag{7.14}$$

где  $M_{\rm p}^{i}$  – расчетные моменты по  $i^{\frac{\rm ou}{\rm p}}$  теории прочности:

- I т.п.  $M_{\rm p}^{\rm I} = \frac{1}{2} \left( M_u + \sqrt{M_u^2 + M_z^2} \right);$ II т.п.  $M_{\rm p}^{\rm II} = 0,35M_u + 0,65\sqrt{M_u^2 + M_z^2};$ (7.15) III т.п.  $M_{\rm p}^{\rm III} = \sqrt{M_u^2 + M_z^2};$ IV т.п.  $M_{\rm p}^{\rm IV} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_z^2}$
- Из условия прочности (7.14) можно найти необходимый момент сопротивления сечения вала  $W^{\rm H} \ge M_{\rm p}^i / [\sigma]$ , а по нему размеры сечения:
- 1. Сплошное круглое сечение радиуса *R* : *W* =  $\pi R^3 / 4 \ge W^H$ , отсюда *R* ≥  $\sqrt[3]{4W^H / \pi}$
- 2. Трубчатое сечение: R наружный радиус, r внутренний. Здесь две неизвестных, а условие прочности (7.14) одно, поэтому надо самим задаться отношением k = R/r.  $W = \pi (R^4 r^4)/4R$ , r = R/k,  $W = \pi (R^4 R^4/k^4)/4R = \pi R^3 (1 1/k^4)/4 \ge W^{\text{H}}$ . Отсюда  $R \ge \sqrt[3]{4W^{\text{H}}/(\pi (1 1/k^4))}$ , r = R/k.

Ι

Далее, по сортаменту труб подбираем стандартную трубу с близкими размерами  $R_{\rm ct} \approx R, r_{\rm ct} \approx r$ , вычисляем  $W_{\rm ct} = \pi (R_{\rm ct}^4 - r_{\rm ct}^4)/R_{\rm ct}, A_{\rm ct} = \pi (R_{\rm ct}^2 - r_{\rm ct}^2)$ , находим  $\sigma_{\rm max}$  по (14) и  $\tau_{\rm max}$  по (12) и подставляем их в ту же теорию прочности (I)-(IV), по которой определялся  $M_{\rm p}^{(i)}$  из (7.15). Если условие прочности не выполняется, берем другую стандартную трубу и снова все повторяем. Допускаемая перегрузка 5% от [ $\sigma$ ].

Трубчатые сечения при изгибе с кручением являются более экономичными по весу.

<u>Примечание:</u> При наличии продольной силы  $N_z$  размеры сечения определяются вначале без ее учета, т.е. на  $M_u$  и  $M_z$ , а проверка проводится с учетом  $N_z$  по (14) и (12).

# РАЗДЕЛ 8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

## Понятие об устойчивой и неустойчивой формах равновесия. Понятие о критической нагрузке

Во многих случаях проектирования инженерных сооружений обычных расчетов на прочность бывает не достаточно для того, чтобы сделать вывод о безопасности существования сооружения.

Наряду с проблемой прочности существует проблема *устойчивости* сооружения или его элементов.

В общем случае при *устойчивом равновесии* тело, выведенной какойлибо внешней силой из положения равновесия, возвращается в исходное положение после прекращения действия силы.

Случаи устойчивого и неустойчивого равновесия имеются и в статике упругих стержней:



 а) Прямолинейная форма равновесия сжатого упругого стержня при некоторой величине сжимающей силы может оказаться неустойчивой и стержень резко искривится в плоскости

наименьшей жесткости.

б) Балка, у которой  $J_r >> J_v$ , при некоторой величине поперечной силы *Р* оказывается неустойчивой к изгибу и скручивается. Эти явления можно обнаружить легко на опытах С линейкой. Из экспериментов можно устойчивость выяснить, что ИЛИ равновесия неустойчивость формы упругого тела зависит от его размеров,

формы, материала, условий закрепления, величин и направления сил.

Значение силы (напряжения), при котором первоначальная форма равновесия упругого тела становится неустойчивой, называется критической силой (напряжением) –  $P_{\rm kd}$  ( $\sigma_{\rm kd}$ ).

Рассмотрим более подробно работу сжатого стержня. При малой сжимающей силе P, меньше критического значения  $P < P_{\rm kp}$ , сжатый стержень нечувствителен к малым поперечным возмущениям. При  $P = P_{\rm kp}$  прямолинейная форма сжатого стержня становится неустойчивой; достаточно при этом небольшого эксцентриситета приложенной силы, неоднородности материала по сечению или случайного импульса малого поперечного воздействия на него, чтобы стержень искривился. Даже после устранения возмущения стержень останется в изогнутом состоянии. При увеличении  $P > P_{\rm kp}$  изгиб будет увеличиваться. Поэтому такое явление называют еще *продольным изгибом*.

Появление продольного изгиба опасно тем, что при нем происходит очень сильное нарастание прогибов при незначительном увеличении сжимающей силы. Прогибы и нагрузка здесь связаны нелинейной зависимостью. Быстрое нарастание прогибов вызывает рост напряжений от изгиба и часто приводит к разрушению стержня.

Для тонких (гибких) стержней потеря устойчивости наступает при сравнительно небольших сжимающих напряжениях, не являющихся опасными с точки зрения прочности его материала.

История знает немало случаев разрушения инженерных сооружений изза неправильного расчета их элементов на устойчивость.

Таким образом, продольный изгиб является опасным, его допускать нельзя. Поперечные сечения сжатых стержней должны назначаться не только из условий прочности от сжатия, но из условий того, чтобы сжимающие напряжения были меньше критических напряжений.

$$\sigma_z < \sigma_{\rm kp} = \frac{P_{\rm kp}}{A}$$

## <u>Устойчивость сжатых стержней в упругой стадии.</u> <u>Формула Эйлера.</u>

Задачу определения критической силы (напряжений) впервые решил академик Л. Эйлер в 1744 году.

Заметим, что сама постановка задачи здесь иная, чем во всех ранее рассматриваемых: если раньше мы определяли деформацию стержня при заданных внешних нагрузках, то здесь ставится обратная задача: задавшись искривлением оси сжатого стержня, следует определить, при каком значении осевой сжимающей силы *P* такое искривление возможно.



Рис.8.1

рассмотрим Эйлера Для вывода формулы шарнирно-опертый, центрально-сжатый стержень постоянного сечения, слегка изогнутый в плоскости наименьшей жесткости. Стержень удерживается в искривленном состоянии силой  $P = P_{\kappa p}$  (см. рис. 8.1). Полагая, что материал стержня работает в пределах закона Гука и деформации стержня малы, для решения поставленной задачи можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня, полученным ранее

$$EJ\frac{d^2V}{dz^2} = -M_x \tag{a}$$

балки,  $J = J_{\min} = J_x$ . Изгибающий момент Здесь Vпрогибы В произвольном сечении z будет равен λ

$$A_x = P_{\rm Kp} \cdot V \tag{B}$$

Подставляя (в) в (а) и деля обе части на *ЕЈ* получим

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 V = 0$$
, где  $k^2 = \frac{P_{\kappa p}}{EJ}$  (8.1)

Общий интеграл полученного однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$V = A \cdot \sin k \cdot z + B \cdot \cos k \cdot z \tag{8.2}$$

Это решение включает три неизвестных: А и В – const интегрирования и значение  $k = \sqrt{\frac{P_{\kappa p}}{E I}}$ , т.к. величина критической силы еще неизвестна. Для определения неизвестных используем следующие граничные условия (см. рис.8.1):



Рис.8.2

при z = 0 опора *B*, поэтому V = 0 и следовательно, из уравнения (8.2) 1. следует

 $0 = A \cdot \sin 0 + B \cdot \cos 0$ откуда B = 0Таким образом, изогнутая ось является синусоидой  $V = A \cdot \sin k \cdot z$ (8.3)2

е. при 
$$z = l$$
, опора *C*, поэтому  $V = 0$ . Из уравнения (8.3) получим  $A \cdot \sin k \cdot l = 0$ 

Отсюда видно, что или A, или  $\sin kl$  равны нулю.

Если A = 0, то из уравнения (8.3) следует, что прогиб в любом сечении стержня равен нулю, т.е. он не потерял устойчивость, а это не соответствует  $\sin kl = 0$ . условию задачи. Следовательно необходимо принять, что Последнее условие выполняется, когда kl принимает значения:

$$kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ..., n\pi$$
, где  $n$  – любое целое число. Отсюда  $k = \frac{n \cdot \pi}{l}$ , а т.к.  
 $k = \sqrt{\frac{P_{\kappa p}}{EJ}}$ , то  $\frac{P_{\kappa p}}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2} n^2$  и отсюда  
 $P_{\kappa p} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} n^2$  (8.4)

Из формулы (8.4) следует, что потеря устойчивости стержня возможна при целом ряде значений силы  $P_{\rm kp}$  (n = 0, 1, 2, ..., n). Для практики интересно знать *наименьшее* значение осевой сжимающей силы, при которой происходит поперечный изгиб. При n = 0 получим  $P_{\rm kp} = 0$ , что не соответствует условиям задачи. Следовательно, наименьшее значение  $P_{\rm kp}$ принимает при n = 1

$$P_{\rm кр} = \frac{\pi^2 E J}{l^2} - \phi ормула Эйлера$$
(8.5)

Для стержня с шарнирными концами значению критической силы по формуле Эйлера соответствует изгиб по синусоиде с одной полуволной [формула (8.3)] и рис.8.2 при n = 1

$$V = A \cdot \sin \frac{\pi}{l} z \tag{8.6}$$

Значениям критической силы высших порядков (при n = 2, 3, ..., n) соответствуют искривления стержня по синусоидам с двумя, тремя и т.д. полуволнами. Исследования показали, что формы равновесия при n = 2, 3 и т.д. неустойчивы. Они переходят в устойчивые формы лишь при наличии промежуточных опор в т. *В* и *С* (рис. 8.2).

Константа A осталась неопределенной. Физический смысл ее выясняется, если в уравнение синусоиды (8.6) положить  $z = \frac{l}{2}$ . Тогда  $V = A \cdot \sin \frac{\pi}{2} = A$ . Следовательно, A -это прогиб стержня в середине. Так как при  $P = P_{\rm Kp}$  нами принято, что равновесие изогнутого стержня возможно при различных отклонениях его от прямолинейной формы, *лишь бы эти отклонения были малыми*, то естественно, что прогиб A остался неопределенным.

# ВЛИЯНИЕ СПОСОБОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ

На рис. 8.3 показаны формы потери устойчивости стержней длиной *l* с различными случаями закрепления концов. Случай б) нами рассмотрен при выводе формулы Эйлера. Этот случай называют *основным случаем* закрепления.

Для других случаев закрепления можно повторить все выкладки, изменяя в каждом случае только граничные условия и получить соответствующие значения  $P_{\rm kp}$ . Однако можно пойти другим путем.



#### Рис.8.3

Сравнивая рис. а) и б) видим, что изогнутая ось стержня, защемленного одним концом, находится в тех же условиях, что и верхняя часть стержня длиной 2l с шарнирными концами. Следовательно,  $P_{\rm kp}$  для стойки длиной l с одним защемленным концом будет та же, что для стойки длиной 2l с шарнирными концами. Поэтому, подставляя 2l вместо l в формулу Эйлера

 $P_{\rm kp}^{(a)} = \frac{\pi^2 E J}{4l^2}$  – Эйлерова сила для стержня с

одним защемленным концом.

На рис. г) показана потеря устойчивости стержня с двумя защемленными концами. Видно, что она симметрична относительно середины стержня; точки перегиба изогнутой оси (в которых, как известно, изгибающие моменты равны нулю) расположены на четвертях длины стержня. Следовательно, здесь средняя часть стержня длиной l/2 находится в тех же условиях, что и шарнирно закрепленный по концам стержень. Поэтому, подставляя здесь l/2 вместо l в формулу Эйлера найдем

$$P_{\rm kp}^{(\Gamma)} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$$
–Эйлерова сила для стержня с двумя

защемленными концами

Полученные формулы Эйлера при различных закреплениях концов стержня можно записать в общем виде:

$$P_{\rm kp} = \frac{\pi^2 E J}{\left(\mu l\right)^2} \tag{8.7}$$

Здесь *µ* – коэффициент приведения длины.

найдем:

 $\mu l$  – приведенная длина стержня.

Для основных случаев закрепления стержней, показанных на рис. 8.3 коэффициент µ имеет следующие значения:

**а)** один конец защемлен, другой свободный  $\mu = 2$ ;

**б)** с шарнирными концами  $\mu = 1$ ;

в) один конец защемлен, другой шарнирный  $\mu \approx 0.7$ ;

г) с двумя заделанными концами  $\mu = 0,5$ .

Зная критическую силу, можно найти критическое напряжение, поделив силу на площадь. Так как на деформации стержня местные ослабления площади сечения (отверстиями) сказываются мало, то при расчетах на устойчивость принято использовать полную площадь сечения. Следовательно, в формуле Эйлера  $J = i^2 A$ . Тогда

$$\sigma_{\rm kp} = \frac{P_{\rm kp}}{A} = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l/i)^2}$$

Окончательно

$$\sigma_{\rm \kappa p} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{8.8}$$

Здесь

 $\lambda = \mu l / i -$ гибкость стержня. (8.9)

Гибкость стержня важная характеристика стержней при расчетах их на устойчивость. В (8.9) надо подставлять  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции сечения, поэтому  $\lambda = \lambda_{\max}$  – максимальная гибкость. Стержень теряет устойчивость в той плоскости, в которой его гибкость максимальная.

В неочевидных случаях надо вычислить отдельно:  $\lambda_x = \mu_x l/i_x -$  гибкость относительно (вокруг) оси x и  $\lambda_y = \mu_y l/i_y -$  гибкость относительно оси y, т.е. в плоскости xz. Если  $\lambda_x > \lambda_y$ , то  $\lambda_{\max} = \lambda_x$  и расчет на продольный изгиб надо вести в плоскости изгиба yz, а если  $\lambda_y > \lambda_x$ , то  $\lambda_{\max} = \lambda_y$  и расчет вести в плоскости xz. Это очень важно, т.к. в случае ошибки расчет ведут в одной плоскости, а стержень теряет устойчивость в другой плоскости.

Для цилиндрического шарнира (вдоль оси x) относительно оси x считается шарнир, а относительно оси y можно принять защемление. Однако, следует иметь ввиду, что на практике редко удается осуществить защемление. Достаточно возможности небольшого поворота опорного сечения в защемлении, чтобы оно оказалось в условиях близких к шарнирному опиранию. Поэтому обычно принимают  $\mu_x = \mu_y = \mu$ .

Формула (8.8) тоже формула Эйлера для критических напряжений.

## <u>Пределы применимости формулы Эйлера. Потеря устойчивости за</u> <u>пределами пропорциональности</u>

Формула Эйлера получена из интегрирования дифференциального уравнения упругой оси балки, т.е. предполагалось, что стержень работает в пределах упругих деформаций по закону Гука. Недаром в формуле Эйлера фигурирует модуль Юнга *E*.

Следовательно, формулой Эйлера нельзя пользоваться для оценки устойчивости стержней, если критические напряжения, вычисленные по ней, получаются выше предела пропорциональности (где закон Гука не применим).

Итак, формула Эйлера применима при соблюдении условия

$$\sigma_{\mathrm{кр}} \leq \sigma_{\mathrm{пц}}$$
 или  $\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\mathrm{пц}}$ , откуда $\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\mathrm{пц}}}}$ 

Здесь правая часть представляет наименьшее (предельное) значение гибкости стержня, при котором можно пользоваться формулой Эйлера и обозначается

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}$$
(8.10)

Условие применимости формулы Эйлера тогда примет вид:

$$\lambda \ge \lambda_{\text{пред}}$$
 (8.11)  
Для Ст.3  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_{\text{пц}} = 2000 \text{ кг/см}^2 \text{ и } \lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{E/\sigma_{\text{пц}}} \approx 100$ .  
Для Ст.5  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_{\text{пц}} = 3000 \text{ кг/см}^2 \text{ и } \lambda_{\text{пред}} \approx 90$ .  
Для чугуна  $\lambda_{\text{пред}} \approx 80$ .  
Для дерева  $\lambda_{\text{пред}} \approx 110$ .

При гибкости стержня, меньше предельной, критическое напряжение, определенное по формуле Эйлера, получается значительно выше  $\sigma_{nu}$ .

Например, при 
$$\lambda = 50$$
 (Ст.3)  $\sigma_{\rm kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{50^2} \approx 8000 \, {\rm kr/cm}^2$ , т.е.

величина  $\sigma_{\rm кp}$  оказывается значительно больше предела прочности.

Ошибочное использование формулы Эйлера для вычисления  $\sigma_{\rm kp}$  и проверки устойчивости при малых гибкостях, приводили иногда к серьезным катастрофам сооружений. Итак, решение Эйлера применимо на практике лишь для тонких и длинных стержней с большой гибкостью. Между тем на практике часто встречаются стержни с малой гибкостью.

Опыты показали, что если по Эйлеру  $\sigma_{\rm kp} > \sigma_{\rm nu}$ , то *действительные* критические напряжения значительно ниже определенных по Эйлеру.

Важнейшим источником для установления действительных критических напряжений за пределом пропорциональности, т.е. при малых и средних гибкостях, явились результаты эксперимента.

Стержни, для расчета на устойчивость которых нельзя пользоваться формулой Эйлера, можно разбить на две большие группы:

1) Стержни с малой гибкостью

$$0 < \lambda \leq 40$$

Для таких стержней нельзя говорить о явлении потери устойчивости прямолинейной формы стержня в том смысле, как это имеет место для тонких и длинных стержней. Эти короткие стержни будут выходить из строя главным образом от потери прочности, т.е. напряжения сжатия в них достигнут  $\sigma_{\rm T}$  (для пластичных) или  $\sigma_{\rm BD}$  (для хрупких) материалов.

Поэтому для коротких толстых стержней  $0 < \lambda \le 40$ , за критические напряжения принимают:

$$\sigma_{\rm kp} \approx \sigma_{\rm T}$$
 или  $\sigma_{\rm kp} \approx \sigma_{\rm Bp}$  (8.12)

2) Стержни средней гибкости

$$40 < \lambda \leq \lambda_{\text{пред}}$$

Для конструкционной Ст.3 40 < *λ* ≤ 100. С подобными значениями гибкости инженер чаще всего встречается на практике.

Эти стержни при сжатии теряют свою прямолинейную форму и разрушаются от продольного изгиба. В опытах для них можно отметить наличие ясно выраженной критической силы в Эйлеровом смысле. Для таких стержней критические напряжения получаются выше предела пропорциональности и ниже предела текучести материалов.

На основании обширного опытного материала, собранного профессором Ф. Ясинским, им была предложена эмпирическая формула для определения критических напряжений подобных стержней



На основании всего вышесказанного можно построить график критических напряжений (в зависимости от гибкости) для любого материала.

Для конструкционной Ст.3 с  $\sigma_{\pi\mu} = 2000$  кг/см<sup>2</sup> и  $\sigma_{\pi} = 2400$  кг/см<sup>2</sup> этот график (диаграмма) имеет вид, показанной на рис. 8.4. На этом графике четко выделяется три зоны:

1) 
$$0 < \lambda \le 40$$
  $\sigma_{\rm kp} \approx \sigma_{\rm T}$ 

2)  $40 < \lambda \le 100 -$  прямая Ясинского

*3) λ* ≥100 – гипербола Эйлера

Пунктиром показана гипербола Эйлера за  $\sigma_{nu}$ , которой нельзя пользоваться при  $\lambda < \lambda_{npen}$ .

## <u>Расчет стержней на устойчивость.</u> Коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения

Для сжатых стержней кроме условия прочности

$$\sigma = \frac{P}{A} \le [\sigma], \, \operatorname{rge}[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n_0} \tag{A}$$

должно быть удовлетворено одновременно условие устойчивости

$$\sigma = \frac{P}{A} \le [\sigma_{\rm y}] \tag{B}$$

где  $[\sigma_y] = \frac{\sigma_{\kappa p}}{n_y}$  – допустимые напряжения на устойчивость,  $n_y$  –

коэффициент запаса устойчивости.

Обычно  $n_y = 1,8 \div 3 -$  имеет более высокое значение, чем коэффициент  $n_0$  запаса прочности.

Зависимости (А) и (В) удобны для проверки прочности и устойчивости уже спроектированных стержней.

Для удобства проектировочных расчетов введено понятие коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения, который обозначается буквой  $\varphi$ .

Найдем отношение 
$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{\kappa p}}{n_y} \frac{n_0}{\sigma_0} \underline{\quad \text{или}} [\sigma_y] = [\sigma] \frac{\sigma_{\kappa p}}{n_y} \frac{n_0}{\sigma_0}$$
Обозначим  $\varphi = \frac{\sigma_{\kappa p}}{\sigma_0} \frac{n_0}{n_y}$ 
(C)

Получим

 $\frac{(C)}{[\sigma_y] = \varphi[\sigma]}$ (8.14)

 $\varphi$  еще называют коэффициентом продольного изгиба в Строительных Нормах. Для ряда значений гибкости  $\lambda$ , по вышеприведенным формулам или графикам (рис. 8.4) можно найти величины  $\sigma_{\rm kp}$ . Далее, зная  $\sigma_0 = \sigma_{\rm T}$  или  $\sigma_0 = \sigma_{\rm Bp}$  и выбрав коэффициенты  $n_0$  и  $n_{\rm y}$ , по зависимости (С) можно составить для данного материала таблицы значений коэффициента  $\varphi$  в функции от гибкости  $\lambda$ , т.е.  $\varphi = f(\lambda)$ .

Такие таблицы приводятся в учебниках и задачниках по сопротивлению материалов. Пользуясь этими таблицами удобно подбирать сечения сжатых стержней.  $0 < \phi \le 1$ 

<u>С учетом (8.14)условие устойчивости (В) получит вид</u>  $P/A \le \varphi[\sigma]$ 

Отсюда следует формула, удобная для подбора размеров сечений

$$A \ge \frac{P}{\varphi[\sigma]} \tag{8.16}$$

# ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

I. Проверка сжатой колонны на устойчивость

<u>Дано</u>: колонна изготовлена из двух стандартных двутавров №30, высотой l = 5 м, нижний конец забетонирован в пол, верхний свободен ( $\mu = 2$ ) и нагружен силой P = 30 т.



На рис. показано поперечное сечение колонны. Стыковка двутавров по высоте колонны осуществляется сваркой. Из таблиц ГОСТа для двутавра №30 находим:  $A = 46,5 \text{ см}^2$ , b = 13,5 см,  $i_x = 12,3 \text{ см}$ ,  $J_{y_0} = 337 \text{ см}^4$ .

Прежде всего решаем вопрос, относительно какой оси x или y сечения колонны возможна потеря устойчивости. Как указано выше, для этого надо вычислить  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$ :

$$\lambda_{\rm r} = \mu l / i_{\rm r} = 2 \cdot 500 / 12,3 = 81,3$$

Вычисление  $\lambda_y$  осложняется тем, что в ГОСТе приводятся  $i_{y_0}$ (относительно оси  $y_0$ ), а продольный изгиб колонны возможен относительно оси y (см. рис.). Надо вычислить  $i_y$ :  $J_y = J_{y_0} + A \cdot k^2$ , где k = b/2,  $J_y = 337 + 46,5 \cdot 6,75^2 = 2455,7$  см<sup>4</sup>,  $i_y = \sqrt{J_y/A} = \sqrt{2455,7/46,5} = -7,27$  см,  $\lambda_y = \mu l/i_y = 2 \cdot 500/7,27 = 137,6$ .

Итак :  $\lambda_x = 81,3$ ;  $\lambda_y = 137,6$ . Следовательно  $\lambda_{\max} = \lambda_y = 137,6$  и продольный изгиб колонны возможен относительно оси *y* (т.е. в плоскости *xz*). Далее возможны два пути:

a) таблиц  $\varphi$  нет

В этом случае определяем по  $\lambda_{\max}$  формулу для вычисления  $\sigma_{\kappa p}$  из возможных:

$$0 \le \lambda \le 40$$
  $\sigma_{\rm kp} \approx \sigma_{\rm T}$  или  $\sigma_{\rm kp} \approx \sigma_{\rm Bp}$   
 $40 \le \lambda_{\rm max} \le \lambda_{\rm пред}$   $\sigma_{\rm kp} = a - b\lambda_{\rm max}$  формула Ясинского  
 $\lambda_{\rm max} > \lambda_{\rm пред}$   $\sigma_{\rm kp} = \pi^2 E / \lambda_{\rm max}^2$  формула Эйлера

Для Ст.3, из которых изготовлены двутавры, как было указано выше  $\lambda_{\text{пред}} = 100, E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ . У нас  $\lambda_{\text{max}} = 137,6$ , поэтому выбираем формулу Эйлера

$$\sigma_{\rm kp} = 3,14^2 \cdot 10^6 / 137,6^2 = 1041,5 \ {\rm kg/cm^2}$$

Выберем  $n_y = 1,8 -$ коэффициент запаса устойчивости. Допускаемое  $[\sigma]_v = \sigma_{\kappa p} / n_v = 1041,5/1,8 = 578,6 \ \kappa r/cm^2$  Проверим устойчивость колонны:

$$P/2A \le [\sigma]_{y}$$
,  $30000/2 \cdot 46,5 = 322,6 \le 578$ 

Условие устойчивости выполняется, следовательно, колонна выдержит P = 30 т без потери устойчивости.

*в*) имеются таблицы  $\varphi$  для Ст.3

 $\lambda_{\text{max}} = 137,6$  по таблице найдем:

$$\lambda = 130 \quad \varphi = 0.4$$
  
 $\lambda = 140 \quad \varphi = 0.36$   
Для  $\lambda_{\text{max}} = 137.6 \quad \varphi = 0.4 - 0.004 \cdot 7.6 = 0.37$   
Условие устойчивости по (8.15).  
 $P/2A \le \varphi[\sigma], \ \Gamma \text{де} \ [\sigma] = 1600 \ \text{кг/см}^2 \ \text{для CT.3}$   
 $30000/2 \cdot 46.5 \le 0.37 \cdot 1600, \qquad 322.6 \le 592$ 

Условие устойчивости выполняется.

**II**. Проектирование колонны из стандартных профилей



Проектирование рациональной колонны включает три обязательных пункта:

- 1. Подбор номера стандартного профиля, обеспечивающего прочность И устойчивость колонны OT заданных сжимаюшей силы P И условиях закрепления колонны  $\mu$ . Расчет выполняют используя таблицы  $\varphi$ .
- Обеспечение равноустойчивости колонны относительно главных центральных осей поперечного сечения колонны, соответствующим расположением профилей в колонне (т.е. определение расстояния β (рис. 8.5в)).
- 3. Отдельные стандартные профили надо объединить В колонну с помощью поперечных планок или решетки, исключив при этом возможность местной потери устойчивости каждого профиля относительно осей  $y_0$  (пунктир на рис. достигается определением 8.5a). Это расстояния «b» между планками.

Прежде всего решается вопрос, относительно какой центральной оси сечения колонны Х или У возможна потеря устойчивости. Для сечения колонны, показанного на рис. 8.5 в, этот вопрос решается так: размер  $\langle \langle \beta \rangle \rangle$ не задается, поэтому увеличивая его увеличивается  $J_{y} = J_{y_{0}}^{T} + A_{T}k^{2} (J_{y_{0}}^{T} \text{ и } A_{T} - \text{табличные значения из ГОСТа профилей); т.к.$  $i_{y} = \sqrt{J_{y}/A_{T}}$  – тоже увеличивается,  $\lambda_{y} = \mu l/i_{y}$  при этом уменьшается, а  $\lambda_x = \mu l / i_x^{\mathrm{T}}$  не зависит от размера  $\beta$ . Следовательно, увеличивая « $\beta$ » всегда можно добиться, чтобы  $\lambda_x \geq \lambda_v$ , а это значит, что возможный продольный изгиб будет относительно оси x (в плоскости yz). Обычно принимают условие равноустойчивости колонны, т.е.  $\lambda_x = \lambda_y$ , из которого И определяется расстояние « $\beta$ ».

<u>Примечание:</u> В предыдущем примере (І. Проверка на устойчивость) было получено  $\lambda_x = 81,3$ ,  $\lambda_y = 137,6$ , т.е. колонна из двутавров не равноустойчива и не рациональна. Если двутавры раздвинуть на некоторое расстояние  $\beta$  (т.е. увеличить «k»), можно получить равноустойчивую колонну, которая выдержит значительно большую нагрузку P.

#### 1. Подбор номера профилей.

Используем формулу (8.16)  $A \ge P/\varphi[\sigma]$ . Здесь площадь A зависит от  $\varphi$ , а  $\varphi$  зависит от  $\lambda = \mu l/i$ , где  $i = \sqrt{J/A}$ . В итоге получим, что искомая площадь A сама зависит от A. Поэтому задача решается методом попыток:

<u>1 попытка</u>: в (8.16)  $\varphi$  неизвестна, но  $0 \le \varphi \le 1$ , поэтому вначале примем  $\varphi_0 = 0,5$  и найдем суммарную площадь сечения колонны  $A_{\Sigma} \ge P/\varphi_0[\sigma]$ . Далее  $A_1 = A_{\Sigma}/n$  – площадь одного профиля (n = 2). По величине  $A_1$  из табл. ГОСТа находим ближайший номер профиля и для него  $i_x^{T}$ . Вычисляем гибкость  $\lambda_x = \mu l/i_x^{T}$  и по ней из таблиц  $\varphi$  уточняем  $\varphi$ , т.е. получим  $\varphi_1$ .

<u>2 попытка</u>: в (8.16) подставим  $\varphi = \varphi_1$  и снова повторим расчет (как в 1 попытке) до определения  $\varphi_2$ . Здесь уже делаем проверку на устойчивость по (8.15)  $P/(A_2^{\text{T}} \cdot n \cdot \varphi_2) \leq [\sigma]$ . Здесь  $A_2^{\text{T}}$  – табличное значение площади найденного профиля.

Колонна будет оптимальной, если условие устойчивости (8.15) понимать как приблизительное равенство (допускаемая перегрузка до 5% от [ $\sigma$ ]). Если условие (8.15) не выполняется, или левая часть значительно меньше [ $\sigma$ ] (выбраны слишком большие номера профилей), делаем следующую попытку с  $\varphi = \varphi_2$  до определения  $\varphi_3$  (можно просто изменять в необходимую сторону номера профилей) и снова проверяем устойчивость  $P/(A_3^{T} \cdot n \cdot \varphi_3) \approx [\sigma]$  и т.д. Обычно требуется 3÷4 попытки.

2. Определив номер стандартных швеллеров найдем расстояние « $\beta$ » из принятого выше условия равноустойчивости  $\lambda_x = \lambda_y$  или  $\mu l / i_x^{T} = \mu l / i_y$ , откуда  $i_y = i_x^{T}$ . Тогда

$$J_{y} = A_{\rm T} i_{y}^{2} = A_{\rm T} i_{x}^{{\rm T}^{2}}$$
(a).

С другой стороны

$$J_{y} = J_{y_{0}}^{\mathrm{T}} + A_{\mathrm{T}}k^{2}$$
(B)

Здесь k расстояние между осями  $y_0$  и y, определяется из рис. 8.5 в:

$$k = \beta / 2 + b_{\mathrm{T}} - z_0^{\mathrm{T}} \tag{c}$$

Приравниваем (а) и (в):  $A_{\rm T} i_x^{\rm T^2} = J_{y_0}^{\rm T} + A_{\rm T} k^2$ , откуда найдем размер «*k*», а из (с) вычислим « $\beta$ ».

3. Расстояние «*b*» межу планками находится из условия, чтобы гибкость  $\lambda_{y_0}$  каждого стандартного швеллера колонны между планками относительно оси  $y_0$ , была не больше гибкости всей колонны  $\lambda_x$ , найденной в последней попытке п.1, т.е.

$$\lambda_{y_0} = \mu_0 \cdot b \,/\, i_{y_0}^{\mathrm{T}} \le \lambda_x \tag{d}$$

Планки к швеллерам крепятся сваркой или болтами (заклепками). На практике обычно принимают  $\mu_0 = 1$  как для стержней с двумя шарнирными концами. Тогда из (d) найдем  $b \le \lambda_x i_{y_0}^{T}$ .

Необходимое число планок «N» в колонне N = l/b + 1 округляется до целого числа.

Действительное расстояние b между планками b = l/(N-1)

Планки ставятся с двух сторон колонны, как показано на рис. 8.5в, т.е. надо 2N планок.

# УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЕ



Выше было указано, что при  $\sigma_{\rm kp} > \sigma_{\rm nu}$  необходимо использовать эмпирическую формулу Ясинского  $\sigma_{\rm kp} = a - b\lambda_{\rm max}$ , где коэффициенты *a* и *b* определяются экспериментально.

На рис. 8.6 показана диаграмма деформирования упруго-пластического материала *OBKL*. До т. *В* она линейна, а дальше криволинейна. Такой диаграммой

#### Рис.8.6

обладают многие материалы.

Было сделано несколько попыток заменить эмпирическую формулу Ясинского другой, аналитической. Были долгие споры о справедливости той или иной формулы. Конец всем спорам положил Шенли, который доказал, что более строгой является формула Энгессера в виде

$$P_{\rm kp} = \frac{\pi^2 E_\tau J_{\rm min}}{\left(\mu l\right)^2} \tag{8.17}$$

Здесь  $E_{\tau}$  – касательный модуль упругости.

Для использования этой формулы надо иметь диаграмму деформирования материала колонны. Положение т. *К* на диаграмме определяется по напряжению сжатой колонны  $\sigma_{\kappa} = P/A$ . Далее через т. *К* проводим касательную a-b к диаграмме и определяем  $\angle \beta$  наклона ее.  $E_{\tau} = \text{tg}\beta$ . Далее по (8.17) определяем  $P_{\kappa p}$ . Все остальное в (8.17) определяется как в формуле Эйлера. При  $\sigma_{\kappa} < \sigma_{nu}$   $E_{\tau} = E$ , т.е. (8.17) можно пользоваться и вместо формулы Эйлера. Поэтому (8.17) можно пользоваться при  $\lambda_{\text{max}} \ge 40$ .

# РАЗДЕЛ 9. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

## Общие понятия. Принцип Д'Аламбера

При <u>статическом</u> действии нагрузок ускорения частиц элементов конструкции при ее деформации невелики и возникающими при этом силами инерции можно пренебречь. <u>Динамической</u> называется такая нагрузка, которая вызывает значительные ускорения частиц конструкции. Эти ускорения могут быть постоянными по величине и направлению, могут быть переменными и знакопеременными. Силы инерции, как и вес – объемные силы, они вызывают добавочные напряжения в конструкции. Влияние ускорений частиц конструкции (и сил инерции) на ее напряженное состояние можно учесть с помощью *принципа Д'Аламбера*: «В каждый момент времени любой элемент движущейся конструкции находится в равновесии под действием внешней нагрузки и <u>сил инерции</u>».

При действии динамической нагрузки можно выделить три основные задачи:

- I. <u>Учет сил инерции</u>. Здесь ускорения частиц конструкции можно вычислить по правилам кинематики твердого тела и, следовательно, инерционные силы.
- **II.** <u>Удар тел.</u> Здесь ускорения, а значит и силы инерции, зависят от деформации соударяемых тел, которые можно определить методами сопротивления материалов.
- **III.** <u>Колебания тел</u>. Они возникают обычно при действии на конструкцию знакопеременной нагрузки.

Рассмотрим подробнее эти задачи.

## <u>I. Учет сил инерции</u>

Величина элементарной силы инерции  $dP_{\rm ин}$ , действующей на частицу тела равна

$$dP_{\rm MH} = dm \cdot a = \frac{dG}{g}a = \frac{\gamma dV}{g}a \tag{9.1}$$

Здесь: dm, dG, dV – масса, вес, объем частицы;  $\gamma$  – объемный вес материала частицы;  $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$  – ускорение свободного падения; a – ускорение при движении частицы.

Сила инерции направлена в сторону, противоположную направлению ускорения.

При расчете стержневых конструкций объемные силы инерции удобно представить <u>распределенной погонной инерционной нагрузкой</u>  $p_{\rm uh}$ .

Стержень длиной dz и площадью поперечного сечения A имеет объем dV = Adz. Подставим это в (9.1)

$$dP_{\rm MH} = \frac{\gamma A dz}{g} a$$

Погонная нагрузка – это нагрузка на единицу длины

$$p_{\rm иH} = \frac{dP_{\rm иH}}{dz} = \frac{\gamma A dz}{g dz} a = \frac{\gamma A}{g} a$$
(9.2)

Пример 1. Подъем груза на длинном тросе с постоянным ускорением *а*.



$$p_{\rm uH} \cdot l$$
 погонную инерционную нагрузку от троса. С учетом  
 $Q(1)$  и (9.2) получим  
 $N_{\rm d} = G + Q + P_{\rm uH} + p_{\rm uH}l = G + \gamma Al + \frac{G}{g}a + \frac{\gamma Al}{g}a$ 
(1)

$$N_{\mathcal{A}} = \left(G + \gamma A l\right) \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \left(G + \gamma A l\right) \cdot K_{\mathcal{A}} = N_{\mathrm{cr}} \cdot K_{\mathcal{A}}$$

Здесь:  $K_{\pi} = 1 + a/g - динамический коэффициент, <math>N_{cT} = G + \gamma A l$ статическое усилие в сечении троса.

Обозначим:  $\sigma_{\rm d} = N_{\rm d} / A$  – динамическое напряжение,  $\sigma_{\rm ct} = N_{\rm ct} / A$  – статическое напряжение в тросе.

Поделив (1) на А-получим

$$\sigma_{\rm d} = \sigma_{\rm ct} \cdot K_{\rm d}$$

Условие прочности троса  $\sigma_{d} \leq [\sigma]$ , где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение. <u>Пример 2.</u> Вращение стержня в горизонтальной плоскости.



<u>Дано:</u>  $l, A, \gamma - длина, пло$ щадь сечения, объемный вес $материала стержня; <math>\omega -$  угловая скорость вращения.

На расстояние *z* от оси вращения выделим произвольное

сечение. При равномерном вращении стержня центростремительное ускорение  $W_{\rm H}$ , действующие на частицы стержня в этом сечении, определяется по правилам кинематики  $W_{\rm H} = \omega^2 z$ , а погонная инерционная центробежная нагрузка  $p_{\rm uh}$  направлена от оси вращения и по (9.2) равна

$$p_{\rm uh} = \frac{\gamma A}{g} W_{\rm H} = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 z \tag{2}$$

Инерционные силы вызывают растяжение стержня силой  $N_{\rm d}$  в сечении z стержня. Т.к  $p_{\rm uh}$  линейно меняется по длине стержня (z в первой степени в

(2)), то  $N_{\rm d}$  найдем суммированием (интегрированием)  $p_{\rm uh}$  на участке от z до l/2

$$N_{\rm A} = \int_{z}^{l/2} p_{\rm HH} dz = \int_{z}^{l/2} \frac{\gamma A \omega^2}{g} z dz = \frac{\gamma A \omega^2}{g} \frac{z^2}{2} \bigg|_{z}^{l/2} = \frac{\gamma A \omega^2}{2g} \left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)$$
(3)

Из (3) видно, max  $N_{\pi}$  при z = 0 (в середине стержня)

$$N_{\rm A}^{\rm max} = \frac{\gamma A \,\omega^2 l^2}{8g} \tag{4}$$

Далее можно найти  $\sigma_{d}^{max}$  – максимальное напряжение в стержне и записать условие его прочности.

$$\sigma_{\mu}^{\max} = N_{\mu}^{\max} / A = \frac{\gamma \omega^2 l^2}{8g} \le [\sigma]$$
(5)

Из (5) можно найти тах допускаемую скорость вращения  $\omega$  стержня.

#### <u>II. Расчеты на удар тел</u>

Продолжительность удара очень мала и сложно вычислить ускорения частиц ударяемой конструкции. Поэтому, воспользоваться принципом Д'Аламбера затруднительно и обычно здесь используют закон сохранения энергии.

Для удобства расчета на удар вводят условное понятие *динамическая* сила  $P_{\rm d}$ . Эта такая сила, которая, будучи статически приложенной в точке удара, вызовет такие же перемещения (деформации) ударяемого тела, как и при ударе.

#### Расчет на удар без учета массы ударяемого бруса

Рассмотрим закрепленный упругий брус, на который с высоты h падает груз весом P. При этом брус может испытывать: а) продольные деформации (колонны, сваи) рис. 9.1а, б) изгибные деформации (балки) рис. 9.1б.



Рис. 9.1

После удара, когда груз P останавливается в нижнем положении, деформации каждого сечения бруса достигают наибольших значений. Их обозначим:  $\Delta$  – деформации в точке удара,  $\Delta_z$  – в любом сечении бруса с координатой z (на рис. 9.16 в эти деформации (прогибы) показаны сплошной линией). Затем происходят затухающие колебания бруса, в конце которых устанавливаются деформации  $\Delta_{ct}$  (в точке удара) и  $\Delta_z^{ct}$  – в любом сечении, соответствующие статическому действию груза P (на рис. 9.16 эти деформации показаны пунктирной линией).

Расчет проведем при следующих допущениях:

- 1. Брус идеально упругий, справедлив закон Гука, модуль *Е* одинаков при динамическом и статическом нагружении;
- 2. Массу ударяемого бруса пока не учитываем;
- 3. Эпюра перемещений сечений бруса от удара подобна эпюре перемещений от статического действия груза *P*. (На рис. 9.16 графики прогибов, обозначенные сплошной и пунктирной линиями, подобны). Обозначим

$$\Delta/\Delta_{ct} = K_{\pi} - \partial u hamu ческий коэффициент$$
 (9.3)

Из третьего допущения и рис. 9.16 следует с учетом (9.3)

$$\Delta_z / \Delta_z^{\rm cr} = \Delta / \Delta_{\rm cr} = K_{\rm g} \tag{9.4}$$

Согласно принятого выше определения динамической силы  $P_{d}$ , от ее статического приложения возникнут деформации  $\Delta$  и  $\Delta_{z}$ , а от статического нагружения силой P появятся  $\Delta_{cT}$  и  $\Delta_{z}^{cT}$ . По закону Гука деформации пропорциональны нагрузкам, поэтому

$$P_{\rm m} / P = \Delta_z / \Delta_z^{\rm cr} = K_{\rm m} \tag{6}$$

По закону Гука и напряжения пропорциональны нагрузкам

$$\sigma_{\rm g} / \sigma_{\rm cr} = \Delta_z / \Delta_z^{\rm cr} = K_{\rm g}$$
(9.5)

Здесь  $\sigma_{\rm d}$  – динамические напряжения, т.е. возникают в брусе при ударе;  $\sigma_{\rm ct}$  – статические напряжения, возникают при статическом нагружении силой *P*.

Из (9.4) и (9.5) следует

$$\Delta_z = \Delta_z^{\rm cr} \cdot K_{\rm d}, \qquad \sigma_{\rm d} = \sigma_{\rm cr} \cdot K_{\rm d} \qquad (9.6)$$

Итак, деформации и напряжения в любом сечении бруса при ударе можно определить по (9.6), если вычислить  $K_{\rm d}$  – динамический коэффициент. А деформации  $\Delta_z^{\rm cr}$  и напряжения  $\sigma_{\rm cr}$  при любом виде статической нагрузки (осевой, изгибной, кручении и т.д.) мы умеем определять из вышеприведенных разделов.

Для решения задачи используем закон сохранения энергии. Груз P при падении проходит путь  $h + \Delta$  и совершает работу  $A = P(h + \Delta)$ .

При статическом нагружении силой  $P_{\rm d}$  получим ту же деформацию, что и при ударе, потенциальная энергия деформации бруса при этом, как известно,

определяется так  $U = \frac{1}{2} P_{d} \cdot \Delta$ . Сила  $P_{d}$  прикладывается в т. *К*, куда падает груз *P*. По закону сохранения энергии A = U, т.е.

$$P(h+\Delta) = \frac{1}{2} P_{\mu} \cdot \Delta \tag{7}$$

Из (6)  $P_{\rm d} = P \cdot K_{\rm d}$ , подставим в (7) получим

$$P(h+\Delta) = \frac{1}{2} P \cdot K_{\mathrm{d}} \cdot \Delta \tag{8}$$

Сокращаем на P и учитывая из (9.4), что  $K_{d} = \Delta / \Delta_{cr}$  найдем

$$2(h+\Delta) = \Delta^2 / \Delta_{\rm ct} \qquad \text{или} \quad \Delta^2 - 2\Delta_{\rm ct} \cdot \Delta - 2h\Delta_{\rm ct} = 0 \tag{9}$$

Относительно неизвестной  $\Delta$  получили стандартное квадратное уравнение типа  $x^2 + bx + c = 0$ 

Здесь  $b = -2\Delta_{cT}$ ,  $c = -2h\Delta_{cT}$ . Решение квадратного уравнения известно из справочников:  $x = \Delta = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ . В нашем случае получим

B: 
$$x = \Delta = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = c$$
 . B Hallem Chyrae Honyrum  

$$\Delta = \Delta_{cT} \pm \sqrt{\Delta_{cT}^2 + 2h\Delta_{cT}}$$
(10)

При ударе всегда  $\Delta > \Delta_{cr}$ , поэтому выбираем знак (+) и формулу (10) преобразуем так

 $\Delta = \Delta_{\rm ct} + \Delta_{\rm ct} \sqrt{1 + 2h/\Delta_{\rm ct}}$ или окончательно  $\Delta = \Delta_{\rm ct} (1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta_{\rm ct}})$  (11) Согласно (9.4)  $K_{\pi} = \Delta/\Delta_{\rm ct}$ , тогда из (11) получим

$$K_{\rm g} = 1 + \sqrt{1 + 2h / \Delta_{\rm cr}}$$
(9.8)

**Величина**  $\Delta_{cr}$  – статическая деформация бруса в точке удара от статического приложения силы *P* в точке «*K*» падения груза весом *P*. Определяется известными методами:

Рис. 9.1а: По закону Гука при осевой нагрузке

$$\Delta_{\rm cT} = \Delta l = Pl / EA$$

Рис. 9.16:  $\Delta_{ct} = V_{\kappa}$  – прогиб балки в т. *К* от силы *P*, приложенной в т. *К*. Определяется известным методом Клебша из раздела «Плоский изгиб балок».

Скорость груза, падающего с высоты h, как известно, определяется так  $V = \sqrt{2gh}$ , откуда  $2h = V^2 / g$ . Подставим это в (9.8) получим

$$K_{\rm g} = 1 + \sqrt{1 + V^2} / g\Delta_{\rm cr}$$
(9.9)

Преобразуем  $2h/\Delta_{ct}$  так:

$$2h/\Delta_{\rm cT} = \frac{P \cdot h}{\frac{1}{2}\Delta_{\rm cT}P} = \frac{T_0}{U_{\rm cT}}$$
(12)

Здесь:  $T_0 = P \cdot h$  – энергия падающего груза в момент начала удара;

 $U_{\rm cr} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta_{\rm cr}$  – потенциальная энергия деформации бруса от статического нагружения его силой P в т. K. С учетом (12) из (9.8) найдем

$$K_{\rm g} = 1 + \sqrt{1 + T_0 / U_{\rm cr}} \tag{9.10}$$

Из (9.8) следует, что чем больше  $\Delta_{\rm cr}$ , т.е. чем больше деформируется брус от статической нагрузки P, тем меньше K<sub>д</sub> и по (9.6) меньше напряжения при ударе. Так появилась идея ставить в конструкциях, испытывающих ударные нагрузки, различные амортизаторы, рессоры, пружины и поясняется поговорка «знал бы, где упаду, подстелил бы солому».

Пример. Порядок расчета балки на удар.



На балку с высоты *h* в т. К h падает груз *P*. Найти к максимальное напряжение  $\sigma_{\pi}^{\max}$  – максимальное паприлест от удара, максимальные прогибы в пролете и консоли. В т K балки статически примаксимальное напряжение в балке

кладываем силу P, равную весу груза (рис.б). Определяем от нее опорные реакции и строим эпюру M<sub>x</sub>-изгибающих моментов. Из Эп. M<sub>x</sub> находим  $M_x^{\text{max}}$  и, зная размеры и форму поперечного сечения балки, вычисляем  $\sigma_{ct}^{max} = |M_x^{max}| / W_x$  – максимальные напряжения от статического нагружения. Для вычислений по (9.6) надо знать  $K_{\pi}$ .

Для балки б) со статической силой Р для двух участков запишем дифференциальные уравнения изгиба  $EJ_xV'' = -M_x$  по методу Клебша, интегрируем их и из условий закрепления балки находим константы интегрирования. Строим график прогибов балки, приблизительный вид которого показан на рис.б. Находим  $V_{\rm K}$  – прогиб балки в сечении «К», это и есть  $\Delta_{ct} = V_{\kappa}$ . По (9.8) вычисляем  $K_{\pi}$  и далее

$$\sigma_{\rm d}^{\rm max} = \sigma_{\rm ct}^{\rm max} \cdot K_{\rm d}$$

В консоли максимальный прогиб при ударе  $V_{\text{д конс}}^{\text{max}} = V_{\text{к}} \cdot K_{\text{д}}$ .

В пролете находим V<sub>D</sub> – максимальный прогиб от статического нагружения и далее максимальный прогиб при ударе  $V_{\text{д пролета}}^{\text{max}} = V_D \cdot K_{\text{д}}$ .

Дальше можно проверить балку на прочность и жесткость обычными метолами.

Существует термин «падение с высоты h = 0». Из (9.8) в этом случае получим  $K_{\pi} = 2$ . Чтобы этого не было, груз надо опускать плавно не только до соприкосновения с конструкцией, но и дальше, при перемещении груза вместе с деформируемой конструкцией до полной их остановки.

#### Учет массы ударяемого тела (бруса)

Учет массы ударяемого тела достаточно сложен, поэтому приведем окончательные формулы без вывода их.

Динамический коэффициент в этом случае определяется по формулам, аналогичным (9.8)-(9.10)

$$K_{\rm g} = 1 + \sqrt{1 + 2h/\alpha\Delta_{\rm cr}} = 1 + \sqrt{1 + V^2/\alpha g\Delta_{\rm cr}} = 1 + \sqrt{1 + T_0/\alpha U_{\rm cr}} \quad (9.11)$$
  
Здесь:  $\alpha = 1 + \beta O/P$ ;

Q – вес ударяемого тела, для бруса  $Q = \gamma A l$ 

 $\beta$  – редукционный коэффициент, определяется так

$$\beta = \frac{1}{Q} \int_{Q} \left( \frac{\Delta_{z}^{\text{ст}}}{\Delta_{\text{ст}}} \right)^{2} dQ, \qquad \text{для бруса } \beta = \frac{1}{l} \int_{0}^{l} \left( \frac{\Delta_{z}^{\text{ст}}}{\Delta_{\text{ст}}} \right)^{2} dz \qquad (9.12)$$

Вычислив  $\beta$ , определяем коэффициент  $\alpha$  и далее  $K_{\alpha}$ .

<u>Пример 1.</u> Вычислить  $\beta$  для колонны, показанной на рис. 9.1а. По закону Гука для сечения *z* от статического нагружения силой *P*:  $\Delta_{z}^{cT} = Pz / EA$ ,  $\Delta_{cT} = \Delta l = Pl / EA$ , где *A* – площадь поперечного сечения колонны, *E* – модуль упругости материала.

$$\beta = \frac{1}{l} \int_{0}^{l} \left( \frac{\Delta_{z}^{CT}}{\Delta_{CT}} \right)^{2} dz = \frac{1}{l} \int_{0}^{l} \left( \frac{PzEA}{EA \cdot Pl} \right)^{2} dz = \frac{1}{l^{3}} \int_{0}^{l} z^{2} dz = \frac{z^{3}}{3l^{3}} \bigg|_{0}^{l} = \frac{1}{3}.$$

<u>Пример 2.</u> Вычислить  $\beta$  для балки, показанной на рис. 9.16, когда груз *P* падает на середину балки.

Опорные реакции R = P/2, дифференциальные уравнения изгиба балки от статического нагружения силой P:

$$EJ_xV'' = -Rz, EJ_xV' = -Rz^2/2 + C, EJ_xV = -Rz^3/6 + C \cdot z + D, 0 \le z \le l/2,$$

т.е. ввиду симметрии ограничимся одним участком.

Граничные условия: 1) z = 0, V = 0; 2) z = l/2, V' = 0 (ввиду симметрии), откуда найдем  $D = 0, C = Rl^2/8$ . Тогда  $EJ_xV = -Rz^3/6 + Rl^2z/8$ , т.к. R = P/2, то  $EJ_xV = -\frac{P}{4}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{l^2}{4}z\right)$ , а  $V = \Delta_z^{cr} = -\frac{P}{4EJ_x}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{l^2}{4}z\right)$ ,

подставим z = l/2 получим  $\Delta_{ct}$ :

$$\Delta_{cr} = \frac{Pl^3}{48EJ_x}$$
; Найдем  $\frac{\Delta_z^{cr}}{\Delta_{cr}} = -4\frac{z^3}{l^3} + 3\frac{z}{l}$ :  $\beta = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{\Delta_z^{cr}}{\Delta_{cr}}\right)^2 dz = \frac{17}{35}$ .

Все полученные выше формулы приближенные. Чем большей жесткостью обладает ударяемый брус, тем менее точными будут результаты расчетов. Более точные результаты получаются при рассмотрении волновой теории удара.

#### <u>III. Колебания тел</u>

Колебания различных конструкций возникают обычно при действии на них знакопеременных нагрузок. Любая имеет упругая конструкция собственную частоту колебаний, определяемую ее жесткостью, массой, особенностями размерами, конструктивными И Т.Д. Определение собственных частот реальных конструкций – сложная задача. Для приближенных расчетов реальную конструкцию с нагрузкой (балку) заменяют системой грузов, установленных на невесомой балке (рис. 9.2б), т.е. масса балки сосредоточена в грузах. Число грузов определяет, сколько степеней свободы имеет система, заменяющая балку.



Наиболее простое решение можно получить, когда балка заменяется системой с одним грузом (рис. 9.2a).

Период свободных колебаний, т.е. время, за которое система совершает одно свободное колебание:

$$T = 2\pi \sqrt{P\delta/g}$$
 [cek]

Здесь: P – вес груза,  $\delta$  – прогиб балки под грузом от силы F = 1,  $g = 9,81 \,\mathrm{m/cek^2}$ .

Более точно собственную частоту колебаний реальной балки можно установить экспериментально. На балку крепится *вибратор*, конструкция



которого показана на рис: в корпусе установлены два вала с зубчатыми шестернями (пунктир) и двумя грузами (заштрихованы). Один вал с помощью гибкого шланга вращается электромотором постоянного тока (можно плавно изменять

частоту вращения). Грузы при вращении создают знакопеременные инерционные центробежные силы в вертикальной плоскости, которые действуют на балку. Изменяя частоту вращения валов определяют частоту, при которой резко возрастает амплитуда колебаний балки с вибратором. Это и будет собственная частота колебаний балки, т.к. масса вибратора много меньше массы балки. Здесь учитываются все особенности реальной конструкции балки.

Этот способ основан на явлении *резонанса* при колебаниях. Резонанс возникает, когда частота внешних силовых импульсов приближается к частоте собственных колебаний конструкции. Явление резонанса играет большую роль в технике. При резонансе резко возрастает амплитуда колебаний конструкции (т.е. деформации и напряжения в ней), что часто приводит к разрушению конструкций. Примерами резонансных колебаний являются: автоколебания подвесных мостов, флаттер частей самолетов (крыльев, хвостового оперения), колебания высотных зданий и сооружений (в них ставят специальные гасители колебаний) и др. В уставе армии есть пункт – в начале движения солдат по любому мосту должна следовать

команда «сбить шаг». В истории известен случай, когда частота шагов солдат на мосту оказалась близка к собственной частоте колебаний моста, он вошел в резонанс и разрушился.

Внешние знакопеременные нагрузки могут передаваться на конструкции от различных механизмов, станков и т.д., установленных на них. Конструкции, на которых они установлены, должны иметь собственные частоты колебаний далекие от частот внешних воздействий. Резонанс в большинстве конструкций нельзя допускать, это может привести к их разрушению.

Многочисленные опыты показали, что при действии переменных колебаниях конструкций, разрушение напряжений. возникающих при происходит напряжениях меньших, опасные при значительно чем напряжения при однократном статическом нагружении. Причиной разрушения материала при колебаниях является постепенное развитие микротрещин, которые всегда есть в материале. Это явление называется материала. Способность усталостью материала воспринимать многократное действие переменных напряжений называют выносливостью, а проверку прочности элементов конструкций при действии таких напряжений – расчетом на выносливость (или расчетом на усталостную прочность).

Для расчетов на выносливость используют кривые усталости или *кривые Вёлера*, которые экспериментально получаются для каждого материала. На рис. показана примерная кривая Вёлера.





По вертикальной оси откладываются максимальные напряжения, возникающие при колебании конструкции, а по горизонтальной оси N – число циклов нагружения до разрушения материала. Видно, что чем меньше  $\sigma_{max}$ , тем больше циклов выдержит материал. Для

стали кривая стремится к асимптоте при  $\sigma_{\text{max}} = \sigma_R$ , которую называют *пределом выносливости*. Это напряжение, при котором не происходит усталостного разрушения данного материала после произвольно большого числа циклов (обычно берут  $N = 10^7$  циклов).

С помощью кривых Вёлера определяют срок службы элементов конструкций при действии переменных напряжений, возникающих при колебаниях.

На величину предела выносливости влияют многие факторы:

Концентрация напряжений. Она возникает в точках тела вблизи мест приложения сосредоточенных сил, около выточек, у краев отверстий, в местах резкого изменения формы тела, у надрезов и т.д. Концентрация значительно снижает предел выносливости. *Качество поверхности детали*. Снижение предела выносливости тем больше, чем грубее поверхностная обработка детали, причем это снижение более значительно для материалов с высокими пределами прочности.

Абсолютные размеры детали. С увеличением размеров предел выносливости уменьшается. Объясняют это тем, что в больших деталях с объемом больше дефектных большим материала мест (раковины, микротрещины, неметаллические включения, следы обработки OT поверхности).

*Внешняя среда*. Коррозионная среда (вода, соленая вода, кислоты, пары и т.д.) резко снижают усталостную прочность. Желательно использовать защитные покрытия поверхностей (окраска, цинкование, азотирование и т.д.)

# РАЗДЕЛ 10 БАЛКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ



Рис.10.1

В инженерной практике встречаются балки, лежащие на сплошном упругом основании. Это ленточные фундаменты зданий, фундаменты плотин, ж/д шпалы и др. Расчет таких балок осложняется тем, что реакция оснований «*r*»

зависит от прогибов «*V*» балки, а прогибы зависят от реакции основания. Для решения задачи необходимо знать закон, связывающий реакцию основания с осадкой (прогибом) основания. Наиболее распространенной является гипотеза Винклера

$$r = -kV \tag{1}$$

Обозначим

$$q = r + p = -kV + p \tag{2}$$

Здесь: *p* – внешняя погонная нагрузка; *k* – коэффициент постели, приводится в справочниках для различных грунтов; *q* – суммарная погонная нагрузка, действующая на балку.

Для решения задачи используем известное дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса

$$EJ_x V'' = -M_x \tag{3}$$

Обычно *EJ<sub>x</sub>* – изгибная жесткость балки, считается константой. Ранее получены дифференциальные зависимости (1.7)

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{dQ_y}{dz} = -q \tag{4}$$

Дифференцируя один раз (3) с учетом (4) получим

$$EJ_x V''' = -Q_y \tag{5}$$

Дифференцируя (5) с учетом (4) найдем

 $EJ_x V^{\rm IV} = q \tag{6}$ 

Подставим (2) в (6)

$$EJ_x V^{\rm IV} = -kV + p \tag{7}$$

Обозначим  $4\alpha^4 = k / EJ_x$ 

Тогда уравнение (7) примет вид

$$V^{\rm IV} + 4\alpha^4 V = p / EJ_x \tag{10.1}$$

Это дифференциальное уравнение балки на упругом основании.



Общий интеграл этого уравнения приводится в справочниках

 $V = Ae^{\alpha z} \sin \alpha z + Be^{\alpha z} \cos \alpha z + Ce^{-\alpha z} \sin \alpha z + De^{-\alpha z} \cos \alpha z$  (10.2) Здесь: *A*, *B*, *C*, *D* – неизвестные const, которые определяются из граничных условий задачи:

1. При  $z = \infty$  V = 0. Подставим это в (10.2)

$$0 = A\infty \sin \infty + B\infty \cos \infty + C/\infty + D/\infty$$

Это может быть, когда A = B = 0. Уравнение (10.2) с учетом этого упростится  $V = Ce^{-\alpha z} \sin \alpha z + De^{-\alpha z} \cos \alpha z$  (10.3)

2. Ввиду симметрии прогибов: при z = 0 V' = 0. Дифференцируем (10.3), получим

 $V' = C(-\alpha e^{-\alpha z} \sin \alpha z + \alpha e^{-\alpha z} \cos \alpha z) + D(-\alpha e^{-\alpha z} \cos \alpha z - \alpha e^{-\alpha z} \sin \alpha z)$ Подставляем *z* = 0 и *V*' = 0 найдем

$$0 = C(0+\alpha) + D(-\alpha - 0) = C\alpha - D\alpha = \alpha(C - D) = 0$$

Отсюда следует, что C = D и уравнение (10.3) еще упростится

$$V = Ce^{-\alpha z} (\sin \alpha z + \cos \alpha z) \tag{10}$$

3. Правило проверки эпюр  $Q_y$  гласит: при движении вдоль эпюры  $Q_y$  справа – налево скачки на эпюре должны равняться по величине и по направлению локальным силам, приложенным в этих сечениях балки. В нашем случае Эп.  $Q_y$  в окрестности силы F с учетом симметрии задачи должна иметь вид (рис. 10.3):



138

$$V''' = 4C\alpha^3 e^{-\alpha z} \cos \alpha z \tag{13}$$

Подставим (13) в (11) найдем

$$EJ_x 4C\alpha^3 = F/2$$
,

откуда

$$C = F / 8\alpha^3 E J_x \tag{14}$$

Подставим (14) в (10), получим прогибы балки

$$V = \frac{F}{8\alpha^3 E J_x} e^{-\alpha z} (\sin \alpha z + \cos \alpha z)$$
(10.4)

Подставим V" по (12) и С по (14) в (3), получим формулу для изгибающих моментов в балке

$$M_x = \frac{F}{4\alpha} e^{-\alpha z} (\cos \alpha z - \sin \alpha z)$$
(10.5)

Подставим V''' из (13) и C по (14) в (5), получим формулу для поперечных сил в балке

$$Q_y = -\frac{F}{2}e^{-\alpha z}\cos\alpha z \tag{10.6}$$

По формулам (10.4)-(10.6) можно построить эпюры, примерный вид которых показан ниже.



Эпюры V и  $M_x$  симметричны относительно т.O, а эпюра  $Q_y$  – обратносимметрична. Эпюры представляют собой затухающие функции с увеличением z.

Обозначим  $l_0 = \pi / \alpha - длина$  полуволны. Расчеты показали, что при  $z = 2l_0$  $V \approx 0,2\%$  от прогиба под силой  $F(V_{\text{max}})$ , при  $z = l_0$   $V \approx 4\%$  от  $V_{\text{max}}$ . Поэтому, полученными формулами можно пользоваться и для балок конечной длины, если их длина  $l \ge 4l_0$  и даже при  $l \ge 2l_0$ . Для более коротких балок ошибки будут значительны.

# $\frac{II. Полубесконечная балка на упругом основании}{Балка загружена п} = = X M_0. Здесь <math>p = 0$ и

Рис.10.5

Балка загружена при z = 0  $Q_0$  и  $M_0$ . Здесь p = 0 и для решения задачи можно использовать уравнение (9), общее решение которого дано (10.2). Граничное условие: при  $z = \infty$  V = 0 дает A = B = 0, что приводит к уравнению (10.3)

$$V = Ce^{-\alpha z} \sin \alpha z + De^{-\alpha z} \cos \alpha z \tag{15}$$

Для определения const *C* и *D* есть два граничных условия

1. при 
$$z = 0$$
  $M_x = M_0$ ; с учетом (3)  $EJ_xV'' = -M_0$  (16)

2. при 
$$z = 0$$
  $Q_y = Q_0$ ; с учетом (5)  $EJ_x V''' = -Q_0$  (17)

Последовательным дифференцированием (15) найдем

$$V' = \alpha (C - D)e^{-\alpha z} \cos \alpha z - \alpha (C + D)e^{-\alpha z} \sin \alpha z$$
(18)

$$V'' = 2\alpha^2 e^{-\alpha z} \left( D \sin \alpha z - C \cos \alpha z \right) \tag{19}$$

$$V''' = 2\alpha^3 e^{-\alpha z} \left( (D+C)\cos\alpha z - (D-C)\sin\alpha z \right)$$
(20)

Подставим V'' из (19) при z = 0 в (16) получим

$$C = M_0 / 2\alpha^2 E J_x \tag{21}$$

Подставим V''' по (20) при z = 0 в (17) найдем

$$D = -(Q_0 + \alpha M_0) / 2\alpha^3 E J_x \tag{22}$$

Подставляя в (3) V" из (19) и найденные значения С и D из (21)-(22), после преобразований получим

$$M_x = \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} (Q_0 \sin \alpha z + \alpha M_0 (\cos \alpha z + \sin \alpha z))$$
(10.7)

Подстановка V<sup>""</sup> по (20), С и D в (5) дает

$$Q_y = -e^{-\alpha z} \left( Q_0 (\sin \alpha z - \cos \alpha z) + 2M_0 \alpha \sin \alpha z \right)$$
(10.8)

В формулы (10.7) и (10.8)  $Q_0$  и  $M_0$  подставлять со своими знаками, положительные их направления на левом торце балки показаны на рис. 10.5.

## <u>III. Расчет короткой балки методом</u> последовательных приближений



Рассмотрим короткую балку a-b, загруженную силой F, под которой поместим начало координат (рис.10.6). Представим ее бесконечно длинной в оба конца и по формулам (10.5) и (10.6) построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  на участке a-b. Пусть в сечениях «*a*» и «*b*» эти внутренние силовые факторы (ВСФ)

оказались положительными, их направления  $M_x^a$ ,  $Q_y^a$ ,  $M_x^b$  и  $Q_y^b$  показаны на рис.10.6. Сечения «*a*» и «*b*» концы балки, поэтому ВСФ в них должны быть равны нулю. Этого можно добиться, приложив в этих сечениях внешние

 $Q_0^a$ ,  $M_0^a$ ,  $Q_0^b$  и  $M_0^b$ , равные и противоположно направленные ВСФ (рис.10.6). Балку на рис.2) надо рассчитать дважды: 1) от  $Q_0^a$  и  $M_0^a$  при оси z вправо; 2) от  $Q_y^b$  и  $M_x^b$  при оси z влево по формулам (10.7) и (10.8) полубесконечной балки и построить по ним эпюры. Итоговые значения  $Q_y$  и  $M_x$  получим, суммируя эпюры от вышеуказанных трех расчетов. При очень короткой балке на итоговых эпюрах  $Q_y$  и  $M_x$  в сечениях «а» и «b» балки ВСФ могут оказаться значительными (а должны быть равны нулю). Поэтому еще раз надо повторить два расчета балки по схеме рис.2, приложив на торцах балки внешние  $Q_0$  и  $M_0$ , равные и противоположно направленные ВСФ итоговых эпюрь. Отличие  $Q_y$  и  $M_x$  от нулевых значений на торцах балки уменьшится. На практике обычно бывает достаточно одного или двух приближений для получения приемлемых результатов.



Бесконечная длинная балка на упругом основании показана на рис.10.7 как горизонтальная штрих-пунктирная линия. Пусть на нее в т.*O* действует сила F = 1. По (10.5) для балки

можно построить эпюру  $M_x$ , которая на рис.10.7 показана сплошной линией. Величина  $M_{KO}$  определяет  $M_x$  в произвольной т.K (с координатой  $z_K$ ) от силы F = 1 приложенной в т.O. Если силу F = 1 приложить в т.K, то эпюру  $M_x$  можно изобразить пунктирной линией. Величина  $M_{OK}$  определяет  $M_x$  в т.O от силы F = 1, приложенной в т.K. Ввиду симметрии эпюры  $M_x$  очевидно, что  $M_{OK} = M_{KO}$ . Этот вывод справедлив для любого положения силы F = 1, т.е. сплошная линия изображает закон изменения  $M_x$ в т.O от движения силы F = 1 вдоль балки. Сплошную линию на рис.10.7 называют **линией влияния**.

Пусть на балку действует произвольная нагрузка (рис.10.8). В произвольном сечении (т.*O*) найти  $M_x$  от этой нагрузки.

В интересующем нас сечении (т.*O*) расположим начало координат и строим эпюру  $M_x$  от действия в этой точке силы F = 1. Получим линию влияния. Под силами  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_m$  определяем с учетом знаков  $M_{10}$ ,  $M_{20}$  и

 $M_{m0}$ . В сечении т.О изгибающий момент  $M_x$  найдем алгебраическим суммированием



(23)Если участок балки нагружен внешней погонной нагрузкой p = const (рис.10.8), то разбивая ее на малые силы *pdz* и определяя от них на линии влияния  $M_{p0}$ , по аналогии с (23) найдем  $M - \sum n dz M$ 

$$M_{x} - \sum p a 2M_{p0} -$$

$$= \int_{z_{1}}^{z_{2}} p M_{p0} dz =$$

$$= p \int_{z_{1}}^{z_{2}} M_{p0} dz = p \omega$$
(24)

Здесь *ю*заштрихованная площадь линии влияния под нагрузкой р (определяется с учетом знаков). В справочниках приводятся таблицы для вычисления  $\omega$ . Можно использовать численные методы при помощи ЭВМ.

Аналогично можно построить линию влияния прогибов V и по ней определять прогибы в любом сечении балки.

относительно Эпюра обратносимметрична F = 1. поэтому  $Q_v$  $Q_{KO} = -Q_{OK}$ , и линия влияния  $Q_y$  отличается знаком от самой эпюры  $Q_y$ . Для коротких балок можно уточнить решение, используя вышеизложенный метод последовательных приближений.

# РАЗДЕЛ 11 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА (МДТТ)

#### <u>I. Зависимости между перемещениями</u> и деформациями (уравнения Коши)



Рис.11.1

Перемещение точки тела в пространстве определяется тремя компонентами вдоль координатных осей: u (вдоль оси x), v (вдоль оси y), w (вдоль z). Эти перемещения являются функциями координат точки, т.е.

$$u = u(x, y, z), v = v(x, y, z),$$
  
 $w = w(x, y, z)$ 

Вырежем из тела до его нагружения бесконечно малый прямоугольный элемент с размерами ребер dx, dy, dz. После нагружения тела он деформируется, т.е. изменяться длины его ребер и прямые углы между гранями.

На рис.11.1 показаны до деформации тела два ребра этого элемента, длины которых AB = dx, AC = dy. После деформации т. A переместится в т.  $A_1$ , т.е. получит перемещения u и v. Точка  $B_1$  получит перемещения:  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$  (вдоль оси x) и  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$  (вдоль оси y). Точка  $C_1$  переместится на  $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$  (вдоль оси x) и  $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$  (вдоль оси y). Из рис. 11.1 отрезок  $A_1B_2 = dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \approx A_1B_1$  ввиду малости угла  $\alpha_1$ (леформации тела считаются малыми). Относительная леформация ребра AB

(деформации тела считаются малыми). Относительная деформация ребра *АВ* вдоль оси *х* равна

$$\varepsilon_x = (A_1 B_1 - AB) / AB = \left( \left( dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - dx \right) / dx = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \varepsilon_x$$
(1)

Аналогично для ребра AC = dy, относительная деформация вдоль оси y

будет 
$$\varepsilon_y$$
, с учетом  $A_1C_1 \approx A_1C_2 = dy + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) - v = dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy$   
 $\varepsilon_y = (A_1C_1 - AC) / AC = \left(\left(dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) - dy\right) / dy = \frac{\partial v}{\partial y} \approx \varepsilon_y$ 
(2)

Аналогично получим  $\varepsilon_z$  – линейную деформацию вдоль оси *z* третьего ребра элемента (не показанного на рис.11.1)

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3}$$

Ввиду малости угла  $\alpha_1$  можно записать (из рис.11.1)

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = B_1 B_2 / A_1 B_2 = \frac{\partial v}{\partial x} dx / \left( dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial v}{\partial x} / \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} / (1 + \varepsilon_x)$$
(4)

Деформации тела малы, поэтому  $\varepsilon_x$  много меньше 1 и  $\varepsilon_x$  можно не учитывать. Тогда (4) упростится

$$\alpha_1 \approx \frac{\partial v}{\partial x} \tag{5}$$

Аналогично найдем

$$\alpha_2 \approx \frac{\partial u}{\partial y} \tag{6}$$

Известно, что изменение прямого угла *САВ* в плоскости *XOY* называется сдвигом в плоскости *XOY* и обозначается  $\gamma_{xy}$ . Следовательно  $\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$ . С учетом (5) и (6) получим

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{7}$$

Аналогично можно получить  $\gamma_{xz}$  – сдвиг в плоскости *XOZ*,  $\gamma_{yz}$  – сдвиг в плоскости *YOZ*.

Итак, деформацию в любой точке тела определяют шесть величин, которые с учетом (1), (2), (3) и (7) можно записать так

1) 
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
, 4)  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$   
2)  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ , 5)  $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$   
3)  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ , 6)  $\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ 

Это и есть уравнения Коши.

#### II. Условия совместности (неразрывности) деформаций

Представим себе тело, разрезанным на малые параллелепипеды. Если каждый из этих параллелепипедов получит произвольные деформации, то из деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить сплошное тело: во многих точках возникнут щели, пустоты. Следовательно, при деформации тела  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  должны быть связаны определенными зависимостями. Получим их.

Из (11.1) первое дифференцируем дважды по *y*, второе – дважды по *x* и сложим их
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$
(a)

Выражение в скобках по 4) из (11.1) равно  $\gamma_{xv}$ . Тогда

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$
(B)

Аналогично можно составить еще два соотношения

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \tag{(r)}$$

Эти соотношения легко записать, используя кольцевую перестановку индексов x, y, z.

Для однозначности, шесть деформаций должны быть связаны шестью зависимостями.

Продифференцируем три последних уравнения (11.1) так:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$
$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Сложим два первых соотношения и вычтем третье:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

Продифференцируем это уравнение еще раз по y и, учитывая, что по 2) из (11.1)  $\varepsilon_{y} = \partial v / \partial y$  получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \qquad (A)$$

Аналогично можно получить еще два уравнения, используя кольцевую перестановку индексов. Итак, окончательно получим шесть уравнений (в), (г) и (д), которые и называют условиями совместности (неразрывности) деформаций или уравнениями Сен-Венана.

$$\frac{\partial^{2} \varepsilon_{x}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} \varepsilon_{y}}{\partial x^{2}} = \frac{\partial^{2} \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};$$
  

$$\frac{\partial^{2} \varepsilon_{y}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial^{2} \varepsilon_{z}}{\partial y^{2}} = \frac{\partial^{2} \gamma_{yz}}{\partial y \partial z};$$
  

$$\frac{\partial^{2} \varepsilon_{z}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \varepsilon_{x}}{\partial z^{2}} = \frac{\partial^{2} \gamma_{zx}}{\partial z \partial x};$$
  
(11.2)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z};$$
  
$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x};$$
  
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y}.$$



Вырежем из нагруженного тела малый прямоугольный элемент с ребрами dx, dy, dz, параллельными осям x, y, z. Со стороны отброшенных частей на элемент действуют напряжения, определяемые тензором напряжений  $T_{\sigma}$ , который в разделе 1 обозначен как формула (1.2). На невидимых гранях (рис.11.2) действуют  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , ...,  $\tau_{xz}$ . На рис.11.2 эти напряжения условно вынесены за пределы элемента (чтобы упростить

рисунок). В разделе 1 приняты следующие обозначения и правила:  $\sigma_x$  – нормальное напряжение вдоль оси x,  $\tau_{xz}$  – касательное напряжение вдоль оси x, действующее на площадке, перпендикулярной оси z. Аналогично определяются и другие напряжения. Площадки положительны, если внешние нормали к ним направлены вдоль осей. На положительных площадках положительные напряжения направлены вдоль осей x, y, z, на отрицательных – против осей.

Невидимые площадки – отрицательные, поэтому положительные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, ..., \tau_{xz}$  направлены против осей (рис.11.2).

Видимые площадки – положительные и все напряжения на них направлены вдоль осей и имеют добавки по соответствующей координате. Например, на невидимой грани, перпендикулярной оси x, действуют  $\sigma_x$  (против оси x), а на видимой грани, отстоящей от невидимой на малом расстоянии dx, действуют  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$  (вдоль оси x). Аналогично и на других парах граней.

Кроме напряжений на элемент тела действуют объемные силы, их проекции на координатные оси обозначим: X, Y, Z. Эти силы отнесены к единице объема. Объем элемента dV = dxdydz. Тогда силы, действующие в объеме всего элемента, будут равны:

$$Xdxdydz, Ydxdydz, Zdxdydz$$
 (1)

Элемент вырезан из нагруженного тела, находящегося в равновесии. Поэтому и малый элемент, под действием всех напряжений, указанных на рис. 11.2 и объемных сил (1), должен быть в равновесии. Следовательно, должны удовлетворятся шесть уравнений статики. Рассмотрим уравнение проекций сил на ось x. Каждое напряжение надо умножать на площадь грани, где оно действует, т.е. рассматривать силы на гранях.

$$\Sigma x = 0. \quad \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dz dy - \sigma_x dz dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + X dx dy dz = 0$$

После раскрытия скобок, приведения подобных членов и деления на объем dV = dxdydz получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$
(2)

Аналогично, составив  $\Sigma y = 0$  и  $\Sigma z = 0$ , можно получить еще два уравнения статики. Проще их записать сразу, используя указанную выше кольцевую перестановку *x*, *y*, *z*.

В итоге получим три уравнения равновесия малого прямоугольного элемента, вырезанного *внутри тела*.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$
(11.3)
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Можно составить еще три уравнения равновесия моментов относительно осей x, y, z по выше указанному правилу и убедиться, что они дадут уже известный нам закон парности касательных напряжений (1.3), полученный в разделе 1

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \ \tau_{xy} = \tau_{yx}, \ \tau_{xz} = \tau_{zx}$$



Вырежем из нагруженного тела бесконечно малый тетраэдр *oabc* с тремя плоскостями, совпадающими с координатными (см. рис. 11.3). Положение в пространстве наклонной площадки *abc* определяется нормалью *v*, направляющие конусы которой обозначим так:

 $l = \cos(x, v), m = \cos(y, v),$ 

$$n = \cos(z, v)$$

Площадку abc обозначим dA. Невидимые треугольные площадки, перпендикулярные осям x, y и z, обозначим и определим так:

$$dA_r = dA_{obc} = dA \cdot l, \ dA_v = dA_{oac} = dA \cdot m, \ dA_z = dA_{oab} = dA \cdot n$$
 (a)

На этих невидимых, отрицательных площадках, действуют положительные напряжения, определяемые  $T_{\sigma}$  (см. п.III). На наклонной площадке *abc* действуют компоненты полного напряжения  $X_{\nu}$ ,  $Y_{\nu}$  и  $Z_{\nu}$ . Под действием всех напряжений, показанных на рис.11.3, тетраэдр находится в равновесии. Умножая напряжения на площадки, составим уравнение статики

$$\Sigma x = 0. \quad X_V \cdot dA - \sigma_X dA_X - \tau_{XV} dA_V - \tau_{XZ} dA_Z = 0 \tag{B}$$

Объемные силы X, Y и Z здесь не учитываются, т.к. они пропорциональны объему, который имеет третий порядок малости, а все слагаемые в (в) – второй порядок малости. Подставляя (а) в (в) и сокращая на dA получим

$$X_{\nu} = \sigma_{x}l + \tau_{x\nu}m + \tau_{xz}n \tag{(\Gamma)}$$

Составляя уравнения статики  $\Sigma y = 0$  и  $\Sigma z = 0$ , получим еще два уравнения, которые легко записать, используя кольцевую перестановку *x*, *y*, *z* и *l*, *m*, *n*, получим три уравнения равновесия тетраэдра

$$X_{v} = \sigma_{x}l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n$$

$$Y_{v} = \tau_{yx}l + \sigma_{y}m + \tau_{yz}n$$

$$Z_{v} = \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + \sigma_{z}n$$
(11.4)

Если площадка *abc* совпадает с поверхностью тела, то  $X_v$ ,  $Y_v$  и  $Z_v$  соответствуют компонентам внешней нагрузки. В этом случае уравнения (11.4) называют <u>условиями на поверхности тела.</u> Они связывают внешние напряжения с внутренними в теле.

Удовлетворение условиям (11.3) и (11.4) является необходимым и достаточным условием равновесия в любой точке тела (внутри и на поверхности).

# РАЗДЕЛ 12 АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

## <u>I. Объемное напряженное состояние</u> <u>1. Полное, нормальное и касательное напряжения на наклонной</u>

#### площадке

На рис. 11.3 показаны компоненты полного напряжения  $\rho_{v}$  на наклонной площадке *abc*. Очевидно, что его численное значение определяется так

$$\rho_{\nu}^2 = X_{\nu}^2 + Y_{\nu}^2 + Z_{\nu}^2$$

Подставляя сюда формулы (11.4) найдем

 $\rho_v^2 = (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n)^2 + (\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n)^2 + (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n)^2$  (12.1) Здесь  $l = \cos(x, v), m = \cos(y, v)$  и  $n = \cos(z, v)$  – направляющие конусы нормали v к площадке *abc*. Полное напряжение  $\rho_v$  можно разложить на  $\sigma_v$  – нормальное и  $\tau_v$  – касательное напряжения на наклонной площадке. Очевидно, что  $\rho_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2$ . Напряжение  $\sigma_v$  можно найти, проектируя  $X_v, Y_v$  и  $Z_v$  на нормаль v, т.е.  $\sigma_v = X_v l + Y_v m + Z_v n$ . С учетом формул (11.4) получим

 $\sigma_{v} = (\sigma_{x}l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n)l + (\tau_{yx}l + \sigma_{y}m + \tau_{yz}n)m + (\tau_{zx}l + \tau_{zy}m + \sigma_{z}n)n$  (12.2) Касательное напряжение  $\tau_{v}$  можно найти так

$$\tau_{\nu}^2 = \rho_{\nu}^2 - \sigma_{\nu}^2 \tag{12.3}$$

### 2. Главные напряжения, главные площадки

На наклонной площадке, у которой орт нормали  $\nu$  совпадает с направлением  $\rho_{\nu}$ , величина  $\tau_{\nu} = 0$ , а  $\sigma_{\nu}$  будет экстремально и равно  $\rho_{\nu}$ . Такая площадка называется *главной* (ее направление определяют направляющие косинусы, которые обозначим  $l_0$ ,  $m_0$ ,  $n_0$ ). А напряжения на ней обозначим  $\sigma_0 = \rho_{\nu}$ . Все его проекции на оси x, y, z будут  $X_{\nu} = \sigma_0 l_0$ ,  $Y_{\nu} = \sigma_0 m_0$ ,  $Z_{\nu} = \sigma_0 n_0$ . Подставим их в формулы (11.4)

$$\sigma_0 l_0 = \sigma_x l_0 + \tau_{xy} m_0 + \tau_{xz} n_0 \qquad (\sigma_x - \sigma_0) l_0 + \tau_{xy} m_0 + \tau_{xz} n_0 = 0$$

$$\sigma_0 m_0 = \tau_{yx} l_0 + \sigma_y m_0 + \tau_{yz} n_0 \qquad \text{или} \qquad \tau_{yx} l_0 + (\sigma_y - \sigma_0) m_0 + \tau_{yz} n_0 = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_0 n_0 = \tau_{zx} l_0 + \tau_{zy} m_0 + \sigma_z n_0 \qquad \tau_{zx} l_0 + \tau_{zy} m_0 + (\sigma_z - \sigma_0) n_0 = 0$$

Надо найти  $\sigma_0$  и  $l_0$ ,  $m_0$ ,  $n_0$  при известных напряжениях в точке тела  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ .

Очевидно, что  $l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1$ .

Из этого следует, что  $l_0$ ,  $m_0$ ,  $n_0$  одновременно не могут быть равны нулю. Тогда система уравнений (1) имеет решение, если ее определитель  $\Delta = 0$ , т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\sigma_{x} - \sigma_{0}), & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & (\sigma_{y} - \sigma_{0}), & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & (\sigma_{z} - \sigma_{0}) \end{vmatrix} = 0$$
(3)

Раскрывая этот определитель получим, с учетом закона парности касательных напряжений:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \ \tau_{xy} = \tau_{yx}, \ \tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{4}$$

$$\Delta = (\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0)(\sigma_z - \sigma_0) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_y - \sigma_0)\tau_{xz}^2 - (\sigma$$

$$-(\sigma_x - \sigma_0)\tau_{yz}^2 - (\sigma_{zx} - \sigma_0)\tau_{xy}^2 = 0$$

После перемножений и приведения подобных членов найдем

$$\sigma_0^3 - J_1 \sigma_0^2 + J_2 \sigma_0 - J_3 = 0 \tag{12.4}$$

Где: 
$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
,  $J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$ ,  
 $J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$  (12.5)

Величины  $J_1, J_2$  и  $J_3$  называются инвариантами тензора напряжений  $T_{\sigma}$  (легко убедится, что  $J_3$  есть определитель  $T_{\sigma}$ ). При повороте осей x, y, z компоненты  $T_{\sigma}$  меняются, но  $J_1, J_2$  и  $J_3$  при этом не должны меняться, т.к.  $\sigma_0$ , определяемые из (12.4), не зависят от выбора положения осей x, y, z, а зависят от нагружения тела.

Решение кубического уравнения (12.4) дает три корня для  $\sigma_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , которые и называются *главными напряжениями*. Итак, имеем три главных напряжения, которые действуют на трех главных площадках, определяемых  $l_i$ ,  $m_i$ ,  $n_i$  (i = 1, 2, 3). Например, найдем  $l_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$  главной площадки, где действует  $\sigma_1$ . Для этого составим три уравнения:  $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$  и любых два уравнения из системы (1), подставляя в них  $\sigma_0 = \sigma_1$ ,  $l_0 = l_1$ ,  $m_0 = m_1$ ,  $n_0 = n_1$ . Решая эти три уравнения, найдем  $l_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$ . Аналогично определяются две другие площадки, где действуют  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Можно показать, что главные площадки взаимно ортогональны.

Инварианты напряженного состояния через главные напряжения определяются с учетом (12.5) так:

 $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \quad J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$ Здесь учтено, что на главных площадках нет касательных напряжений.

## 3. Экстремальные касательные напряжения

Вырежем из тела малый тетраэдр, у которого координатные оси совпадают с направлениями главных напряжений, т.е. на невидимых площадках действуют только  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  (см. рис. 11.3). Найдем касательное напряжение  $\tau_v$  на наклонной площадке с ортом v.

Полное напряжение на ней  $\rho_v$  и нормальное  $\sigma_v$  получим из зависимостей (12.1) и (12.2), полагая в них:  $\sigma_x = \sigma_1$ ,  $\sigma_y = \sigma_2$ ,  $\sigma_z = \sigma_3$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , т.к. на главных площадках касательных напряжений нет

$$\rho_{\nu}^{2} = \sigma_{1}^{2}l^{2} + \sigma_{2}^{2}m^{2} + \sigma_{3}^{2}n^{2}$$

$$\sigma_{\nu} = \sigma_{1}l^{2} + \sigma_{2}m^{2} + \sigma_{3}n^{2}$$
(6)

Касательные напряжения на наклонной площадке найдем по (12.3), подстановкой (6)

$$\tau_{\nu}^{2} = \rho_{\nu}^{2} - \sigma_{\nu}^{2} = \sigma_{1}^{2}l^{2} + \sigma_{2}^{2}m^{2} + \sigma_{3}^{2}n^{2} - (\sigma_{1}l^{2} + \sigma_{2}m^{2} + \sigma_{3}n^{2})^{2}$$

После преобразований, получим

$$\tau_{V}^{2} = \sigma_{1}^{2} l^{2} (1 - l^{2}) + \sigma_{2}^{2} m^{2} (1 - m^{2}) + \sigma_{3}^{2} n^{2} (1 - n^{2}) - 2\sigma_{1} \sigma_{2} l^{2} m^{2} - 2\sigma_{1} \sigma_{3} l^{2} n^{2} - 2\sigma_{2} \sigma_{3} m^{2} n^{2}.$$
(7)

Условие экстремальности  $\tau_v$  по параметрам  $l^2$ ,  $m^2$  и  $n^2$  дает три решения, которые определяют три площадки с экстремальными  $\tau_v$ :

1) 
$$l_1^2 = 0$$
,  $m_1^2 = 1/2$ ,  $n_1^2 = 1/2$   
2)  $l_2^2 = 1/2$ ,  $m_2^2 = 0$ ,  $n_2^2 = 1/2$   
3)  $l_3^2 = 1/2$ ,  $m_3^2 = 1/2$ ,  $n_3^2 = 0$   
Третьему решению соответствуют рис.а, т.е.  
это площадка под углами 45° к осям с  $\sigma_1$  и  
 $\sigma_2$  и проходящая через ось 3. Подставляя

 $l_3, m_3$  и  $n_3$  в выражение (7), получим



Рис.а

$$\tau_3^2 = \frac{1}{4}\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_2\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

Окончательно

$$\tau_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \tag{8}$$

Аналогично, на площадках с решениями 1) и 2), можно найти экстремальные  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

Итак, имеем три площадки, на которых действуют экстремальные касательные напряжения:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \ \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \ \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$
 (12.6)

#### 4. Октаэдрические нормальные и касательные напряжения

Площадки, равнонаклоненные к направлениям главных напряжений, называются октаэдрическими, направляющие косинусы их  $l_0 = m_0 = n_0 = 1/\sqrt{3}$ , т.к. должно быть  $l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1$ .

Нормальное напряжение  $\sigma_0$  и касательное  $\tau_0$  на этой площадке через главные напряжения найдем по формулам (6) и (7) подстановкой  $l_0 = m_0 = n_0 = 1/\sqrt{3}$ 

$$\sigma_{0} = (\sigma_{1} + \sigma_{2} + \sigma_{3})/3$$

$$\tau_{0}^{2} = \frac{2}{9} (\sigma_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2} + \sigma_{3}^{2} - \sigma_{1}\sigma_{2} - \sigma_{2}\sigma_{3} - \sigma_{3}\sigma_{1})$$
или
$$\tau_{0}^{2} = \frac{4}{9} \left( \left( \frac{\sigma_{1} - \sigma_{2}}{2} \right)^{2} + \left( \frac{\sigma_{2} - \sigma_{3}}{2} \right)^{2} + \left( \frac{\sigma_{1} - \sigma_{3}}{2} \right)^{2} \right) = \frac{4}{9} (\tau_{3}^{2} + \tau_{1}^{2} + \tau_{2}^{2})$$
(12.7)
$$\Lambda^{\sigma_{3}}$$
Величину  $\sigma_{0}$  называют часто

Величину  $\sigma_0$  называют часто гидростатическим давлением.

С т.О на рис. В обозначена октаэдрическая площадка с  $\sigma_0$  и  $\tau_0$ , заштрихованы главные площадки с  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и показаны три площадки с экстремальными касательными напряжениями  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$ .

Легко показать, что

$$\sigma_0 = J_1/3, \ \tau_0^2 = 2(J_1 - 3J_2)/9,$$

Рис.в

σι

ፒበ

T. 1

следовательно,  $\sigma_0$  и  $\tau_0$  тоже

являются инвариантами по отношению к преобразованию координатных осей.

площадках

<u>II. Плоское напряженное состояние</u> а) Полное, нормальное и касательное напряжения на наклонных



Плоское напряженное состояние  $(\Pi HC)$ является частным случаем объемного, отсутствуют когда все площадках, напряжения на перпендикулярных одной К ИЗ координатных осей. Пусть отсутствуют напряжения площадках, на перпендикулярных к оси z, т.е.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{9}$$

Получим ПНС в осях *XOY*, показанное на рис. 12.1.

На наклонной площадке *ab* действует полное напряжение  $\rho_{\nu}$ , которое можно разложить:

- 1. на составляющие по осям x и y, т.е. на  $X_{y}$  и  $Y_{y}$ ;
- 2. на нормальное  $\sigma_{\nu}$  и касательное  $\tau_{\nu}$  напряжения.

Очевидно:  $\rho_v^2 = X_v^2 + Y_v^2$ ,  $\rho_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2$  (10)

Как и в объемном напряженном состоянии, положение площадки *ab* определим так (см. рис. 12.1):

$$l = \cos(x, v) = \cos \alpha$$
  

$$m = \cos(y, v) = \cos(90^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha \qquad (11)$$
  

$$n = \cos(z, v) = \cos 90^{\circ} = 0$$

Напряжения  $X_{\nu}$  и  $Y_{\nu}$  здесь определяются из уравнений (11.4), подставляя в них (9) и  $Z_{\nu} = 0$ 

$$X_{v} = \sigma_{x}l + \tau_{xy}m$$

$$Y_{v} = \tau_{yx}l + \sigma_{y}m$$
(12.7)

Здесь  $l^2 + m^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .

Уравнения (12.7) легко получить из условий равновесия треугольного элемента, показанного на рис.12.1 Определим площадки элемента:

$$dA = dA_{ab}; \ dA_x = dA_{oa} = dA\cos\alpha = dA \cdot l, \ dA_y = dA_{ob} = dA\sin\alpha = dA \cdot m \quad (13)$$

Умножая напряжения на площадки, составим уравнения статики

$$\Sigma x = 0 \quad X_v dA - \sigma_x dA_x - \tau_{xy} dA_y = 0$$
  
$$\Sigma y = 0 \quad Y_v dA - \sigma_y dA_y - \tau_{yx} dA_x = 0$$

Подставляя (13) и сокращая на dA, получим формулы (12.7). Нормальное напряжение  $\sigma_{\nu}$  найдем, проектируя  $X_{\nu}$  и  $Y_{\nu}$  на нормаль  $\nu$  к площадке *ab* (см.рис. 12.1)

$$\sigma_{v} = X_{v} \cos \alpha + Y_{v} \sin \alpha = X_{v} l + Y_{v} m$$

Подставляем (12.7), получим:

$$\sigma_{v} = (\sigma_{x}l + \tau_{xy}m)l + (\tau_{xy}l + \sigma_{y}m)m =$$
$$= \sigma_{x}l^{2} + \sigma_{y}m^{2} + 2\tau_{xy}lm$$

Подставляя (11) и учитывая, что  $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ , найдем

$$\sigma_v = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \tag{12.8}$$

Касательное напряжение  $\tau_v$  определим, проектируя  $X_v$  и  $Y_v$  на направление  $\tau_v$  (см. рис. 12.1)

$$\tau_v = X_v \sin \alpha - Y_v \cos \alpha = X_v m - Y_v l =$$
  
=  $(\sigma_x l + \tau_{xy} m)m - (\tau_{xy} l + \sigma_y m)l =$   
=  $(\sigma_x - \sigma_y)lm - \tau_{xy}(l^2 - m^2)$ 

Подставим (11) и учитывая, что  $\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha/2$ ,  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ , окончательно получим

$$\tau_v = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \tag{12.9}$$

### в) Главные напряжения, главные площадки

Здесь, как и в объемном напряженном состоянии, имеются главные площадки с направляющими косинусами  $l_0$  и  $m_0$ , на которых нормальные напряжения экстремальны и они называются главными напряжениями  $\sigma_0$ , а касательные напряжения отсутствуют. Поэтому здесь  $X_v = \sigma_0 l_0$ ,  $Y_v = \sigma_0 m_0$ . Подставляя это в формулы (12.7) получим

$$(\sigma_x - \sigma_0) l_0 + \tau_{xy} m_0 = 0 \tau_{yx} l_0 + (\sigma_y - \sigma_0) m_0 = 0$$
 (14)

Известно, что  $l_0^2 + m_0^2 = 1$ , поэтому уравнения (14) имеют решение, если его определитель  $\Delta = 0$ 

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_0) & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_0) \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем этот определитель

$$\Delta = (\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0) - \tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_0 + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \quad (15)$$

Здесь  $J_1 = \sigma_x + \sigma_y$ ,  $J_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 -$ инварианты ПНС. Решение квадратного уравнения (15) дает два корня  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , которые и

называют *главными напряжениями* в ПНС:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 - (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)} =$$
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4\sigma_x \sigma_y + 4\tau_{xy}^2}{4}}$$

Окончательно получим для  $\sigma_1$  (знак (+)) и  $\sigma_2$  (знак (-)):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$
(12.10)

Положение главных площадок, где действуют  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в ПНС удобно определять углами  $\alpha_0$ , которые нормали к главным площадкам составляют с осью x. Их легко определить из условия отсутствия на главных площадках касательных напряжений. Подставляя  $\alpha = \alpha_0$  и  $\tau_v = 0$  в (12.9) получим

$$0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 - \tau_{xy} \cos 2\alpha_0$$
$$tg 2\alpha_0 = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y)$$
(12.11)

откуда

Из (12.11) получим два значения 
$$\alpha_0$$
, одно  $\alpha_0$ , другое  $\beta_0 = \alpha_0 + 90^\circ$ , которые определяют две взаимно ортогональные главные площадки.  $\alpha_0 > 0$  и  $\beta_0 > 0$  откладывать от оси *x* против хода часовой стрелки.

Чтобы не выяснять, на каких площадках действуют  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , надо подставить  $\alpha = \alpha_0$  и  $\alpha = \beta_0$  в формулу (12.8), большая величина  $\sigma_v = \sigma_1$ , а меньшая  $\sigma_v = \sigma_2$ . Эти величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  должно быть равны величинам, вычисленным по (12.10).



#### <u>с) Экстремальные касательные напряжения</u>

Вырежем из тела, испытывающего ПНС, прямоугольный элемент с главными площадками, на которых действуют  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Выделим наклонную площадку *ab*, нормаль  $\nu$  к которой с направлением  $\sigma_1$  составляет угол  $\alpha > 0$ . Напряжения  $\sigma_{\nu}$  и  $\tau_{\nu}$  на этой площадке найдем по зависимостям (12.8) и (12.9), полагая  $\sigma_x = \sigma_1$ ,  $\sigma_v = \sigma_2$ ,  $\tau_{xv} = 0$ .

$$\sigma_{\nu} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_{\nu} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$
(16)

Из второй формулы (16) видно, что при  $\alpha = 45^{\circ}$ 

$$\tau_{\nu} = \tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{12.12}$$

Подставляя сюда  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  из формулы (12.10), получим

$$\tau_m = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$
(12.13)

Итак, экстремальные касательные напряжения действуют на площадках под углом 45° к главным и определяются по формулам (12.12) или (12.13).

Нормальные напряжения  $\sigma_v = \sigma_m$  на этих площадках найдем по первой формуле (16), подставляя  $\alpha = 45^\circ (\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2)$ 

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$
(17)  
Здесь учтено, что  $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$ .

#### <u>d) Чистый сдвиг</u>

Рассмотрим частный случай ПНС, когда главные напряжения  $\sigma_1 = \sigma, \ \sigma_2 = -\sigma$ .

В этом случае экстремальные  $\tau_m$  найдем по (12.12), а нормальные напряжения  $\sigma_m$  на этих площадках по (17). Итак

$$\tau_m = \sigma, \ \sigma_m = 0$$

Такой случай носит название чистый сдвиг.



Вырежем из тела прямоугольный элемент, испытывающий чистый сдвиг, т.е. по его граням действуют только  $\tau_m$ . Найдем нормальное напряжение  $\sigma_v$  и касательное  $\tau_v$  на наклонной площадке *ab* под углом  $\alpha$  (рис. d). Используя формулы (12.8) и (12.9), подставляя в них:  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_m$ . Получим  $\sigma_v = \tau_m \sin 2\alpha$ ,  $\tau_v = -\tau_m \cos 2\alpha$  (12.14)

Рис. d

Из этих формул видно, что при  $\alpha = 45^{\circ}$   $\sigma_v = \sigma_{\max} = \tau_m$ ,  $\tau_v = 0$ , а это как известно, характеристики главной площадки.

Итак, при чистом сдвиге главные площадки расположены под углом 45° к площадкам чистого сдвига, а главные напряжения на них:

 $\sigma_1 = \tau_m, \ \sigma_2 = -\tau_m \ ($ при  $\alpha_0 = -45^{\circ})$ 

III. Анализ деформированного состояния



 $T_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{x} & \gamma_{xy} / 2 & \gamma_{xz} / 2 \\ \gamma_{yx} / 2 & \varepsilon_{y} & \gamma_{yz} / 2 \\ \gamma_{zx} / 2 & \gamma_{zy} / 2 & \varepsilon_{z} \end{vmatrix}$ 

Тензор деформации  $T_{\varepsilon}$  представим в симметричном виде (см. рис), когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_{xy}/2$  и т.д. Анализ деформированного состояния проведем по аналогии с

вышеприведенным анализом напряженного состояния. Три взаимно ортогональных направления, сдвиги между которыми при деформации тела равны нулю, называются *главными деформациями* и обозначаются  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ .

Главные деформации находятся из уравнения, аналогичного уравнению (12.4) для определения главных напряжений

$$\varepsilon^{3} - J_{1}\varepsilon^{2} + J_{2}\varepsilon - J_{3} = 0 \tag{12.15}$$

Здесь  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  – инварианты деформированного состояния:

$$J_{1} = \varepsilon_{x} + \varepsilon_{y} + \varepsilon_{z}, \quad J_{2} = \varepsilon_{x}\varepsilon_{y} + \varepsilon_{y}\varepsilon_{z} + \varepsilon_{z}\varepsilon_{x} - \gamma_{xy}^{2}/4 - \gamma_{yz}^{2}/4 - \gamma_{zx}^{2}/4,$$

$$J_{3} = \varepsilon_{x}\varepsilon_{y}\varepsilon_{z} + 2\frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \frac{\gamma_{yz}}{2} \cdot \frac{\gamma_{zx}}{2} - \varepsilon_{x}\frac{\gamma_{yz}^{2}}{4} - \varepsilon_{y}\frac{\gamma_{xz}^{2}}{4} - \varepsilon_{z}\frac{\gamma_{xy}^{2}}{4} - \varepsilon_{z}\frac{\gamma_{xy}^{2}}{4}$$
(12.16)

Решение кубического уравнения (12.15) дает три величины главных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

В случае плоской деформации, когда, например,  $\varepsilon_z = 0$  по аналогии с ПНС, формулы (12.10), получим  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ 

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$
(12.17)

Экстремальные сдвиги находятся по формулам, аналогичным (12.6) для определения экстремальных касательных напряжений

$$\frac{1}{2}\gamma_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}, \quad \frac{1}{2}\gamma_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}, \quad \frac{1}{2}\gamma_3 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$
или (12.18)

 $\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ 

Для *изотропных материалов* направления главных деформаций совпадает с направлениями главных напряжений.

Выясним физический смысл инварианта  $J_1(\varepsilon)$ : Рассмотрим кубик, у которого ребра совпадают с направлениями главных деформаций и до нагружения тела их длины равны 1. Его объем  $V_0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ . После деформации его объем станет  $V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$ . Относительное изменение объема обозначим  $\theta$ 

$$\theta = (V - V_0) / V_0 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1$$
  
$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

Деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  малы, поэтому величины второго и третьего порядка малости можно не учитывать, тогда

$$\theta \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{12.19}$$

Итак, первый инвариант деформированного состояния определяет относительное изменение объема тела.

Октоэдрический сдвиг, по аналогии с (12.7) – октаэдрических касательных напряжений, определяется так

$$\gamma_0^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2}\right)^2, \quad \gamma_0^2 = \frac{1}{9} \left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2\right) \quad (12.20)$$

Последняя формула получена с учетом (12.18)

# РАЗДЕЛ 13 ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Физическим уравнениями называются соотношения, устанавливающие зависимости между напряжениями и деформациями. Экспериментально легко получить зависимость  $\sigma = f(\varepsilon)$  в случае осевой нагрузки (см. диаграммы растяжения-сжатия, приведенные в разделе 3 – механические свойства материалов). Сложные эксперименты с трубчатыми образцами позволяют получить такие зависимости для плоского напряженного состояния. Для трехмерного тела в общем случае нагружения, физические уравнения можно получить на основе одномерных экспериментов, используя некоторые гипотезы, проверенные практикой.

### Обобщенный закон Гука

Рассмотрим трехмерное изотропное тело. Пусть в некоторой его точке возникают  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ , которым соответствуют деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ . Найдем связь между ними, используя следующие гипотезы, подтвержденные экспериментально:

1. Деформации малы, поэтому напряжения и деформации связаны линейно.

2. Сдвиги не влияют на линейные деформации и наоборот.

Найдем деформации в направлении оси x от  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ :

от  $\sigma_x$  получим  $\varepsilon_x^{(x)} = \sigma_x / E$  – продольная деформация по простому закону Гука;

от  $\sigma_y$  получим  $\varepsilon_x^{(y)} = -\mu \sigma_y / E$  – поперечная деформация по эффекту Пуассона;

от  $\sigma_z$  получим  $\varepsilon_x^{(z)} = -\mu \sigma_z / E -$  поперечная деформация.

При одновременном действии  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_z$  суммарная деформация

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(x)} + \varepsilon_x^{(y)} + \varepsilon_x^{(z)} = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)).$$

Аналогично можно найти  $\varepsilon_v$  и  $\varepsilon_z$ .

Согласно гипотезе 2 сдвиг  $\gamma_{xy}$  будет определяться напряжением  $\tau_{xy}$ , которые связаны законом Гука при сдвиге  $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$ . Здесь: E – продольный модуль упругости, G – модуль сдвига,  $\mu$  – коэффициент Пуассона материала.

Итак, в итоге получается шесть уравнений, которые и называются обобщенным законом Гука:

1. 
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z))$$
  
2.  $\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z))$   
3.  $\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y))$   
4.  $\gamma_{xz} = \tau_{yz} / G$ 
(13.1)

### Объемный закон Гука

Сложим первые три зависимости (13.1)

$$\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y} + \varepsilon_{z} = \frac{1}{E} (\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z} - 2\mu(\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z})) =$$

$$= \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z})$$
(1)

В разделе 12 формула (12.19) определяет  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta$ относительное изменение объема, а формула (12.7)  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \sigma_0$ гидростатическое давление, которое можно записать еще и так  $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ . С учетом этих обозначений (1) можно записать так

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} 3\sigma_0$$
 или  $\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_0$  (2)

Обозначим

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$
(13.2)

Тогда (2) запишется в виде, который и носит название *объемный закон* Гука.  $\theta = \sigma_0 / K$  (13.3)

Здесь К – объемный модуль упругости материала.

Из формулы (13.3) с учетом (13.2) следует, что  $\mu \le 0,5$ Допустим, что  $\mu > 0,5$ . Тогда из (13.2) следует, что K < 0 и при  $\sigma_0 > 0$ (всестороннее растяжение) из (13.3) получим  $\theta < 0$ , т.е. объем тела уменьшается. А это противоречит опыту. При  $\mu = 0,5$   $K = \infty$ ,  $\theta = 0$ , тело при нагружении не меняет объема, т.е. ведет себя как несжимаемая жидкость.

#### Энергия деформации

#### I. Полная энергия деформации.

Ранее были получены формулы для удельной потенциальной энергии при осевой нагрузке  $W = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon$ , при сдвиге  $W = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma$ . При трехмерном (объемном) нагружении, в теле возникают напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  и деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . В этом случае используют принцип сложения

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) + \frac{1}{2}(\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

Подставляя сюда деформации по обобщенному закону Гука (13.1) получим

$$W = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_x + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_z + \sigma_z \sigma_z + \sigma_z \sigma_z)) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$

или

$$W = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$
(13.4)

Для элемента тела, вырезанного по главным площадкам, полагая  $\sigma_x = \sigma_1$ ,  $\sigma_y = \sigma_2$ ,  $\sigma_z = \sigma_3$ ,  $\tau_{ij} = 0$  найдем

$$W = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3))$$
(13.5)

Полную энергию *W* можно представить так

$$W = W_0 + W_{\Phi} \tag{3}$$

 $W_0$  – энергия, идущая на изменение объема тела;  $W_{\Phi}$  – энергия, идущая на изменение формы тела.

II. Энергия изменения объема

Очевидно, что от гидростатического давления

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

происходит только изменение объема тела  $\theta$  и удельная энергия деформации при этом определяется так

$$W_0 = \frac{1}{2}\sigma_0\theta \tag{4}$$

Подставляя сюда (13.3) и (13.2) получим

$$W_{0} = \frac{1}{2K}\sigma_{0}^{2} = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \left(\frac{\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z}}{3}\right)^{2}$$
или  
$$W_{0} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z})^{2}$$
(13.6)

III. Энергия изменения формы

Ее найдем как разность из (3)

$$W_{\oplus} = W - W_0$$

Подставим сюда (13.4) и (13.6), найдем

$$W_{\phi} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z)) + + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) - \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + + 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z)) = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \left(\frac{1}{2E} - \frac{1 - 2\mu}{6E}\right) - - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) \left(\frac{\mu}{E} + \frac{1 - 2\mu}{3E}\right) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$
(5)

Найдем:

$$\frac{1}{2E} - \frac{1 - 2\mu}{6E} = \frac{3 - 1 + 2\mu}{6E} = \frac{1 + \mu}{3E}$$
$$\frac{\mu}{E} + \frac{1 - 2\mu}{3E} = \frac{3\mu + 1 - 2\mu}{3E} = \frac{1 + \mu}{3E}$$

С учетом полученного окончательно найдем

$$W_{\Phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z)) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$
(13.7)

Через главные напряжения  $W_{\Phi}$  запишется так

$$W_{\Phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3))$$
(13.8)

#### <u>Теории прочности</u>

Наиболее важным этапом расчета конструкции является выполнение условий прочности конструкции.

Введем обозначения: НДС – напряженно-деформированное состояние;  $\sigma_0$  – опасное напряжение;  $\sigma_0 = \sigma_{\rm T}$  – предел текучести для пластичных материалов;  $\sigma_0 = \sigma_{\rm Bp}$  – предел прочности для хрупких материалов;  $[\sigma]_p = \sigma_0^p / n_p$  – допускаемые напряжения при растяжении;  $[\sigma]_{\rm cx} = \sigma_0^{\rm cx} / n_{\rm cx}$  – допускаемые напряжения при сжатии;  $n_{\rm p}$  и  $n_{\rm cx}$  – коэффициенты запаса прочности. Для пластичных материалов  $[\sigma]_p = |[\sigma]_{\rm cx}| = [\sigma]$ , для хрупких материалов  $|[\sigma]_{\rm cx}| >> [\sigma]_p$ .

Для одноосного НДС (растяжение или сжатие) условие прочности имеет вид  $[\sigma]_{cw} \leq \sigma_{max} \leq [\sigma]_{p}$ .

В большинстве конструкций возникает сложное НДС, характеризуемое главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и главными деформациями  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  (см. раздел 12). При этом возможны различные сочетания их величин и знаков. В каждом конкретном случае оценить прочность конструкции – очень сложная задача. Поэтому, на практике, приходится использовать здесь

результаты опытов при одноосном НДС, вводя различные гипотезы о причине разрушения материала.

Установить единую причину разрушения разных материалов при различных НДС пока не удалось. Поэтому появилось несколько теорий прочности.

#### <u>I теория прочности</u>

Основана на гипотезе: независимо от вида НДС причиной разрушения материала является наибольшее нормальное напряжение. Для безопасного состояния должно быть выполнено условие

$$[\sigma]_{cw} \leq \sigma_{max} \leq [\sigma]_p$$

В общем случае, когда  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  имеют разные величины и знаки, условия прочности надо записать так

$$[\sigma]_{c \mathfrak{K}} \leq \sigma_1 \leq [\sigma]_p, \ [\sigma]_{c \mathfrak{K}} \leq \sigma_2 \leq [\sigma]_p, \ [\sigma]_{c \mathfrak{K}} \leq \sigma_3 \leq [\sigma]_p$$

Недостаток этой теории в том, что не учитывается влияние двух других главных напряжений (каждое отдельно).

Известно, что хрупкие материалы хорошо работают на сжатие и плохо на растяжение. Практика показала, что эта теория прочности применима для хрупких материалов, когда наибольшим из  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  является растягивающее напряжение.

При плоском напряженом состоянии (ПНС) в материале возникают два главных напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , определяемые формулами (12.10)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$
(A)

Условие прочности при ПНС записываются так для хрупких материалов в общем случае

$$[\sigma]_{\rm CM} \leq \sigma_l \leq [\sigma]_p, \qquad [\sigma]_{\rm CM} \leq \sigma_2 \leq [\sigma]_p,$$

А с учетом (А) получим

$$[\sigma]_{cw} \leq \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma]_p$$
(13.9)

Сейчас эта теория не применяется и имеет лишь историческое значение.

### <u>II теория прочности</u>

Основана на гипотезе: независимо от вида НДС причиной разрушения материала является наибольшая растягивающая деформация. В объемном НДС в теле возникают три главных деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  (см. раздел12), которые через главные напряжения можно определить по Обобщенному закону Гука (13.1). Например

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)) \tag{b}$$

Эта теория справедлива и для одноосного НДС, для которого допускаемая деформация [ $\varepsilon$ ] может быть найдена по простому закону Гука

$$[\varepsilon] = [\sigma]/E \tag{B}$$

В общем случае, когда  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  имеют разные знаки и для различных материалов условия прочности следует записать так

$$[\varepsilon]_{c\mathfrak{K}} \leq \varepsilon_1 \leq [\varepsilon]_p, \ [\varepsilon]_{c\mathfrak{K}} \leq \varepsilon_2 \leq [\varepsilon]_p, \ [\varepsilon]_{c\mathfrak{K}} \leq \varepsilon_3 \leq [\varepsilon]_p$$

С учетом (Б) и (В) получим в общем виде

$$[\sigma]_{c_{\mathcal{K}}} \leq \sigma_{1} - \mu(\sigma_{2} + \sigma_{3}) \leq [\sigma]_{p},$$
  

$$[\sigma]_{c_{\mathcal{K}}} \leq \sigma_{2} - \mu(\sigma_{1} + \sigma_{3}) \leq [\sigma]_{p},$$
  

$$[\sigma]_{c_{\mathcal{K}}} \leq \sigma_{3} - \mu(\sigma_{1} + \sigma_{2}) \leq [\sigma]_{p}$$
(13.10)

Эта теория прочности более совершенна, чем первая, т.к. учитывает все главные напряжения и тоже рекомендуется для оценки прочности хрупких материалов, когда разрушение происходит путем отрыва.

Для ПНС, когда  $\sigma_3$ =0 условия прочности (13.10) упростятся

$$[\sigma]_{c \mathfrak{K}} \leq \sigma_1 - \mu \sigma_2 \leq [\sigma]_p,$$
  
$$[\sigma]_{c \mathfrak{K}} \leq \sigma_2 - \mu \sigma_1 \leq [\sigma]_p$$
(13.11)

Обычно  $\sigma_1 > \sigma_2$  и первое условие (13.11) с учетом формул (А) для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , запишется так

$$[\sigma]_{c_{\mathcal{K}}} \leq \frac{1}{2} \left( (1-\mu)(\sigma_x + \sigma_y) + (1+\mu) \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right) \leq [\sigma]_p \quad (13.12)$$

### <u>III теория прочности</u>

Основана на гипотезе: независимо от вида НДС причиной разрушения материала являются наибольшие касательные напряжения.

Экспериментально установлено, что со сдвигами связаны пластические деформации, поэтому эта теория прочности применима для пластичных материалов, для которых  $[\sigma]_p = |[\sigma]_{cw}| = [\sigma]$ .

Для одноосного НДС касательные напряжения на наклонной площадке определяются по (3.4)

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_z}{2} \sin 2\alpha$$

а  $\tau_{\rm max}$  будут при  $\alpha = 45^{\circ}$   $\tau_{\rm max} = \sigma_z/2$ . Отсюда можно определить допускаемое напряжение

$$[\tau] = [\sigma]/2 \tag{()}$$

В трехмерном НДС экстремальные т находятся по формулам (12.6)

$$τ_1 = (σ_2 - σ_3)/2, \quad τ_2 = (σ_1 - σ_3)/2, \quad τ_3 = (σ_1 - σ_2)/2$$
(Д)

Условие прочности в общем случае нагружения тела по этой теории можно записать так с учетом (Д) и (Г)

$$\sigma_2 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad \sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma]$$
 (13.13)

Для ПНС, когда  $\sigma_3 = 0$  условия (13.13) примут вид

$$\sigma_2 \leq [\sigma], \quad \sigma_1 \leq [\sigma], \quad \sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma] \tag{13.14}$$

С учетом формул (А) для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  получим

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \le [\sigma]$$

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \le [\sigma]$$
(13.15)

Недостаток этой теории в том, что в случае объемного НДС учитывается только по два главных напряжения.

Эта теория лучше всего подтверждается опытами с пластичными материалами, для которых и рекомендуется.

#### <u>IV теория прочности</u>

Основана на гипотезе: независимо от вида НДС предельное состояние материала наступает в точке тела, где удельная потенциальная энергия изменения формы тела  $W_{\phi}$  достигает опасной величины. Как показали эксперименты, этот критерий справедлив для пластичных материалов, т.к. изменение формы тела связано со сдвигами, характерными для пластичных материалов.

В объемном НДС величина *W*<sup>ф</sup> определяется формулой (13.8)

$$W_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3))$$
(E)

Этот критерий прочности справедлив и для одноосного НДС, когда  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  и  $W_{\Phi}$  в этом случае будет

$$W_{\rm lp} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_1^2$$

Отсюда можно найти допустимую

$$\left[W_{\Phi}\right] = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma]^2 \tag{C}$$

С учетом (Е) и (С) условие прочности для объемного НДС по этой теории можно записать так

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3 \le [\sigma]^2$$
(13.16)

Для ПНС, когда  $\sigma_3 = 0$  условие прочности будет

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \le [\sigma]^2 \tag{13.17}$$

Подставляя сюда  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  по (А), после преобразований получим

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \le [\sigma]^2$$

Окончательно

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \le [\sigma]$$
(13.18)

Эта теория прочности называется еще энергетической.

Итак, III и IV теории прочности применяются для пластичных материалов, для которых за опасное состояния принимаются возникновение пластических деформаций. Поэтому эти теории прочности называют *условиями пластичности*.

# <u> V теории прочности (Мора)</u>

Эта теория прочности является достаточно универсальной, т.к. может применяется как к хрупким материалам с разными пределами прочности на растяжение (р) и сжатие (сж), так и к пластичным материалам.

В общем виде объемного НДС эта теория прочности имеет вид

$$\sigma_1 - \frac{n_p[\sigma]_p}{n_{cw}[\sigma]_{cw}} \sigma_3 \le [\sigma]_p \tag{13.19}$$

Здесь  $n_{\rm p}$  и  $n_{\rm cm}$  – коэффициенты запаса прочности при растяжении и сжатии. Недостаток этой теории в том, что не учитывается  $\sigma_2$ .

Если принять  $n_p = n_{cw}$ , а для пластичных материалов  $[\sigma]_p = |[\sigma]_{cw}| = [\sigma]$ , то из (13.19) следует  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ . А это, как указано выше, есть условие прочности по III теории.

## Раздел 14 <u>СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ И РАМЫ</u> Метод сил

## Основные понятия

Плоские шарнирно-стержневые конструкции, в которых все стержни работают на растяжение или сжатие называется *фермами* (рис.14.1 – 14.2). Такие конструкции используются в пролетах мостов, в башенных кранах, в различных перекрытиях и т.д.



Если стержни в ферме соединены сваркой, но имеют большую длину и малую изгибную жесткость, то их приближенно можно считать работающими только на осевые нагрузки. В фермах верхние горизонтальные стержни называют *верхний пояс*, нижние горизонтальные *нижний пояс*, наклонные стержни *раскосы*, вертикальные *стойки*. Нагрузки считаются приложенными в узлах. Погонные распределенные нагрузки q приводятся к силам в узлах (рис. 14.2).

Если элементы стержневой конструкции достаточно короткие и имеют большие размеры поперечных сечений, т.е. большую изгибную жесткость ЕЈ, то такие стержни в основном работают на изгиб и конструкция называется *рамой* (рис. 14.3, 14.4).

Здесь стержни в узлах соединены жестко (сваркой). В рамах силы F и нагрузки q могут быть произвольно приложены, q не надо приводить к узлам.



I. Фермы:

Для ферм эта степень определяется по формуле

$$W = R + C - 2III \tag{14.1}$$

Здесь: *R* – число опорных связей;

С-число стержней в ферме;

Ш-число шарниров.

Если W = 0 ферма неизменяема и статически определима.

Если *W* < 0 ферма геометрически изменяема (механизм), не пригодна к эксплуатации.

Если W > 0 ферма статически неопределима и неизменяема. W = n раз статически неопределима. Рис.14.1: R = 3, C = 9, III = 6 по (14.1) W = 3 + 9 - 2 х 6 = 0, ферма статически определима, но мгновенно геометрически изменяема, т.к. все опорные связи пересекаются в т.А. и возможен малый поворот фермы относительно т.А. Такую ферму эксплуатировать нельзя. Если верхнюю опору сделать горизонтальной, ферма станет геометрически неизменяемой и пригодной к эксплуатации.

Итак: в ферме все опорные связи не должны пересекаться в одной точке.

Рис.14.2: R = 3, C = 7, III = 5,  $W = 3 + 7 - 2 \ge 5 = 0$ , ферма статически определима и геометрически неизменяема.

II. Рамы:

Здесь

$$W = R - 3 + 3K, \tag{14.2}$$

где: *R* – общее число опорных связей;

К – число замкнутых контуров.

Рис. 14.3: R = 7, K = 1,  $W = 7 - 3 + 3 \ge 1 = 7$  раз статически неопределима.

Рис. 14.4: R = 3, K = 0,  $W = 3 - 3 + 3 \ge 0$ , рама статически определима.

Статическая неопределимость бывает трех типов:

1). <u>Наружной (внешней)</u>, определяется  $S_H = R - 3$ , т.е. если число опорных связей больше трех;

2). <u>Внутренней</u>, определяется  $S_B = W - S_H$ 

3). <u>Смешанной</u>, если  $S_H \neq 0$  и  $S_B \neq 0$ .

Рис. 14.3:  $S_H = 7 - 3 = 4$  раза внешне статически неопределима;

 $S_B = 7 - 4 = 3$  раза внутренне статически неопределима, т.е. это смешанный тип статической неопределимости.

<u>Определение внутренних продольных сил в сечениях стержней</u> <u>статически определимых ферм</u>



Рис.14.5.

Как указано выше, в фермах стержни работают на растяжение или сжатие, т.е. в них возникают продольные силы  $N_{ij}$ , которые определяются *методом сечений:* стержень мысленно разрезается в произвольном месте, получим две его части, прикрепленные к соседним узлам. В каждой его части показываем в сечении *растягивающее* усилие  $N_{ij}$ . Например, разрежем стержень *A*-2 (см. рис. 14.5).



К левой его части, соединенной с опорой A, приложим *растягивающее* усилие  $N_{A2}$ , а к правой части, соединенной в узле 2, растягивающее усилие  $N_{2A}$ . Очевидно, что  $N_{A2} = N_{2A}$ . Аналогично, вводим усилия  $N_{ij}$  во всех стержнях фермы.

Расчет фермы начинают с определения всех опорных реакций из обычных уравнений равновесия для всей фермы. Усилия *N<sub>ij</sub>* в стержнях фермы можно определять двумя способами:

1. Метод вырезания узлов:

Обычно используется, когда в узле (шарнире)сходятся два стержня с неизвестными усилиями  $N_{ij}$ . Например, вырежем узел A на рис. 14.5. Здесь сходятся два стержня A-1 и A-2. Как показано выше, усилия в них обозначим  $N_{Al}$  и  $N_{A2}$  (растягивающие). Для их определения можно составить два уравнения равновесия узла A:  $\sum Z=0$  и  $\sum Y=0$  (направления осей Y и Zпоказаны на рис. 14.5). При этом надо учитывать реакции  $R_A$  и  $H_A$  в опоре A и знать все углы между стержнями. Если из расчета получим  $N_{ij} > 0$ , то этот стержень растянут, а если  $N_{ij} < 0$ , то сжат. Далее можно вырезать узел 1. Здесь неизвестны усилия  $N_{12}$  и  $N_{13}$  (растягивающие), а  $N_{1A} = N_{Al} - уже$ известно. Составим для узла 1 уравнения статики:

 $\sum z = 0, \sum y = 0$  (учесть силу *F* в узле 1) и из них найдем  $N_{13}$  и  $N_{12}$ . Далее можно вырезать узел 2, где неизвестны  $N_{23}$  и  $N_{24}$ , а  $N_{21} = N_{12}, N_{2A} = N_{A2}$  – уже

известны. В уравнениях  $\sum y = 0$  и  $\sum z = 0$  учесть силу *F* в узле 2. Потом последовательно вырезаем другие узлы и находим  $N_{ij}$  в остальных стержнях. Если ферма и *нагрузки на ней* имеют симметрию (как на рис. 14.5), то ее надо использовать. Из рис. 14.5 получим:  $N_{B5} = N_{A1}$ ,  $N_{B4} = N_{A2}$ ,  $N_{45} = N_{21}$ ,  $N_{53} = N_{13}$ ,  $N_{43} = N_{23}$ .

# 2. Метод разрезов (сечений)

Ферму мысленно разрезают на две части сечением так, чтобы перерезанными были три стержня. Рассматривают равновесие одной части фермы, в перерезанных стержнях этой части показывают растягивающие усилия N<sub>ii</sub>. Составляют три уравнения равновесия для рассматриваемой части фермы. Моментные уравнения (для простоты вычислений) надо составить относительно тех точек, где сходятся два неизвестных усилия N<sub>ij</sub> и проще определить плечи у сил N<sub>ii</sub>. Из этих трех уравнений и определяются три усилия N<sub>ij</sub>. Например, ферму на рис. 14.5 разрежем сечением C-C и рассмотрим равновесие ее правой части. Неизвестные усилия в стержнях:  $N_{31}$ ,  $N_{32}$ ,  $N_{42}$  (растягивающие) показаны на рис. 14.5. В узле 3 сходятся усилия  $N_{31}$  и  $N_{32}$ , поэтому составим моментное уравнение равновесие правой части фермы относительно узла 3: *∑тот*<sub>3</sub>=0. Здесь плечо для усилия N<sub>42</sub> определяется легко, обязательно учесть силы F в узлах 3,4,5 и реакцию  $R_B$  в узле В. Из этого уравнения вычисляется N<sub>42</sub>. Далее лучше составить уравнения  $\sum z = 0$  и  $\sum y = 0$  для всей правой части фермы с нагрузками на нее, из которых находятся усилия  $N_{31}$  и  $N_{32}$ . Далее можно сделать разрез K-K, здесь неизвестными будут N<sub>53</sub>, N<sub>54</sub>, N<sub>B4</sub> и рассмотреть равновесие правой фермы. Моментное уравнение равновесия лучше составить части относительно узла 5, из которого найдется N<sub>B4</sub>. Потом можно составить для правой части фермы  $\sum y = 0$  и  $\sum z = 0$ , из которых определяется  $N_{54}$  и  $N_{53}$ . Во всех уравнениях равновесия надо учитывать силу F в узле 5 и реакцию  $R_B$  в узле *В*.

В остальных стержнях усилия N<sub>ij</sub> можно найти методом вырезания узлов, т.е. в одной задаче можно использовать оба метода. Желательно использовать симметрию задачи (если она имеет место).

# <u>Определение внутренних силовых факторов (ВСФ) в статически</u> <u>определимых рамах.</u>

В отличии от фермы, в стержнях рамы могут возникать:  $N_i$  – продольные силы,  $Q_i$  – поперечные силы,  $M_i$  – изгибающие моменты. Сначала, из обычных уравнений равновесия всей рамы, определяют все три реакции. Если ввести для плоской рамы скользящую систему координат  $y_i z_i$  (как на рис. 14.4), причем оси  $z_i$  на каждом участке направлять вдоль оси стержня, то в стержнях рамы ВСФ можно обозначить так:

 $N_i = N_{zi}, Q_i = Q_{yi}, M_i = M_{xi}$ . Далее, как показано в разделе 5 для балок, методом сечений с использованием формул (5.2) и (5.3) для каждого *i*-го

участка рамы определяется  $M_{xi}$  и  $Q_{yi}$ . А  $N_{zi}$  определяются из аналогичных формул  $N_{zi} = -\sum F_{iz}^{nee} = \sum F_{iz}^{npae}$ . По этим формулам на каждом участке рамы можно построить эпюры  $N_z$ , эпюры  $Q_y$  и эпюры  $M_x$ . Эти эпюры строятся по правилам, принятым в разделе 5 (см. Пример 1, рис. 5.5).

## <u>Метод сил.</u> I. Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)



Рис.14.6.

На горизонтальную балку *AB* приложим *статически* силу  $P_1$ . Балка прогнется и займет положение пунктирной линии, сила  $P_1$  совершит работу  $A_{11} = P_1 \Delta_{11}/2$ . Далее приложим <u>статически</u> силу  $P_2$ , балка еще прогнется (сплошная линия), сила  $P_2$  совершит работу  $A_{22} = P_2 \Delta_{22}/2$ . При этом сила  $P_1$ , постоянная на перемещении  $\Delta_{12}$ , совершит работу  $A_{12} = P_1 \Delta_{12}$ . Суммарная работа *A* при этом будет

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} = P_1 \Delta_{11}/2 + P_1 \Delta_{12} + P_2 \Delta_{22}/2$$
(14.3)

Здесь:  $\Delta_{11}$ - перемещение по направлению  $P_1$  от  $P_1$ ;

 $\Delta_{12}$  – перемещение по направлению  $P_1$  от  $P_2$ ;

 $\Delta_{21}$  – перемещение по направлению  $P_2$  от  $P_1$ ;

 $\Delta_{22}$  – перемещение по направлению  $P_2$  от  $P_2$ 

По принципу независимости действия сил, суммарную деформацию балки (сплошная линия), можно получить одновременно <u>статически</u> прикладывая  $P_1$  и  $P_2$ . При этом получим ту же работу A

$$A = P_1(\Delta_{11} + \Delta_{12})/2 + P_2(\Delta_{21} + \Delta_{22})/2$$
(14.4)

Приравнивая (14.3) и (14.4) получим  $P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}$  или  $A_{12} = A_{21}$  (14.5)

Итак: <u>Работа  $P_1$  по ее направлению на перемещении ( $\Delta_{12}$ ), вызванном  $P_2$ , равна работе  $P_2$  по ее направлению на перемещении ( $\Delta_{21}$ ), вызванном  $P_1$ . Это и есть *теорема Бетти*. Эта теорема справедлива и в случае, когда под  $P_1$  и  $P_2$  подразумеваются системы нагрузок.</u>

II. <u>Теорема о взаимности перемещений (принцип Максвелла)</u>

Пусть на балку (рис. 14.6) приложены силы  $P_1 = P_2 = 1$  (единичные силы). Для удобства перемещения от этих единичных сил будем обозначать  $\delta_{ij}$ . С учетом (14.5) можно записать

 $P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}$ , т.к.  $P_1 = P_2 = 1$  получим

$$\delta_{12} = \delta_{21} \tag{14.6}$$

Это и есть <u>принцип Максвелла:</u> для двух единичных нагружений упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванной первой силой.

#### Ш. Формула перемещений (Мора)

В разделе 3, формула (3.18) показано, что потенциальная энергия деформации при растяжении (сжатии) стержня силой  $N = N_z$  равна

$$U = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \frac{N^2}{EA} dz$$
 (14.7)

В разделе 5, формула (5.21) показано, что при изгибе стержня  $M_x$ энергия  $U = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{l} \frac{M_x^2}{EJ_x} dz$ .

В общем случае можно записать, допуская, что изгиб M может быть и относительно оси  $x(M_x)$  и относительно оси  $y(M_y)$ 

$$U = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \frac{M^2}{EJ} dz$$
 (14.8)

Полагаем, что деформации стержней малы, материал их подчиняется закону Гука, потерь энергии нет и работы  $A_{ij}$  определенные выше, переходят в потенциальные энергии  $U_{ij}$ , т.е.  $A_{ij} = U_{ij}$ , где i = 1,2 и j = 1,2.

От нагрузки P<sub>1</sub> *в каждом стержне* конструкции появляются  $N = N_1$  и  $M = M_1$ . С учетом (14.7) и (14.8) и т.к.  $A_{ii} = U_{ii}$  получим

$$A_{11} = \sum_{0}^{l} \frac{N_1^2 dz}{2EA} + \sum_{0}^{l} \frac{M_1^2 dz}{2EJ}$$
(a)

Здесь интегрирования надо вести по длине каждого стержня, а потом суммировать по всем стержням конструкции.

От нагрузки  $P_2$  в каждом стержне появляется  $N = N_2$  и  $M = M_2$  и тогда

$$A_{22} = \sum_{0} \int_{0}^{l} \frac{N_2^2 dz}{2EA} + \sum_{0} \int_{0}^{l} \frac{M_x^2 dz}{2EJ}$$
(B)

При одновременном действии нагрузок  $P_1$  и  $P_2$  в каждом стержне появятся  $N = N_1 + N_2$  и  $M = M_1 + M_2$  и тогда работа, совершаемая этими силами

$$A = \sum_{0}^{l} \frac{(N_1 + N_2)^2 dz}{2EA} + \sum_{0}^{l} \frac{(M_1 + M_2)^2}{2EJ} dz$$
(c)

Из формулы (14.3) найдем

$$A_{12} = A - A_{11} - A_{22} \,.$$

Подставляя сюда формулы (а), (в) и (с) получим

$$A_{12} = \sum_{0} \int_{0}^{l} \frac{(N_1 + N_2)^2 - N_1^2 - N_2^2}{2EA} dz + \sum_{0} \int_{0}^{l} \frac{(M_1 + M_2)^2 - M_1^2 - M_2^2}{2EJ} dz$$

После простых преобразований найдем:

$$A_{12} = \sum_{0}^{l} \int_{0}^{N_1 N_2} \frac{M_1 N_2}{EA} dz + \sum_{0}^{l} \int_{0}^{M_1 M_2} \frac{M_1 M_2}{EJ} dz$$
(d)

Полагаем: 1)  $P_1 = 1$  (единичная нагрузка), от нее возникают  $N_1$  и  $M_1$  во всех стержнях;

2)  $P_2 = P_P - внешняя нагрузка, от нее в каждом стержне возникают <math>N_2 = N_P, M_2 = M_P, a$  т.к.  $A_{12} = P_1 \Delta_{12} = 1$   $\Delta_{12} = \Delta_{12} = \Delta_{1P}$ .

Подставляя все вышесказанное в (d) получим

$$\Delta_{1P} = \sum_{0}^{l} \int_{0}^{M_{1}N_{P}} dz + \sum_{0}^{l} \int_{0}^{M_{1}M_{P}} dz$$
(14.9)

Эта формула называется *формула Мора*, она определяет перемещение в направлении «единичной силы» от внешней нагрузки.

Порядок вычислений по формуле Мора

1. От внешней нагрузки для каждого стержня конструкции находятся формулы для вычислений и построения эпюр *N*<sub>P</sub> и *M*<sub>P</sub>;

2. в искомом сечении по направлению искомого перемещения прикладывается «единичная нагрузка» (для линейного перемещения – сосредоточенная сила  $P_1=1$ , для угла поворота сечения – сосредоточенный момент  $m_1=1$ ) и от этого нагрузки во всех стержнях определяются формулы для  $N_1$  и  $M_1$ , по которым строятся эпюры  $N_1$  и  $M_1$ ;

3. искомое перемещение определяется по формуле Мора (14.9), что на практике сводится к перемножению эпюр:  $N_1$  на  $N_P$  и эпюр:  $M_1$  на  $M_P$  для каждого стержня и суммированием результатов;

4. если в результате вычислений получиться  $\Delta_{1P} > 0$ , то искомое перемещение совпадает с направлением «единичной нагрузки».

В формуле (14.9): Е – модуль упругости материала стержней, А и J – площади и моменты инерции относительно оси изгиба сечений каждого стержня.

На практике в формуле (14.9) используются лишь одно слагаемое:

 $B \phi epmax$ , где стержни работают в основном на растяжение-сжатие оставляют обычно только первое слагаемое. А т.к. эпюры  $N_{1i}$  и  $N_{Pi}$  постоянны по длине  $l_i$  стержней, то

$$\Delta_{1P} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{1i} N_{Pi}}{E A_i} l_i \tag{14.10}$$

Здесь *n* – число стержней в ферме.

<u>В рамах (балках)</u> используются обычно стержни большой изгибной жесткости *EI* и они работают в основном на изгиб. Поэтому, с достаточной точностью в (14.9) можно оставить только второе слагаемое

$$\Delta_{1P} \approx \sum_{0}^{l} \int_{0}^{M_{1}M_{P}} dz \qquad (14.11)$$

Перемножение эпюр можно проводить <u>способом Верещагина</u>: произведение эпюр равно площади одной эпюры, умноженной на ординату второй эпюры под центром тяжести первой. Умножение вести с учетом знаков.

Например:



2)

-2

 $A_2$ 



Ц.Т

 $y_2 \downarrow y_1$ 

12

$$X = A_1 y_1 = -\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9\right)\left(\frac{1}{3} \cdot 6\right) = -\frac{27}{2} \cdot 2 = -27$$

Трапецию надо разбить на 2 фигуры: треугольник и прямоугольник

$$X = A_1 y_1 + A_2 y_2 = -(\frac{1}{2}6 \cdot 12)\frac{2}{3}6 + (-2 \cdot 12)\frac{6}{2} =$$
  
= -36 \cdot 4 - 24 \cdot 3 = -216

Верхнюю эпюру с переменными знаками представляют в виде суммы двух



треугольников (пунктир) с разными знаками

$$X = A_1 y_1 + A_2 y_2 = -(\frac{1}{2}3 \cdot 9)4 + (\frac{1}{2}6 \cdot 9)4 =$$
$$= -\frac{27}{2}4 + \frac{54}{2}4 = 54$$

4)



Эпюры ограничены параболой n-ой степени. Эти эпюры лучше принимать за первые и для них определять *A* и *Z*<sub>ci</sub>

$$A_{1} = \frac{n}{n+1}ah, \qquad Z_{C1} = \frac{(n+1)}{2(n+2)}a$$
$$A_{2} = \frac{1}{n+1}ah, \qquad Z_{C2} = \frac{n+1}{n+2}a$$

Рис.14.7.

<u>Определение перемещений в статически определимых конструкциях</u> <u>методом сил</u>

Пример 1.



Рис.14.8.

У рамы на рис. 14.8а найти вертикальное перемещение т.*С* от заданной нагрузки *q*?

Порядок расчета:

1. Строим эпюры *M*<sub>Pi</sub> от нагрузки *q* для каждого *i*-го участка:

I участок.  $0 \le S_1 \le a$ ,  $Mp_1 = \frac{-qS_1^2}{2}$ .

Считаем:  $S_1 = 0$ ,  $Mp_1 = 0$ ,  $S_1 = \frac{a}{2}$ ,  $Mp_1 = -\frac{qa^2}{8}$ ,  $S_1 = a$ ,  $Mp_1 = -\frac{qa^2}{2}$ По этим данным строим эпнору  $M_{PI}$  на рис. 14.9. II участок.  $0 \le S_2 \le a$   $M_{P2} = \frac{-qa^2}{2} - const$ . Строим эпнору  $M_{P2}$ .

2. По условию задачи надо найти <u>вертикальное перемещение</u> т.C рамы, поэтому в этой точке прикладываем <u>вертикальную силу</u>  $P_1=1$ . Например, вверх на рис. 14.8в.

От этой единичной силы строим эпюры  $M_{1i}$  для всех участков рамы: I участок.  $0 \le S_1 \le a, M_{11} = P_1 S_1$ , считаем:  $S_1 = 0$   $M_{11} = 0$ ,  $S_1 = a$   $M_{11} = a$ II участок.  $0 \le S_2 \le a, M_{12} = P_1 a = a - \text{const.}$ 

По этим данным строим эпюры  $M_{1i}$  на рис. 14.9.





3. Перемножаем эпюры  $M_{1i}$  и эпюры  $M_{Pi}$  как показано на рис. 14.7 на каждом *i*-м участке рамы:



$$Mp_1M_{11} = A_1y_1 = -\frac{qa^3}{6} \cdot \frac{3}{4}a = -\frac{qa^4}{8} = B$$

Здесь  $A_1$  и  $Z_{C1}$  находим из рис. 14.7 п.4 для квадратной параболы n = 2.

$$A_{1} = \frac{1}{n+1}a \cdot h = \frac{1}{3}a\left(-\frac{qa^{2}}{2}\right) = -\frac{qa^{3}}{6},$$
$$Z_{C1} = \frac{n+1}{n+2}a = \frac{3}{4}a$$

*У*<sub>1</sub> найдем из пропорций для нижнего треугольника

$$\frac{y_1}{Z_{C1}} = \frac{a}{a} = 1$$
  $y_1 = Z_{C1} = \frac{3}{4}a$ 



$$M_{P2} \cdot M_{12} = A_2 y_2 = -\frac{qa^3}{2}a = -\frac{qa^4}{2} = K$$
$$A_2 = -\frac{qa^2}{2}a = -\frac{qa^3}{2}, \quad V_2 = a$$

4. Перемещение т. С  $\Delta_C = \Delta_{1P}$  найдем по (14.11) суммированием чисел *B* и *K* 

$$\Delta_C = \frac{B}{EI_1} + \frac{K}{EI_2} = -\frac{qa^4}{8EI_1} - \frac{qa^4}{2EI_2}$$

Здесь *ЕЈ*<sub>i</sub> изгибная жесткость участков рамы.

Получили  $\Delta_C < 0$ , это означает, что т.С переместится в направлении, противоположном направлению приложенной силы  $P_1=1$  (вверх). <u>Точка С</u> <u>переместится вниз.</u>

Если для рамы на рис.14.8 *а* надо определить горизонтальное перемещение т.*C*, то в т.*C* прикладываем горизонтальную силу  $P_1=1$ . Если надо найти угол поворота сечения в т.*C*, то в ней прикладываем единичный момент m=1. От них и строятся эпюры  $M_{1i}$ , а эпюры  $M_{Pi}$  от нагрузки *q* не меняются.

#### Пример 2.

Рассмотрим ферму, показанную на рис.14.1. Как показано выше в п.1, чтобы эта ферма была геометрически неизменяема, в опоре *В* опорный стержень надо расположить горизонтально, при этом ферма будет статически определима.

Для такой фермы надо определить вертикальное перемещение узла *С* от действия нагрузок *F* в узлах *C* и *D*.

Порядок расчета:

1) для заданной фермы от заданных нагрузок из обычных уравнений статики для всей фермы находим три опорных реакции  $R_A$ ,  $H_A$  и  $H_B$ ;

2) методом вырезания узлов или методом сечений находим продольные усилия  $N_{Pi}$  во всех  $i^{\underline{x}}$  стержнях фермы от заданных нагрузок F;

3) убираем силы F в узлах C и D, а в узле C прикладываем по направлению искомого перемещения вертикальную силу P=1 (например вниз). От этой единичной силы P=1 снова определяем все опорные реакции  $R_A^{(1)}$ ,  $H_A^{(1)}$ ,  $H_B^{(1)}$  и далее находим продольные усилия  $N_{1i}$  во всех

 $i^{x}$  стержнях фермы;

4) искомое перемещение  $\Delta_{C}$  найдем по формуле (14.10)

 $\Delta_C = \sum_{i=1}^{9} \frac{N_{Pi} N_{1i}}{EA_i} l_i$  i=1,2,... 9- число стержней.

Здесь: *Е* – продольный модуль упругости материала стержней; *A<sub>i</sub>*, *l<sub>i</sub>* - площади поперечных сечений и длины всех стержней;

Суммирование надо вести по всем девяти стержням фермы.

Аналогично можно найти перемещение любого узла фермы (вертикальное или горизонтальное), прикладывая в этом узле силу P=1 по направлению искомого перемещения и определяя от нее усилия  $N_{1i}$ . А усилия от внешней нагрузки  $N_{Pi}$  не меняются.

Расчет статически <u>неопределимых ферм и рам</u> более сложен и подробно рассматривается в курсе «Строительная механика стержневых конструкций».

# Вопросы для самопроверки

К разделу 1:

- 1. Что такое деформация тела под действием нагрузки?
- 2. Что называется упругостью, пластичностью материала, какие материалы называют изотропными и анизотропными?
- 3. Что определяет гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений)?
- 4. Какие нагрузки могут действовать на конструкции?
- 5. Поясните понятия полного, нормального и касательного напряжений в точке сечения бруса.
- 6. Как обозначаются нормальные и касательные напряжения в декартовой системе координат *XYZ*? Запишите тензор напряжений  $T_{\sigma}$ ?
- 7. Что определяет закон парности касательных напряжений?
- 8. Как обозначаются компоненты полного перемещения точки в теле в декартовых осях?
- 9. Что такое относительные линейные деформации и деформации сдвига? Запишите тензор деформаций  $T_{\varepsilon}$ ?
- **10.**Какие внутренние силовые факторы (ВСФ) возникают в поперечном сечении бруса при его произвольном нагружении, как обозначаются они?
- **11.**Как определяются все ВСФ в сечении бруса с использованием «метода сечений» (формулы (1.5)).
- 12.Как ВСФ определяются через напряжения в сечении бруса?

К разделу 2:

- 1. Что называется статическим моментом сечения относительно оси, осевым, полярным и центробежным моментами инерции?
- 2. Как вычисляются статические моменты и моменты инерции сложной фигуры сечения?
- 3. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей?
- 4. Зависимость между моментами инерции при повороте осей?
- 5. Какие оси называются главными, как они определяются. Что такое главные моменты инерции, как они вычисляются?
- 6. Как определяются главные оси для симметричных фигур?
- 7. Какие оси называются главными центральными?
- 8. Как определяется радиус инерции сечения, что такое эллипс инерции сечения?
- 9. Как вычисляются главные моменты инерции простых фигур: (прямоугольник, треугольник, круг)?

К разделу 3:

- 1. Какие внутренние силовые факторы возникают при центральном растяжении (сжатии)?
- **2.** Что представляет собой эпюра  $N_z$ ?

- **3.** Как строится эпюра  $N_z$  для колонны с учетом ее веса?
- 4. Как определяются напряжения в поперечном и наклонном сечении бруса?
- 5. Как определяются деформации в брусе?
- 6. Как записывается закон Гука?
- 7. Что такое коэффициент Пуассона?
- 8. Какие задачи называются статически неопределимыми? Приведите примеры.
- 9. Нарисуйте диаграмму растяжения Стали3. Укажите на ней основные механические характеристики?
- 10.Условие прочности бруса по методу допускаемых (расчетных) напряжений?
- 11.Условие прочности бруса по методу разрушающихся нагрузок (предельному состоянию)?

К разделу 4:

- 1. Запишите закон Гука при сдвиге.
- 2. Какие виды разрушений возможны в заклепочных (болтовых) соединениях?
- 3. Запишите условие прочности сварного шва?

К разделу 5:

- 1. Как определяются опорные реакции в балках?
- **2.** Какие внутренние силовые факторы (ВСФ) возникают в поперечных сечениях балок при плоском изгибе?
- 3. Как вычисляются продольная и поперечная силы в поперечном сечении бруса?
- 4. Как вычисляется изгибающий момент в поперечном сечении бруса?
- 5. Как строятся эпюры всех ВСФ в балке?
- 6. Как можно проверить правильность построенных эпюр ВСФ в балке?
- 7. Как определяются нормальные напряжения при чистом и поперечном изгибе балки?
- 8. Как определяется кривизна нейтрального слоя?
- 9. Что такое момент сопротивления сечения балки, как они вычисляются?
- 10.В каких точках сечения балки возникают максимальные нормальные напряжения?
- 11.Запишите формулу Журавского?
- 12.Как вычисляется для прямоугольного сечения балки  $S_x^{\text{отс}}$  статический момент относительно оси *x* отсеченной части сечения. Поясните на рисунке?
- **13.**По какому закону меняются  $\tau_{yz}$  касательные напряжения в поперечном сечении балки. Где максимальные и минимальные напряжения?
- 14.Как определяются  $\tau_{yz}$  в стенке двутаврового сечения?
- 15.Как вычисляются  $\tau_{xz}$  в полке двутаврового сечения балки?
- 16.Условия прочности при поперечном изгибе балок?
- 17.Как подбираются размеры для балок прямоугольного сечения, номера стандартных профилей (двутавров, швеллеров)?
- 18.Какие деформации возникают при изгибе балок?
- 19.Запишите дифференциальное уравнение изогнутой оси балки?
- 20.Какие правила надо выполнять для уравнивания однотипных констант интегрирования (метод Клебша)?
- 21.Как определяются константы интегрирования?
- 22.Как проверяется балка на жесткость?
- 23.Какие балки называются статически неопределимыми?
- **24.**Какой порядок расчета статически неопределимых балок с использованием метода Клебша?

<u>К разделу 6:</u>

- 1. При каком нагружении прямой брус испытывает деформацию кручения?
- 2. Как вычисляется скручивающий момент по величине мощности и скорости вращения вала?
- 3. Как строятся эпюры  $M_z$  внутренних крутящих моментов в вале?
- 4. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях круглого вала, как они определяются?
- 5. Как определяются углы поворота одного сечения вала относительно другого сечения?
- 6. Как производится расчет скручиваемого вала на прочность?
- 7. Как определяются размеры (радиусы) сечений сплошного и кольцевого сечения?
- 8. Как проверяется вал на жесткость?
- 9. Какие валы называются статически неопределимыми?
- 10.Какой порядок расчета статически неопределимого вала?
- 11. Чем отличается кручение стержней некруглого сечения от кручения стержней круглого сечения?
- 12.Как определяются напряжения и относительный угол закручивания при свободном кручении тонкостенных стержней замкнутого контура?
- 13.Как определяются напряжения и относительный угол закручивания при свободном кручении тонкостенных стержней открытого контура

К разделу 7:

- **1.** Как определяются внутренние силовые факторы (ВСФ) в сечении бруса и строятся их эпюры при сложном сопротивлении?
- 2. Как определяются нормальные и касательные напряжения в точке сечения бруса при сложном сопротивлении?
- 3. Какая деформация бруса называется «косой изгиб»?
- 4. Как определяются нормальные напряжения в точках сечения бруса при косом изгибе?
- 5. Как определяется положение нейтральной оси в сечении бруса при косом изгибе?

- 6. Где возникают в сечении бруса экстремальные нормальные напряжения при косом изгибе и как они определяются?
- 7. Как подбираются размеры сечений бруса при косом изгибе?
- 8. Как определяются нормальные напряжения в точках сечения бруса при внецентренном его нагружении?
- 9. Как определяется положение нейтральной оси в сечении бруса при его внецентренном нагружении?
- 10.Как проверяется прочность колонн при внецентренном их нагружении?
- 11.Что такое «ядро сечения»?
- 12.Как строится ядро сечений?
- 13. Где возникают максимальные нормальные и касательные напряжения в круглом сечении бруса и как они определяются при изгибе с кручением бруса?
- 14.Как записываются условия прочности при изгибе с кручением бруса?
- 15.Как подбираются размеры круглых сечений бруса при изгибе с кручением?

К разделу 8:

- 1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
- 2. Что называется критической силой и критическим напряжением?
- 3. Какой вид имеет формула Эйлера для критической силы?
- 4. Какой момент инерции входит в формулу Эйлера?
- 5. Как влияют способы закрепления концов стержня?
- **6.** Какой вид имеет обобщенная формула Эйлера при различных закреплениях концов стержня?
- **7.** Чему равен *µ* коэффициент приведения длины при различных закреплениях концов стержней?
- 8. Какой вид имеет формула Эйлера для критических напряжений?
- 9. Что такое гибкость стержня и как она определяется?
- 10.Как определить, в какой плоскости стержень потеряет устойчивость?
- 11.Когда можно применять формулу Эйлера?
- 12.Как рассчитывают на устойчивость стержни, для которых нельзя пользоваться формулой Эйлера?
- 13.Как определяются критические напряжения по Ясинскому и когда можно пользоваться его формулой?
- **14.**Как определяется *φ* коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения. Как определяется допустимое напряжение на устойчивость?
- 15.Как проверяются сжатые колонны на устойчивость?
- 16.Как проектируются колонны из стандартных профилей?

<u>К разделу 9:</u>

- 1. Какие нагрузки называются статическими и какие динамическими?
- 2. В чем заключается принцип Д'Аламбера?
- 3. Как вычисляются инерционные нагрузки?

- **4.** Как определяется динамический коэффициент в задачах «учет сил инерции»?
- 5. Что такое «динамическая сила Р<sub>д</sub>» при расчетах на удар?
- 6. Как определяются напряжения и деформации в брусе при ударе?
- 7. Как вычисляется динамический коэффициент при ударе?
- 8. Применение каких конструктивных мероприятий позволяет уменьшить напряжения при действии ударной нагрузки?
- 9. Каков порядок расчета балки на удар?
- 10.Как учитывается масса ударяемого тела (бруса)?
- 11.Как можно определить собственную частоту колебаний конструкций?
- 12.При каких условиях возникает явление резонанса. Чем оно характеризуется?
- 13.Что такое «усталость материала»?
- 14.Что такое «предел выносливости материала»?
- 15. Что представляет собой кривая усталости (кривая Вёлера)?
- 16.Какие факторы влияют на величину предела выносливости материала?

## К разделу 10:

- 1. Какой формулой записывается гипотеза Винклера?
- 2. Запишите дифференциальное уравнение балки на упругом основании?
- 3. Как определяются константы при интегрировании дифференциального уравнения бесконечно-длинной балки на упругом основании?
- **4.** Нарисуйте примерный вид Эп. *V*, Эп. *M<sub>x</sub>*, Эп *Q<sub>y</sub>* бесконечно-длинной балки на упругом основании?
- 5. Как рассчитывается полубесконечная балка на упругом основании?
- 6. Опишите методику расчета короткой балки методом последовательных приближений?
- 7. Как рассчитываются балки по линиям влияния?

К разделу 11:

- 1. Как обозначаются компоненты полного перемещения точки по осям *x*, *y*, *z*?
- 2. Как определяется относительная деформация в теле вдоль оси *х*?
- 3. Как обозначаются сдвиги в плоскостях, образованных осями x, y, z?
- 4. Запишите все уравнения Коши?
- 5. Какую роль играют условия совместности деформаций?
- 6. Какие уравнения используются для вывода условий совместности деформаций?
- 7. Для вывода дифференциальных уравнений равновесия, нарисуйте прямоугольный элемент и покажите на двух гранях, перпендикулярных к оси *x* (видимой и невидимой), все напряжения на них?
- **8.** Составьте уравнение равновесия  $\Sigma x = 0$  для этих граней?
- 9. Запишите все дифференциальные уравнения равновесия?

- 10.Нарисуйте малый тетраэдр и покажите все напряжения, которые действуют на его гранях?
- 11.Что определяют «направляющие конусы»?
- **12.**Запишите уравнение равновесия  $\Sigma x = 0$  тетраэдра?
- 13.Запишите все три уравнения равновесия тетраэдра?

К разделу 12:

- 1. Какие наклонные площадки называются главными?
- 2. Из какого уравнения определяются главные напряжения?
- 3. Какие величины называются инвариантами напряженного состояния?
- 4. На каких площадках возникают экстремальные касательные напряжения и как они вычисляются?
- 5. Какое напряженное состояние называют плоским (ПНС)?
- **6.** Покажите на рисунке на наклонной площадке все компоненты полного напряжения  $\rho_V$ ?
- 7. Как вычисляются нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке в ПНС?
- 8. Как определяются главные площадки и главные напряжения в ПНС?
- 9. На каких площадках возникают экстремальные касательные напряжения и как они определяются в ПНС?
- 10. Что такое главные деформации и из какого уравнения они определяются?
- 11.Как определяются экстремальные сдвиги?
- 12.Какую величину определяет первый инвариант деформированного состояния?

К разделу 13:

- 1. Какие уравнения называют физическими?
- 2. Запишите формулы Обобщенного закона Гука?
- 3. Какие величины связывает Обобщенный закон Гука и как они называются?
- 4. Как определяется объемный модуль упругости материала?
- 5. Как определяется полная удельная энергия деформации в теле?
- 6. Как вычисляется удельная энергия изменения объема?
- 7. Как определяется удельная энергия изменения формы тела?
- 8. Почему появилось несколько теорий прочности?
- 9. На основе какой гипотезы построена первая теория прочности, как она записывается для объемного и плоского НДС?
- 10.Какая гипотеза лежит в основе второй теории прочности. Какой вид она имеет для объемного и плоского НДС?
- 11.На основе какой гипотезы строится третья теория прочности и какой вид она имеет для объемного и плоского НДС?
- 12.Какая гипотеза использована при построении четвертой теории прочности. Как она записывается для объемного и плоского НДС?
- 13. Для каких материалов рекомендуется каждая теория прочности?

14.Как записывается теория прочности Мора. Для каких материалов она может быть использована?

К разделу 14:

- 1. Какие стержневые конструкции называются фермами, а какие рамами?
- 2. Как определяется степень статической определимости и изменяемости ферм и рам?
- **3.** Какими методами определяются внутренние продольные силы  $N_{ij}$  в статически определимых фермах. Поясните порядок расчетов по этим методам?
- **4.** Как определяются внутренние силовые факторы (ВСФ) в статически определимых рамах? Порядок вычислений?
- 5. Поясните с помощью рисунка теорему Бетти. Дайте ее определение?
- 6. Запишите и поясните формулу Мора?
- 7. В каком виде формула Мора используется для ферм и рам?
- 8. Поясните порядок определения перемещений сечений статически определимых рам?
- 9. Поясните порядок определения перемещения узлов статически определимых ферм?
- 10.Поясните с помощью рисунков способ перемножения эпюр по методу Верещагина?