

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
И ОСНОВ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

*по выполнению контрольных работ по курсу «Сопротивление
материалов» для студентов заочной формы обучения
специальностей 290300, 290600, 290700, 290800, 291000, 291100,
291500, 060800,*

Раздел II

Казань, 2007

Составители: д.ф.-м.н., проф. Бутенко Ю.И., к.ф.-м.н., доцент Гусев С.В.,
к.т.н., доцент Мартышев В.П., к.ф.-м.н., доцент Нефедов В.И.

Под редакцией д.ф.-м.н., проф. Бутенко Ю.И.

УДК 539.3

ББК 22.251

Методические указания по выполнению контрольных работ по курсу
«Сопротивление материалов» для студентов заочной формы обучения /
Каз.гос. арх.-строит. университет; Состав.: Бутенко Ю.И., Гусев С.В.,
Мартышев В.П., Нефедов В.И. Казань, 2007. 32 с.

В методических указаниях изложены: исходные данные,
расчетные схемы, постановка задач, перечень этапов работы и примеры их
выполнения.

Рецензенты:

Д.ф.-м.н., профессор Р.А.Каюмов

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2007.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Контрольные работы №1, №2 выполняются в 5-ом семестре; работы №3, №4 - в 6-ом семестре.

Контрольные работы состоят из следующих задач:

Работа №1 задачи 1.1-1.3. Работа №2 задачи 2.1-2.3.

Работа №3 задачи 3.1-3.2. Работа №4 задачи 4.1-4.3.

Исходные данные для каждой задачи (значения действующих сил, геометрические размеры и т.д.) выбираются из таблиц согласно шифру.

Все столбцы таблиц обозначены внизу начальными буквами русского алфавита (А,Б,В,Г,Д,Е). Из каждого столбца берется то значение, которое соответствует данной букве по шифру.

ШИФР - шестизначное число образуется из первых трех букв фамилии студента и последних трех цифр зачетки. Буквенную часть шифра преобразуют в цифровую согласно таблицы.

Шифр один для всех работ. Указывается на титульном листе каждой работы. Работа без шифра не рассматривается!

1	А	Й	У	Э
2	Б	К	Ф	Ю
3	В	Л	Х	Я
4	Г	М	Ц	
5	Д	Н	Ч	
6	Е	О	Ш	
7	Е	П	Щ	
8	Ж	Р	Ъ	
9	З	С	Ы	
0	И	Т	Ь	

Пример

студент Ибрагимов

зачетка 11-01-105

ИБР 028

Шифр 028105

Каждой цифре шифра ставится в соответствие буква русского алфавита.

0 2 8 1 0 5

А Б В Г Д Е

В таблицах, приведенных для каждой работы, из столбца **А** необходимо взять число, стоящее в десятой строке (0), из столбца **Б** - число, стоящее во второй строке (2), из столбца **В** - число, стоящее в восьмой строке (8) и т.д.

Работы оформляются в отдельной тетради с полями для замечаний рецензента. Обязательно условие задачи с числовыми данными и расчетной схемой. Решение задачи должно сопровождаться краткими пояснениями. В окончательных результатах необходимо указывать единицы измерения всех величин. Вычисления вести в системе СИ.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Задача 3.1. Ломанный стержень расположен в горизонтальной плоскости. Углы в местах соединения стержней прямые. Все стержни длины L .

Требуется: 1) записать аналитические выражения внутренних силовых факторов (ВСФ) по участкам, вычислить их значения в характерных точках и построить эпюры; 2) установить тип сложного сопротивления и записать значения ВСФ в опасном сечении на каждом участке; 3) на одном участке, испытывающем косой изгиб, подобрать двутавр и размеры прямоугольного сечения при соотношении сторон $h/b = 2$. Для двутавра и прямоугольного сечения построить нейтральные линии и указать опасные точки сечения; 4) на одном участке, испытывающем косой изгиб с кручением подобрать круглое и кольцевое сечения при соотношении радиусов $R/r = D/d = \alpha$ по четвертой теории прочности; 5) в пунктах 3) и 4) сравнить экономичность подобранных сечений по весу. Схему ломанного стержня взять из рис.3.1, числовые данные взять из таблицы 3.1, $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$.

Задача 3.2. Чугунный короткий стержень сжимается продольной силой F приложенной в точке P .

Требуется: 1) построить нулевую линию, определить опасные точки в сечении и вычислить в них напряжения, выразив их через силу F ; 2) отыскать допустимую силу $[F]$, если допустимые напряжения при сжатии $[\sigma]_{сж} = 12 \text{ кН/см}^2$, при растяжении $[\sigma]_p = 3 \text{ кН/см}^2$. Схему сечения взять из рис.3.2, числовые данные взять из таблицы 3.1.

Таблица 3.1.

Номер строки	Схема	F (кН)	L (м)	q (кН/м)	b (м)	α
1	I	1,0	1,1	2,0	0,10	1,22
2	II	2,5	1,2	1,9	0,12	1,24
3	III	3,0	1,3	1,8	0,14	1,26
4	IV	3,5	1,4	1,7	0,16	1,28
5	V	4,0	1,5	1,6	0,18	1,30
6	VI	4,5	1,6	1,5	0,20	1,32
7	VII	5,0	1,7	1,4	0,22	1,34
8	VIII	5,5	1,8	1,3	0,24	1,36
9	IX	6,0	1,9	1,2	0,26	1,38
0	X	6,5	2,0	1,1	0,28	1,40
	A	B	A	B	B	Г

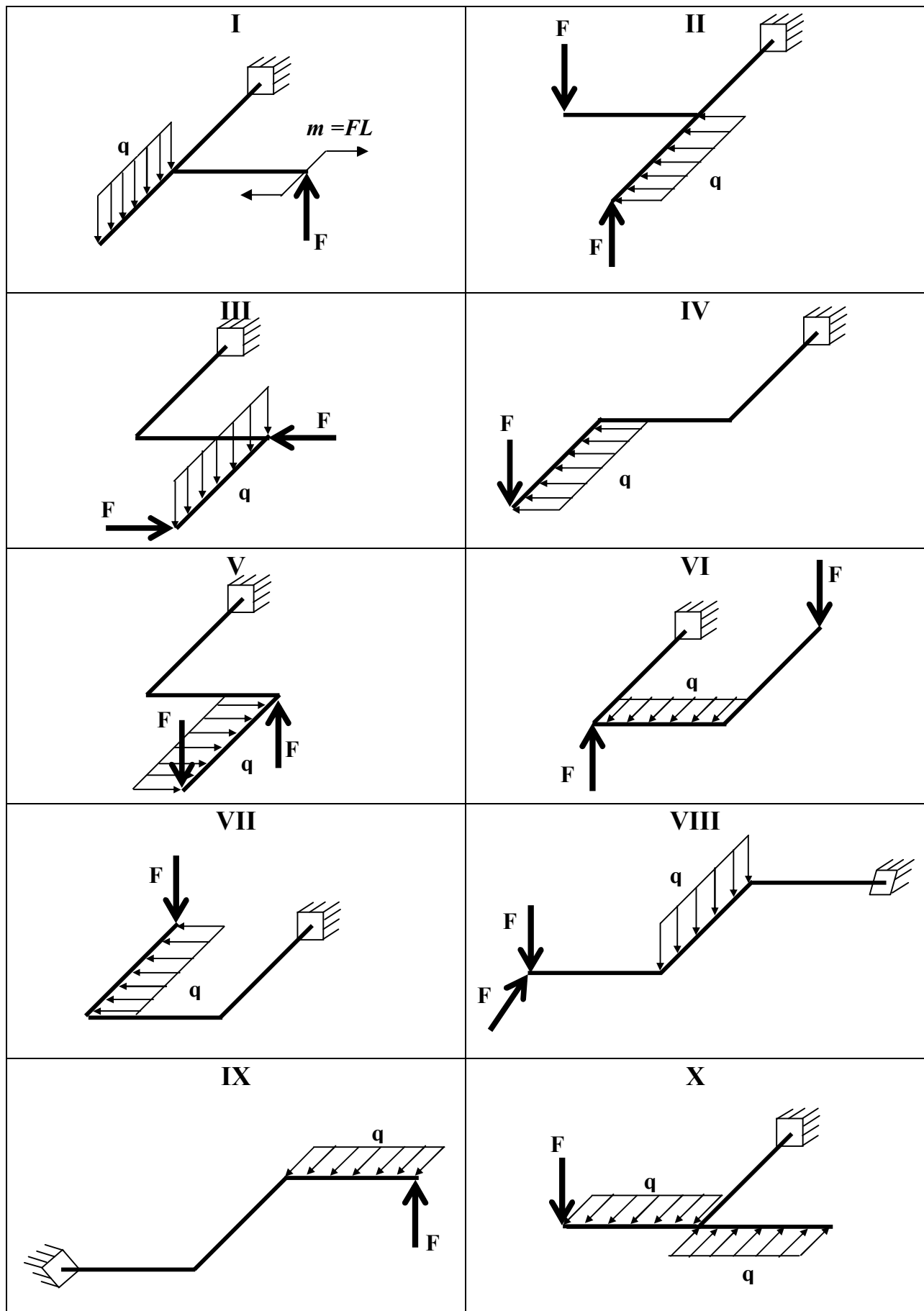


Рис.3.1

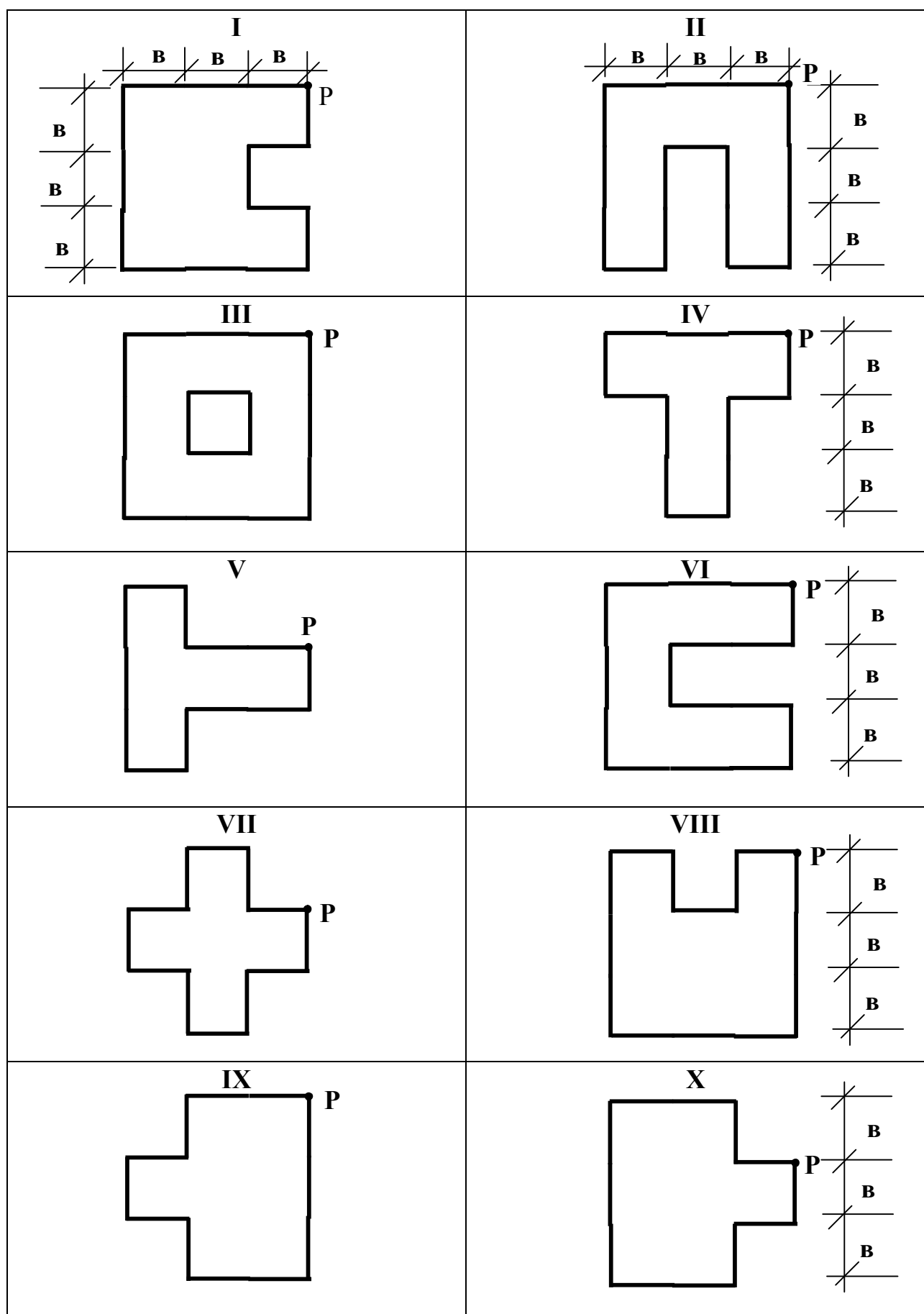


Рис.3.2

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Задача 4.1. Для заданных по шифру условий закрепления колонны, формы поперечного сечения, высоты колонны L и сжимающей силы F (табл.4.1) необходимо: 1) подобрать номер стандартных профилей из условия устойчивости колонны. Расчет выполнить методом последовательных приближений по коэффициенту φ ; 2) определить расстояние β из условия равноустойчивости колонны относительно главных центральных осей поперечного сечения колонны; 3) найти расстояние b между планками по высоте колонны из условия местной устойчивости каждого отдельного профиля между планками. Принять $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$.

Задача 4.2. На стальной стержень ступенчатого переменного сечения с высоты H падает груз весом Q . Не учитывая собственный вес стержня, определить перемещение сечения I-I после падения груза, а также наибольшее (растягивающее или сжимающее) напряжение в стержне. Данные взять из табл.4.2. Принять $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

Задача 4.3. На шарнирно опертую или защемленную одним концом двутавровую балку падает груз F с высоты h .

Требуется:

1. Найти максимальное нормальное напряжение в балке и указать сечение, в котором оно возникает.
 2. Определить перемещения в точке падения груза K_1 и в точке K_2 .
- Данные взять из таблицы 4.3.

Таблица 4.1

Номер строки	Форма сечения	Закрепление концов	F [кН]	L [м]	Формы поперечного сечения колонны
1	I		600	4.0	<div style="display: flex; flex-wrap: wrap;"> <div style="width: 50%;"> <p>I</p> </div> <div style="width: 50%;"> <p>II</p> </div> <div style="width: 50%;"> <p>III</p> </div> <div style="width: 50%;"> <p>IV</p> </div> <div style="width: 50%;"> <p>V</p> </div> </div> <p style="text-align: right;">a = 10 см</p>
2	II		550	4.1	
3	III		500	4.2	
4	IV		520	4.3	
5	V		570	4.4	
6	I		540	4.5	
7	II		510	4.6	
8	III		560	4.7	
9	IV		490	4.8	
0	V		530	4.9	
	В	Г	Д	Е	

Таблица 4.2

№ строки	Схема	A [см ²]	a [м]	b [м]	c [м]	H [м]	Q [кН]
1	I	10	0.7	0.8	0.9	0.2	0.5
2	II	11	0.75	0.9	0.95	0.25	0.55
3	III	12	0.8	1	1	0.3	0.6
4	IV	13	0.85	1.1	1.05	0.35	0.65
5	V	14	0.9	1.2	1.1	0.4	0.7
6	VI	15	0.95	1.3	1.15	0.45	0.75
7	VII	16	1	1.4	1.2	0.5	0.8
8	VIII	17	1.05	1.5	1.25	0.55	0.85
9	IX	18	1.1	1.6	1.3	0.6	0.9
10	X	19	1.15	1.7	1.35	0.65	0.95
	Б	В	Г	Б	В	Г	Б

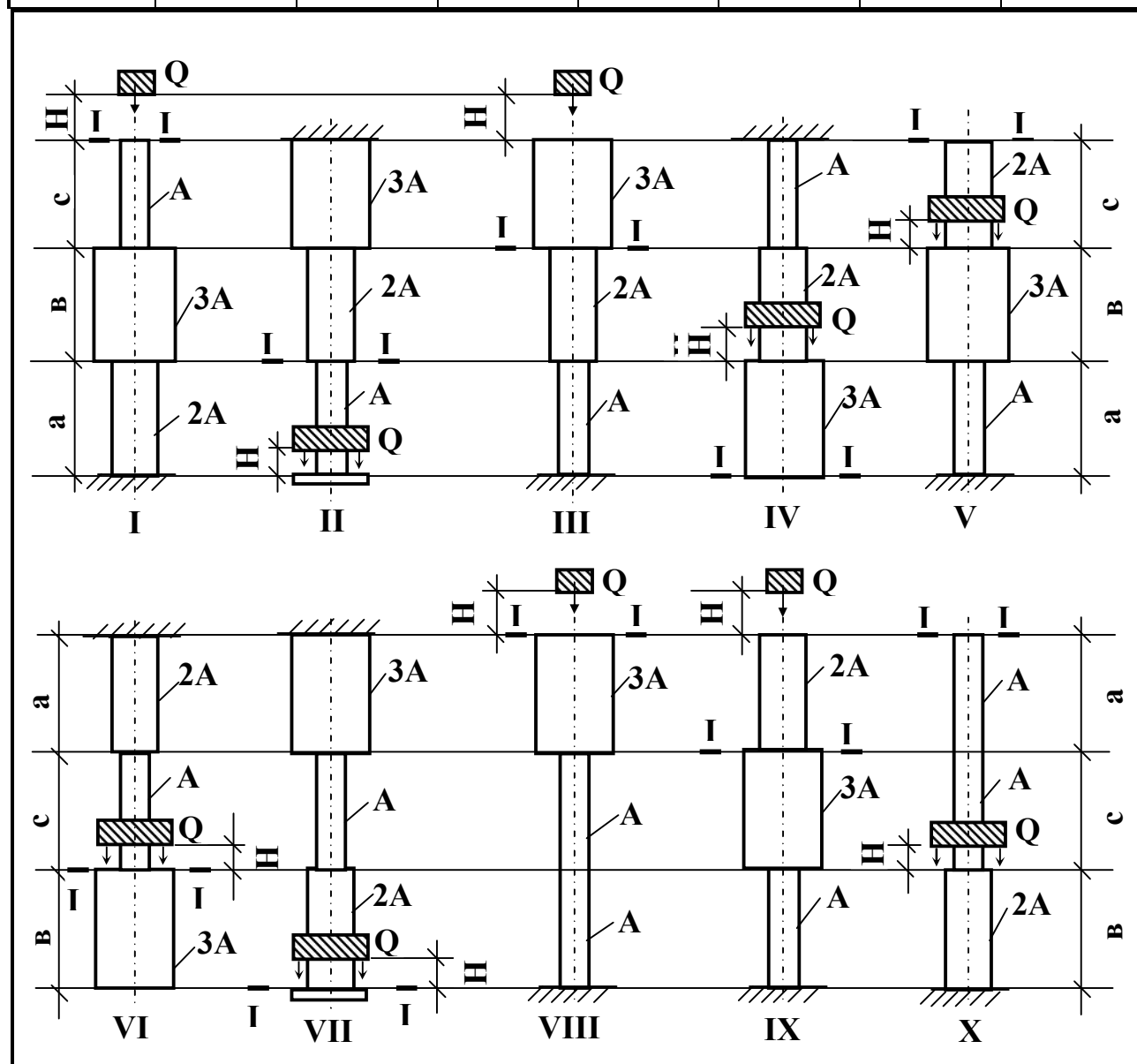
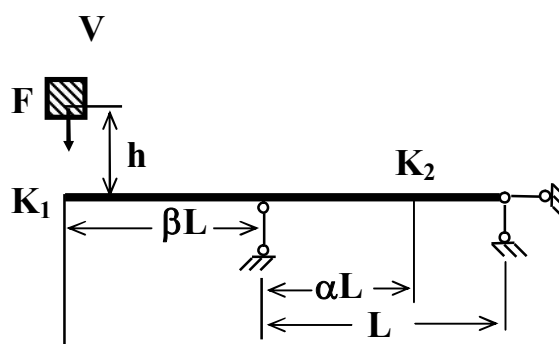
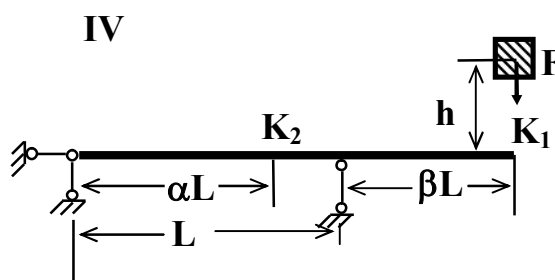
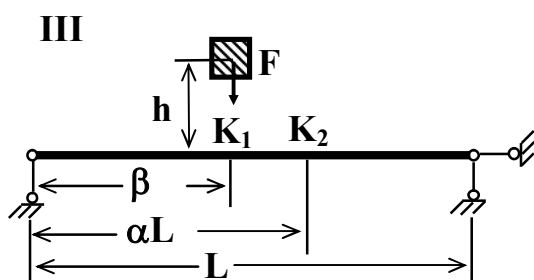
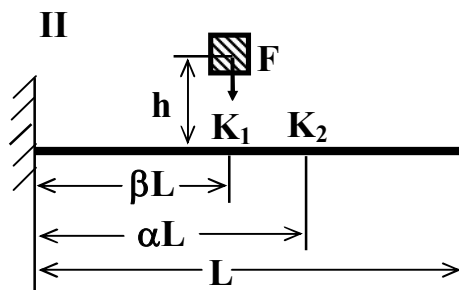
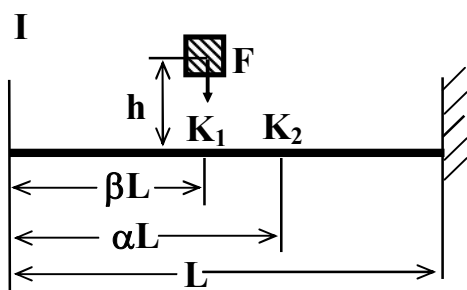


Таблица 4.3

№ строки	Схема по рисунку	№ двутавра	L [м]	α	β	F [кН]	h [м]
1	I	20	1.8	0.75	0.25	7.5	0.01
2	II	20 а	1.9	0.70	0.30	7.0	0.02
3	III	24	2.0	0.65	0.35	6.5	0.03
4	IV	24 а	2.1	0.60	0.40	6.0	0.04
5	V	27	2.2	0.55	0.45	5.5	0.05
6	I	27 а	2.3	0.50	0.50	5.0	0.06
7	II	30	2.4	0.45	0.55	4.5	0.07
8	III	30 а	2.5	0.40	0.60	4.0	0.08
9	IV	33	2.6	0.35	0.65	3.5	0.09
0	V	36	2.7	0.30	0.70	3.0	0.10
	Б	А	В	Г	Д	Б	А



ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 3.1

Ломанный стержень расположен в горизонтальной плоскости (рис.1). Углы в местах соединения стержней прямые. Все стержни длины L .

Требуется:

1) Записать аналитические выражения внутренних силовых факторов (ВСФ) по участкам, вычислить их значения в характерных точках и построить эпюры.

2) Установить тип сложного сопротивления и записать значения ВСФ в опасном сечении на каждом участке.

3) На одном участке, испытывающем косой изгиб, подобрать двутавр и размеры прямоугольного сечения при соотношении сторон $h/b = 2$. Для двутавра и прямоугольного сечения построить нейтральные линии и указать опасные точки сечения.

4) На одном участке, испытывающем косой изгиб с кручением, подобрать круглое и кольцевое сечения при соотношении радиусов $R/r = D/d = \alpha$ по четвертой теории прочности.

5) В пунктах 3) и 4) сравнить экономичность подобранных сечений по весу. Схема на рис.1.

Исходные данные: $F = 1$ кН, $q = 2$ кН/м, $L = 2$ м, $[\sigma] = 16$ кН/см².

РЕШЕНИЕ

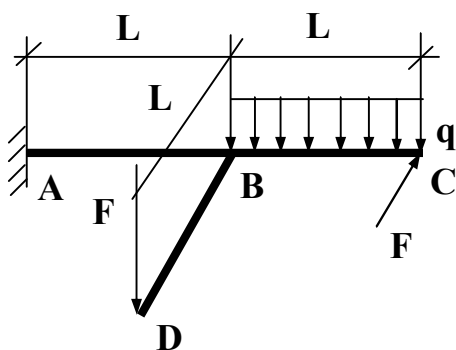


Рис.1

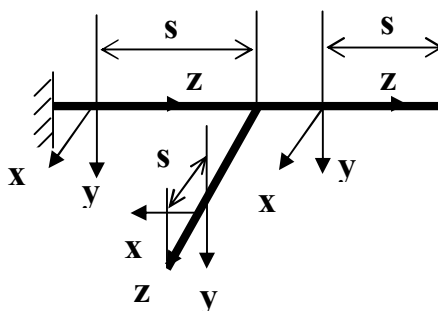


Рис.2

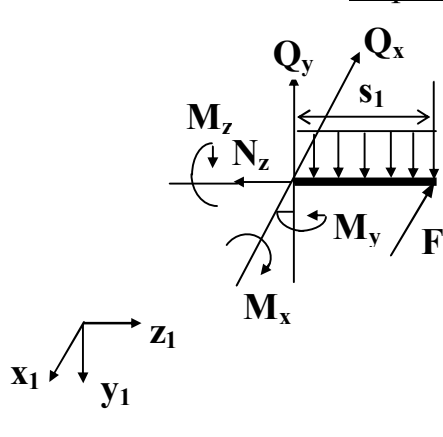
Примечание: Чтобы не находить реакции опор в заделке будем, в дальнейшем, рассматривать равновесие правых отсеченных частей. С каждым участком свяжем правую систему координат $X_i Y_i Z_i$, где ось Z_i направлена вдоль оси стержня. Начало координат выбираем в т.А (рис.1). На

остальных участках направление осей получается перемещением без вращения вокруг оси Z_i исходной тройки векторов по оси ломанного стержня (рис.2). За первый участок можно принять любой отрезок ломанного стержня, однако для удобства возьмем правый участок ВС, как простейший. Используя метод сечений из уравнений равновесия для правой отсеченной части получим выражения ВСФ для каждого участка (правила знаков смотри в задании 2.2). Для удобства записи аналитических выражений ВСФ примем s_i за координату произвольного сечения на i -ом участке.

Внимание. Эпюры ВСФ от отдельно взятой силы должны лежать в плоскости действия этой силы.

1. Запишем аналитические выражения для ВСФ по участкам

Первый участок (ВС) $0 \leq s_1 \leq L = 2 \text{ м}$



$$\begin{aligned}
 \sum_x F_i &= 0 & -Q_x - F &= 0 \\
 \sum_y F_i &= 0 & -Q_y + qs_1 &= 0 \\
 \sum_z F_i &= 0 & -N_z &= 0 \\
 \sum_x M(F_i) &= 0 & -M_x - \frac{qs_1^2}{2} &= 0 \\
 \sum_y M(F_i) &= 0 & -M_y - Fs_1 &= 0 \\
 \sum_z M(F_i) &= 0 & -M_z &= 0
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{aligned} Q_x &= -F \\ Q_y &= qs_1 \\ N_z &= 0 \\ M_x &= -\frac{1}{2}qs_1^2 \\ M_y &= -Fs_1 \\ M_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

Вычислим значения на концах участка

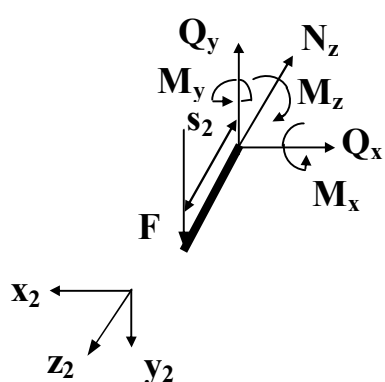
При $s_1 = 0$

при $s_1 = L = 2 \text{ м}$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_x &= -F = -1 \text{ кН} \\ Q_y &= 0 \\ N_z &= 0 \\ M_x &= 0 \\ M_y &= 0 \\ M_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_x &= -F = -1 \text{ кН} \\ Q_y &= 4 \text{ кН} \\ N_z &= 0 \\ M_x &= -4 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_y &= -2 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

Второй участок (BD) $0 \leq s_2 \leq L = 2 \text{ м}$



При $s_2 = 0$

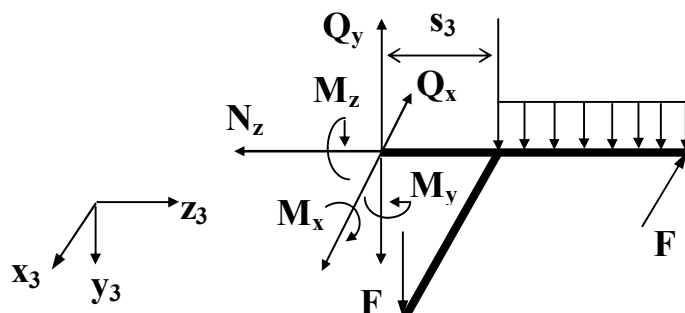
$$\begin{cases} Q_x = 0 \\ Q_y = F = 1 \text{ кН} \\ N_z = 0 \\ M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_x F_i &= 0 & Q_x &= 0 \\ \sum_y F_i &= 0 & -Q_y + F &= 0 \\ \sum_z F_i &= 0 & N_z &= 0 \\ \sum_x M(F_i) &= 0 & -M_x - Fs_2 &= 0 \\ \sum_y M(F_i) &= 0 & M_y &= 0 \\ \sum_z M(F_i) &= 0 & -M_z &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} Q_x = 0 \\ Q_y = F \\ N_z = 0 \\ M_x = -Fs_2 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

при $s_2 = L = 2 \text{ м}$

$$\begin{cases} Q_x = 0 \\ Q_y = F = 1 \text{ кН} \\ N_z = 0 \\ M_x = -2 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

Третий участок (AB) $0 \leq s_3 \leq L = 2 \text{ м}$



$$\begin{aligned} \sum_x F_i &= 0 & -Q_x - F &= 0 \\ \sum_y F_i &= 0 & -Q_y + qL + F &= 0 \\ \sum_z F_i &= 0 & N_z &= 0 \\ \sum_x M(F_i) &= 0 & -M_x - Fs_3 - qL(s_3 + \frac{1}{2}L) &= 0 \\ \sum_y M(F_i) &= 0 & -M_y - F(L + s_3) &= 0 \\ \sum_z M(F_i) &= 0 & -M_z - FL &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} Q_x = -F \\ Q_y = F + qL \\ N_z = 0 \\ M_x = -Fs_3 - qL(s_3 + \frac{1}{2}L) \\ M_y = -F(L + s_3) \\ M_z = FL \end{cases}$$

При $s_3 = 0$

$$\begin{cases} Q_x = -1 \text{ кН} \\ Q_y = 5 \text{ кН} \\ N_z = 0 \\ M_x = -4 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_y = -2 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_z = 2 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{cases}$$

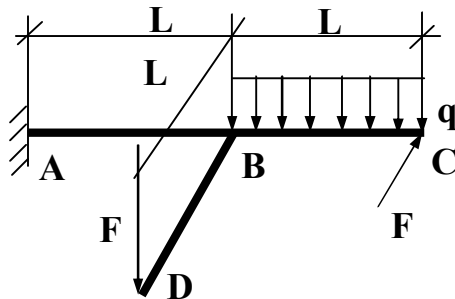
при $s_3 = L = 2 \text{ м}$

$$\begin{cases} Q_x = -1 \text{ кН} \\ Q_y = 5 \text{ кН} \\ N_z = 0 \\ M_x = -14 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_y = -4 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_z = 2 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{cases}$$

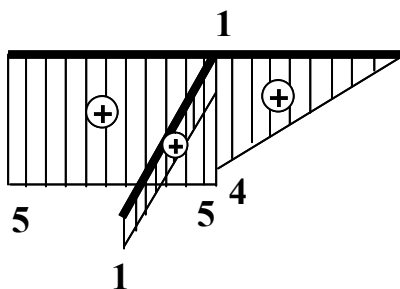
Построим эпюры ВСФ (рис.3).

При построении эпюр ВСФ положительные значения перерезывающих сил (Q_x, Q_y) и изгибающих моментов (M_x, M_y) откладываются вдоль положительных направлений соответствующих осей. Это соответствует правилу, что изгибающие моменты строятся со стороны растянутых волокон в плоскости действия момента. Эпюры продольных усилий N_z и крутящего момента M_z строятся в произвольной плоскости (например, в плоскости XOZ) с указанием знака.

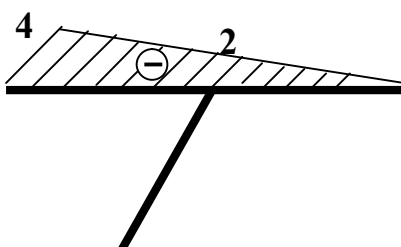
Исходная расчетная схема



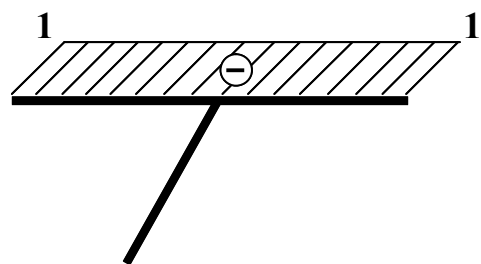
Эпюра Q_y [кН]



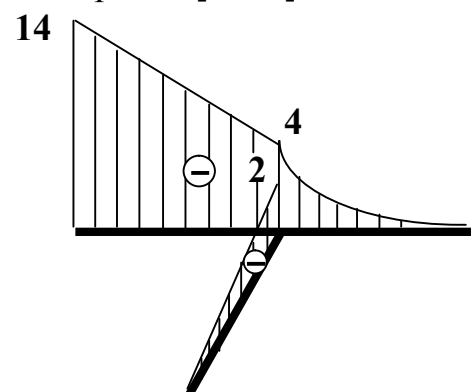
Эпюра M_y [кН·м]



Эпюра Q_x [кН]



Эпюра M_x [кН·м]



Эпюра M_z [кН·м]

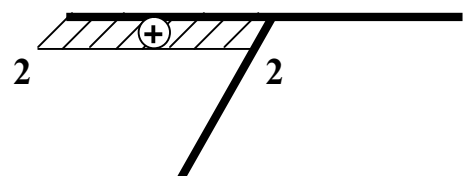


Рис.3

2. Соберем максимальные значения ВСФ по участкам в таблицу

Участок АВ	Участок ВС	Участок BD
$Q_x = -1 \text{ кН}$ $Q_y = 5 \text{ кН}$ $M_x = -14 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $M_y = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $M_z = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$	$Q_x = -1 \text{ кН}$ $Q_y = 4 \text{ кН}$ $M_x = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $M_y = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}$	$Q_y = 1 \text{ кН}$ $M_x = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}$

На участке АВ кривой изгиб с кручением, опасное сечение в точке А. Расчетное значение ВСФ:

$$M_x = -14 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_y = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_z = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

На участке ВС кривой изгиб, опасное сечение в точке В. Расчетные значения ВСФ

$$M_x = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_y = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

На участке BD плоский изгиб, опасное сечение в точке С. Расчетное значение ВСФ

$$M_x = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Примечание: Если M_x , M_y , $N_z \neq 0$, то на участке кривой изгиб с растяжением или сжатием, если M_x , M_y , M_z , $N_z \neq 0$, то общий случай деформированного состояния.

3. На участке ВС кривой изгиб. Подберем размеры прямоугольного сечения и номер двутавра. Расчетные значения:

$$M_x = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_y = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Поскольку $|M_x| > |M_y|$, то располагаем сечение вертикально.

Примечание: Если $|M_x| < |M_y|$, то – горизонтально. В этом случае в расчетах индексы x и y поменяются местами.

а) Подберем двутавр

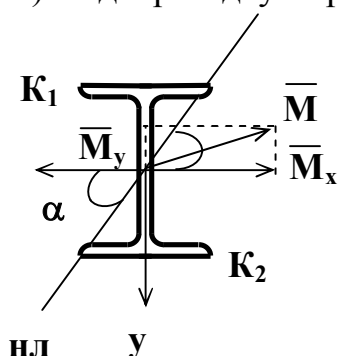


Рис.4

Условие прочности:

$$\sigma_{z, \max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]$$

Из сортамента видно, что

$$\frac{W_x}{W_y} \approx 8 \div 12. \quad \text{Примем} \quad \frac{W_x}{W_y} = 10, \quad \text{тогда из}$$

условия прочности:

$$W_x \geq \frac{|M_x| + 10|M_y|}{[\sigma]} = \frac{(4 + 10 \cdot 2)100}{16} = 150 \text{ см}^3.$$

Ближайшее значение к W_x имеет двутавр № 18а: $W_x = 159 \text{ см}^3$, $W_y = 22,8 \text{ см}^3$.

Примечание: поскольку отношение $\frac{W_x}{W_y} = 10$ приблизительно, то необходима проверка.

$$\text{Проверка: } \sigma_{z,\max} = \frac{400}{159} + \frac{200}{22,8} = 11,28 \text{ кН/см}^2 < [\sigma].$$

$$\delta = \frac{[\sigma] - \sigma_z}{[\sigma]} 100\% = 29,4\%. \text{ Недогрузка } \delta \text{ велика.}$$

Проверим двутавр № 18: $W_x = 143 \text{ см}^3$, $W_y = 18,4 \text{ см}^3$.

$$\sigma_{z,\max} = \frac{400}{143} + \frac{200}{18,4} = 13,7 \text{ кН/см}^2 < [\sigma]. \text{ Недогрузка } \delta = 14,6\%.$$

Проверим двутавр № 16: $W_x = 109 \text{ см}^3$, $W_y = 14,5 \text{ см}^3$.

$$\sigma_{z,\max} = \frac{400}{109} + \frac{200}{14,5} = 17,5 \text{ кН/см}^2 > [\sigma].$$

Перегрузка $\delta = 9,98\% > 5\%$. Перегрузка δ недопустима.

Окончательно принимаем двутавр №18, $A_{\text{дв}} = 23,4 \text{ см}^2$, $J_x = 1290 \text{ см}^4$, $J_y = 82,6 \text{ см}^4$.

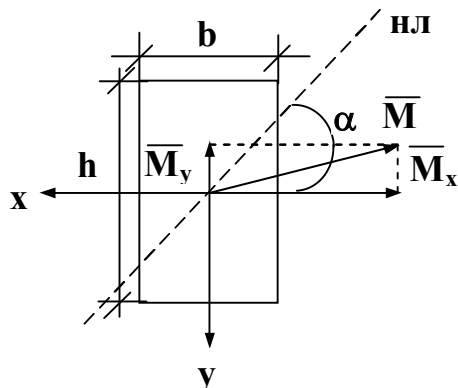
Примечание: Положение нейтральной линии (НЛ) определяется из условия $\sigma_z = 0$, то есть $\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0$. В случае косого изгиба НЛ проходит через центр тяжести сечения. Угол наклона НЛ к оси ОХ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y J_x}{M_x J_y} = \frac{2 \cdot 1290}{4 \cdot 82,6} = 7,81, \alpha = \operatorname{arctg} 7,81 = 82,7^\circ.$$

Удобно для определения положения нейтральной линии использовать векторное изображение моментов, так как нейтральная линия расположена между результирующим вектор-моментом и осью с наименьшим моментом инерции.

Максимальные напряжения возникают в точках K_1 и K_2 , наиболее удаленных от НЛ (рис.4).

б) Подберем размеры прямоугольного сечения $h/b = 2$.



Условие прочности:

$$\sigma_{z,\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma].$$

Для прямоугольного сечения:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b^2)}{6} = 0,667b^3, \frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b} = 2,$$

$$W_x \geq \frac{2|M_x| + |M_y|}{[\sigma]} = \frac{(2 \cdot 2 + 4)100}{16} = 50 \text{ см}^3, \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,667}} = \sqrt[3]{74,79} = 4,22 \text{ см},$$

$$h = 8,44 \text{ см}, \quad A_{\text{прям}} = bh = 35,5 \text{ см}^2.$$

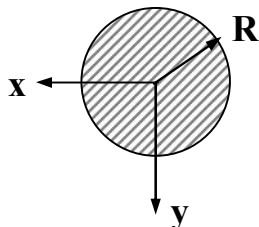
$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{4,22 \cdot 8,44^3}{12} = 211,4 \text{ см}^4, \quad J_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{4,22^3 \cdot 8,44}{12} = 52,86 \text{ см}^4,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y J_x}{M_x J_y} = \frac{2 \cdot 211,4}{4 \cdot 52,86} \approx 2, \quad \alpha = 63^\circ 30'.$$

4. На участке АВ кривой изгиб с кручением. Подберем круглое и кольцевое сечение.

Расчетные значения $M_x = -14 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_y = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_z = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

а) Подберем диаметр вала.



Условие прочности:

$$\sigma_{z, \max} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Эквивалентный момент определяем по 4-ой теории прочности:

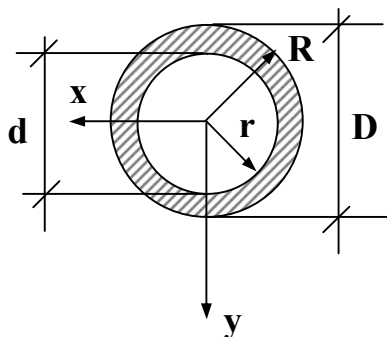
$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75 M_z^2} = \sqrt{14^2 + 4^2 + 0,75 \cdot 2^2} = 14,66 \text{ кН}\cdot\text{м} = 1466 \text{ кН}\cdot\text{см}$$

$$\text{Для круглого сечения: } W_x = \frac{\pi d^3}{32}, \quad W_x \geq \frac{M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{[\sigma]} = \frac{1466}{16} = 91,625 \text{ см}^3.$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 91,625}{3,14}} = 9,77 \text{ см} = 97,7 \text{ мм}$$

$$\text{После округления } d = 100 \text{ мм}, \quad A_{\text{вала}} = \frac{\pi d^2}{4} = 78,5 \text{ см}^2.$$

б) Подберем размер кольцевого сечения $\frac{D}{d} = 1,2$.



Из условия прочности:

$$W_x \geq 91,625 \text{ см}^3.$$

Для кольца $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$, где $y_{\max} = \frac{D}{2}$, $J_x = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \frac{1}{\alpha^4})$,

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \frac{1}{\alpha^4}) = \frac{\pi D^3}{32} (1 - 0,482) = 0,0508 D^3$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,0508}} = \sqrt[3]{\frac{91,625}{0,0508}} = \sqrt[3]{1804} = 12,16 \text{ см},$$

$$d = \alpha_1 D = \frac{5}{6} 12,16 = 10,13 \text{ см}.$$

Площадь кольца: $A_{\text{кольца}} = \pi R^2 - \pi r^2 = 116,07 - 80,55 = 35,52 \text{ см}^2$.

5. Сравним площади подобранных сечений:

на участке АВ $\frac{A_{\text{кольца}}}{A_{\text{круга}}} = \frac{35,52}{78,5} = 0,452$;

на участке ВС $\frac{A_{\text{дв}}}{A_{\text{прям}}} = \frac{23,4}{35,5} = 0,659$.

Вывод: Двутавровое сечение экономичнее чем прямоугольное, а кольцевое – круглого.

ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 3.2

Чугунный короткий стержень сжимается продольной силой F приложенной в точке P . Поперечное сечение стержня изображено на рис.1.

Требуется:

1) построить нулевую линию, определить опасные точки в сечении и вычислить в них напряжения, выразив их через силу F ;

2) отыскать допустимую силу $[F]$, если допустимые напряжения при сжатии $[\sigma]_{сж} = 12 \text{ кН/см}^2$, при растяжении $[\sigma]_p = 3 \text{ кН/см}^2$.

Исходные данные $b = 10 \text{ см}$.

РЕШЕНИЕ

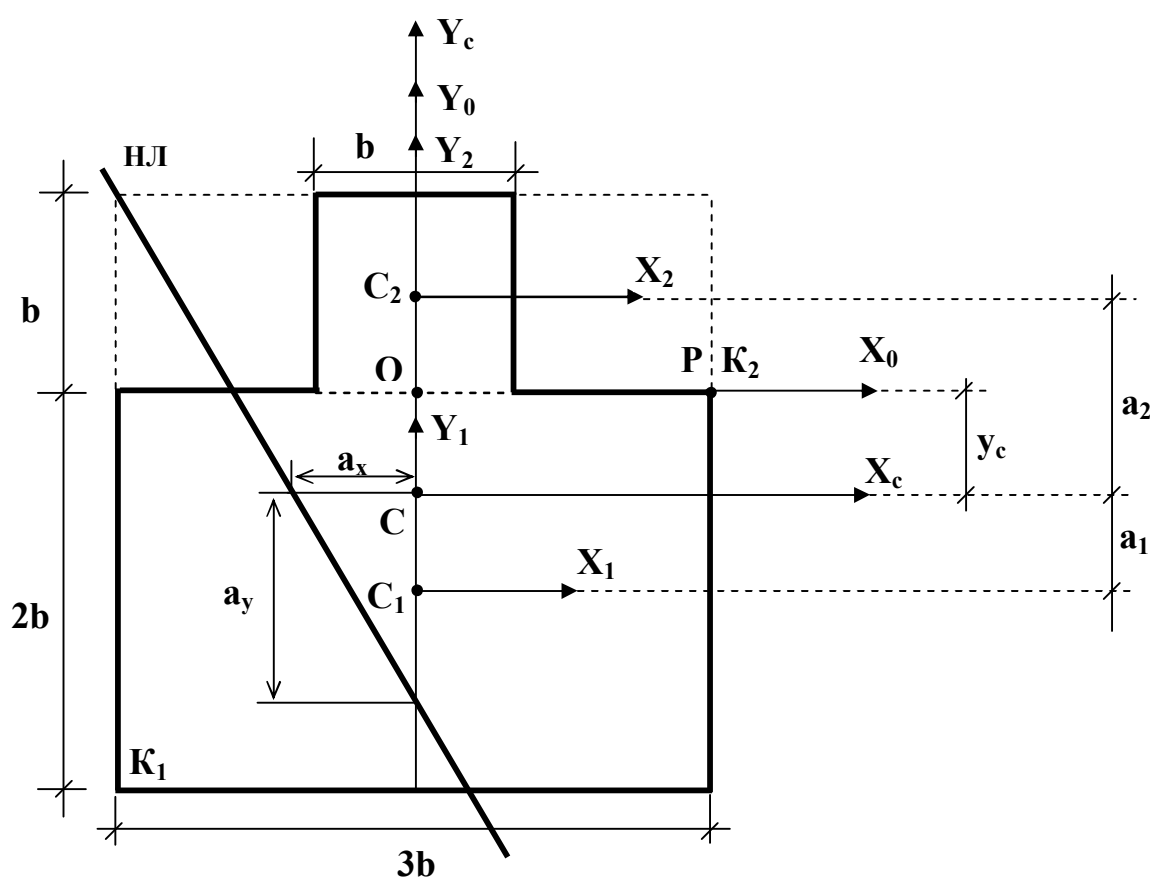


Рис.1

Сечение состоит из двух фигур. Определим их геометрические характеристики.

Фигура 1 – прямоугольник $b_1 \times h_1$.

$$b_1 = 3b = 30 \text{ см}, \quad h_1 = 2b = 20 \text{ см}, \quad A_1 = b_1 h_1 = 20 \cdot 30 = 600 \text{ см}^2$$

$$J_{x1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{30 \cdot 20^3}{12} = 20000 \text{ см}^4, \quad J_{y1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45000 \text{ см}^4$$

Фигура 2 – квадрат $b \times b$.

$$A_1 = b^2 = 10^2 = 100 \text{ см}^2, J_{x2} = J_{y2} = \frac{b^4}{12} = \frac{10^4}{12} = 833 \text{ см}^4$$

Введем произвольную систему координат $Y_0 O X_0$ и определим в ней координаты центров тяжести фигур:

$$y_{c1} = -b = -10 \text{ см}, y_{c2} = \frac{b}{2} = 5 \text{ см}, x_{c1} = x_{c2} = 0.$$

Указание: Одну из осей координат совместить с осью симметрии. В этом случае одна из координат центра тяжести будет равна нулю.

Определим координаты центра тяжести сечения.

$$Y_c = \frac{y_{c1}A_1 + y_{c2}A_2}{A} = \frac{(-10) \cdot 600 + 5 \cdot 100}{700} = -7,86 \text{ см}, X_c = 0.$$

$$A = A_1 + A_2 = 600 + 100 = 700 \text{ см}^2.$$

Находим во вспомогательной системе координат положение центра тяжести сечения (точка С) и вводим систему координат $X_c C Y_c$.

Определим расстояние a_1 между осями X_1, X_c и a_2 между X_2, X_c .

$$a_1 = |y_c - y_{c1}| = 2,14 \text{ см}, a_2 = |y_c - y_{c2}| = 12,86 \text{ см}.$$

Для отыскания моментов инерции относительно главных центральных осей J_{xc}, J_{yc} используем формулу изменения момента инерции при параллельном переносе осей:

$$J_{xc} = J_{x1} + A_1 a_1^2 + J_{x2} + A_2 a_2^2 = 20000 + 600 \cdot 2,14^2 + 833,3 + 100 \cdot 12,86^2 = 40119 \text{ см}^4,$$

$$J_{yc} = J_{y1} + J_{y2} = 45000 + 833,3 = 45833,3 \text{ см}^4$$

$$\begin{cases} i_{xc}^2 = \frac{J_{xc}}{A} = 57,31 \text{ см}^2 \\ i_{yc}^2 = \frac{J_{yc}}{A} = 65,48 \text{ см}^2 \end{cases}$$

Примечание: Поскольку продольная сила F приложена не в центре тяжести поперечного сечения, то распределение нормальных напряжений не является равномерным и вычисляется по формуле

$$\sigma_z(x, y) = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{Y_F}{i_{xc}^2} y + \frac{X_F}{i_{yc}^2} x \right), \quad \sigma_z(x, y) = -F \left(\frac{1}{A} + \frac{Y_F y}{J_{xc}} + \frac{X_F x}{J_{yc}} \right) \quad (1)$$

где X_F, Y_F – координата точки P приложения силы F . Положение нулевой линии (НЛ), то есть линии в поперечном сечении вдоль которой напряжение σ_z равно нулю, можно получить, приравняв σ_z нулю в формуле (1).

Определим координаты точки P приложения силы F относительно главных центральных осей: $X_F = |OK_2| = 15 \text{ см}, Y_F = |OC| = 7,86 \text{ см}$. Построим

нулевую линию по двум точкам:

$$x_1 = 0, a_y = -\frac{i_{xc}^2}{Y_F} = -\frac{57,31}{7,86} = -7,29 \text{ см},$$

При

$$y_2 = 0, a_x = -\frac{i_{yc}^2}{X_F} = -\frac{65,48}{15} = -4,37 \text{ см}.$$

Проводим через полученные точки нулевую линию, отыскиваем наиболее удаленные от нее точки сечения K_1 и K_2 (рис.1).

Примечание: Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нулевой линии.

$$\begin{cases} X_{K1} = -1,5b = -15 \text{ см} \\ Y_{K1} = (-2b - |OC|) = -12,14 \text{ см} \end{cases} \quad \begin{cases} X_{K2} = 1,5b = 15 \text{ см} \\ Y_{K2} = |OC| = 7,86 \text{ см} \end{cases}$$

Напряжения в точках K_1, K_2 определяются по формуле (1):

$$\sigma_z(x_{K1}, y_{K1}) = -F \left(\frac{1}{700} + \frac{7,86(-12,14)}{40119} + \frac{15(-15)}{45833} \right) = 0,00586 F \text{ см}^{-2},$$

$$\sigma_z(x_{K2}, y_{K2}) = -F \left(\frac{1}{700} + \frac{7,86 \cdot 7,86}{40119} + \frac{15 \cdot 15}{45833} \right) = -0,00788 F \text{ см}^{-2}.$$

Примечание: Для хрупких материалов предел прочности при растяжении и сжатии существенно отличаются, поэтому для отыскания допустимой силы $[F]$ необходимо выполнить условие прочности для напряжений растяжения и сжатия

$$\begin{cases} (\sigma_z)_{\max} \leq [\sigma]_p = 3 \text{ кН/см}^2 \\ |(\sigma_z)_{\max}| \leq [\sigma]_{сж} = 12 \text{ кН/см}^2 \end{cases} \quad (2)$$

Из условия прочности (2) определяем допустимую силу $[F]$. В точке K_1 напряжения растяжения

$$(\sigma_z)_{\max} = 0,00586 [F]_p \leq [\sigma]_p = 3 \text{ кН/см}^2$$

$$[F]_p \leq \frac{3}{0,00586} = 512 \text{ кН}.$$

В точке K_2 имеют место сжимающие напряжения:

$$|(\sigma_z)_{\max}| = 0,00788 [F]_{сж} \leq [\sigma]_{сж} = 12 \text{ кН/см}^2$$

$$[F]_{сж} \leq \frac{12}{0,00788} = 1523 \text{ кН}.$$

Выбираем меньшую из двух нагрузок $[F]_p, [F]_{сж}$:

$$[F] = \min([F]_p, [F]_{сж}) = 512 \text{ кН}$$

Ответ $[F] = 512 \text{ кН}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 4.1

Проектирование колонны включает три обязательных этапа:

а) подбор номера стандартных профилей, обеспечивающих прочность и устойчивость колонны из них. Расчет выполняется методом последовательных приближений по коэффициенту φ ;

б) обеспечение равноустойчивости колонны относительно главных центральных осей поперечного сечения колонны соответствующим расположением профилей в колонне (т.е. определение расстояния β для сечений I-IV);

в) отдельные стандартные профили надо объединить в колонну с помощью поперечных планок или решетки, исключив при этом возможность потери устойчивости каждого отдельного профиля между планками. Это достигается выбором расстояния « b » между планками по высоте колонны (см.рис.2).

Исходные данные примера:

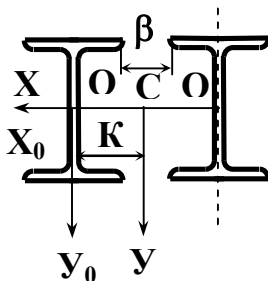
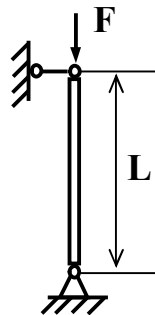


Рис.1



$F = 550 \text{ кН}$, $L = 5 \text{ м}$,

$[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$ (Сталь 3)

Условия закрепления колонны (оба конца – шарниры) дают

$\mu_x = \mu_y = \mu = 1$.

Момент инерции сечения относительно оси y

$$J_y = 2 \left[J_{y0} + \left(\frac{b}{2} + \frac{\beta}{2} \right)^2 A \right].$$

В исходных данных размер « β » не задан, следовательно, увеличивая β , увеличиваем J_y сечения, т.к. $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$ – тоже растет. Гибкость сечения

относительно оси y $\lambda_y = \mu \frac{L}{i_y}$ при этом уменьшается. А $\lambda_x = \mu \frac{L}{i_x}$ не зависит

от размера β . Поэтому, увеличивая β , всегда можно добиться, чтобы $\lambda_x \geq \lambda_y$, а это значит, что возможный продольный изгиб колонны будет относительно оси x . Примем условие равноустойчивости колонны, т.е. $\lambda_x = \lambda_y$, из которого ниже и определим необходимое расстояние β .

Примечание: Аналогичные рассуждения справедливы для сечений I-IV (см. табл. 4.1). Для сечения V, ввиду его квадратной формы (размер $a = 10$ см – задан), условие равноустойчивости очевидно. Следовательно, для всех I-V сечений колонны расчет надо вести на продольный изгиб относительно оси x .

а) для подбора номера стандартных профилей (в нашем примере – двутавр) условие устойчивости колонны можно записать так:

$$\sigma_{\text{факт}} \leq \frac{F}{A} = \varphi[\sigma], \text{ откуда } A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}$$

Первое приближение. Задаем $\varphi_0 = 0,5$. Найдем суммарную площадь сечения колонны

$$A_1^0 \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{550}{0,5 \cdot 16} = 68,75 \text{ см}^2.$$

$$\text{Площадь сечения одного двутавра } A_1 = \frac{A_1^0}{n} = \frac{68,75}{2} = 34,4 \text{ см}^2.$$

Здесь $n = 2$ число двутавров в колонне. По таблице ГОСТа ближайший двутавр № 24 ($A_1^T = 34,8 \text{ см}^2, i_x^T = 9,97 \text{ см}$).

Подсчитываем гибкость колонны относительно оси X .

$$\lambda_x^{(1)} = \frac{\mu L}{i_x^T} = \frac{1 \cdot 500}{9,97} = 50,15.$$

Из таблицы коэффициентов φ (стр. 26) линейной интерполяцией находим значение φ_1 для данного $\lambda_x^{(1)}$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 50 \quad \varphi = 0,89 \\ \lambda = 60 \quad \varphi = 0,86 \end{array} \right\} \text{ для } \lambda_x^{(1)} = 50,15 \quad \varphi_1^1 = 0,89 - 0,15 \cdot 0,003 = 0,889$$

Второе приближение

Выбираем φ_1 между φ_0 и φ_1^1

$$\varphi_1 = 0,889 \quad A_2^0 = \frac{550}{0,889 \cdot 16} = 38,7 \text{ см}^2 \quad A_2 = \frac{38,7}{2} = 19,35 \text{ см}^2.$$

Двутавр № 16 ($A_2^T = 20,2 \text{ см}^2, i_x^T = 6,57 \text{ см}$).

$$\lambda_x^{(2)} = \frac{\mu L}{i_x^T} = \frac{1 \cdot 500}{6,57} = 76,1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 70 \quad \varphi = 0,81 \\ \lambda = 80 \quad \varphi = 0,75 \end{array} \right\} \text{ для } \lambda_x^{(2)} = 76,1 \quad \varphi_1^1 = 0,81 - 6,1 \cdot 0,006 = 0,773$$

Проверим двутавр № 16 на устойчивость:

$$\frac{F}{n \cdot A_2^T \cdot \varphi_1^1} \leq [\sigma] \quad \frac{550}{2 \cdot 20,2 \cdot 0,773} = 17,61 > 16 \text{ кН/см}^2.$$

Условие устойчивости не выполняется даже с учетом 5% перегрузки для $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$ имеем $16,8 \text{ кН/см}^2$. Можно повторить весь расчет используя φ_2 , но можно сразу уточнить номер двутавра. Учитывая небольшую перегрузку №16, следует проверить двутавр №18 ($A_3^T = 23,4 \text{ см}^2, i_x^T = 7,42 \text{ см}$)

$$\lambda_x^{(3)} = \frac{1 \cdot 500}{7,42} = 67,4 \quad \varphi_3 = 0,86 - 7,4 \cdot 0,005 = 0,823.$$

Проверим двутавр № 18 на устойчивость:

$$\frac{550}{2 \cdot 23,4 \cdot 0,823} = 14,28 < 16 \text{ кН/см}^2.$$

Условие устойчивости колонны из двутавров № 18 выполняется с недогрузкой:

$$\frac{14,28 - 16}{16} 100\% = -10,75\%.$$

Между двутаврами № 16 и № 18 других нет, поэтому окончательно выбираем для колонны двутавр № 18.

Примечание: Аналогично подбираются стандартные профили для сечений I–III. Для сечений IV–V расчет несколько усложняется, т.к. в табл. ГОСТа приводятся геометрические характеристики относительно оси X_0 , а необходимо знать i_x – радиус инерции относительно оси X . Здесь надо использовать формулу определения моментов инерции при параллельном переносе осей (в каждом приближении):

$$J_x = J_{x0}^T + A^T m^2; \quad i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A^T}},$$

где m – расстояние между осями X и X_0 определяется из чертежа сечения колонны. Например для сечения V:

$$m = \frac{a}{2} + b^T - z_0.$$

б) определив номер двутавров, необходимо найти расстояние « β » между двутаврами из принятого выше условия равноустойчивости колонны $\lambda_x = \lambda_y$

$$\lambda_x = \frac{\mu L}{i_x} = \lambda_y = \frac{\mu L}{i_y}. \text{ Отсюда } i_y = i_x^T.$$

Для двутавра № 18 из таблицы ГОСТа выпишем:

$$i_x^T = 7,42 \text{ см}; \quad i_{y0}^T = 1,88 \text{ см}; \quad J_{y0}^T = 82,6 \text{ см}^4; \quad A^T = 23,4 \text{ см}^2; \quad b^T = 9 \text{ см}.$$

Так как $i_y = i_x^T$, то $J_y = A^T i_y^2 = 23,4 \cdot 7,42^2 = 1288,32 \text{ см}^4$.

С другой стороны J_y можно найти так:

$$J_y = J_{y0}^T + A^T \kappa^2 = 82,6 + 23,4 \kappa^2 = 1288,32.$$

Отсюда $\kappa = 7,18$ см.

Размер κ – расстояние между осями Y_0 и Y определяется из чертежа сечения колонны. В нашем примере

$$\kappa = \frac{\beta}{2} + \frac{b^T}{2} = 7,18 \text{ см.}$$

Отсюда расстояние $\beta = 5,36$ см.

Примечание: Аналогично определяется расстояние « β » для сечений I–IV.

в) расстояние « b » между соединительными планками находится из условия, чтобы максимальная гибкость каждого стандартного профиля колонны между планками была не больше гибкости всей колонны λ_x , т.е.

$$\lambda_{\max}^{pr} \leq \lambda_x.$$

Если это условие нарушено, возможна потеря устойчивости отдельного профиля. Форма продольного изгиба профилей при этом показана пунктиром на рис.2.

$$\lambda_{\max}^{pr} = \frac{\mu^{pr} b}{i_{\min}} \leq \lambda_x. \quad (a)$$

Здесь μ^{pr} – зависит от числа пролетов между планками и условий закрепления концов профиля. Значений μ^{pr} приводятся в специальных таблицах. При числе пролетов ≥ 5 с достаточной точностью можно принять $\mu^{pr} = 1$.

В нашей задаче для всех сечений колонн примем $\mu^{pr} = 1$, i_{\min} – минимальный радиус инерции каждого профиля. Для двутавров и швеллеров $i_{\min} = i_{y0}^T$ – т.е. относительно оси Y_0 .

Для равнобоких уголков $i_{\min}^T = i_{u0}$ – т.е. относительно оси U_0 (см.табл.4.1).В таблице ГОСТа для уголков i_{\min} обозначен i_{y0} .

Для нашего примера (рис.1) $\lambda_x = 67,4$.

Для двутавра № 18:

$$i_{\min} = i_{y0}^T = 1,88 \text{ см; } \mu^{pr} = 1.$$

Из формулы (a) найдем:

$$b \leq \lambda_x i_{y0}^T = 67,4 \cdot 1,88 = 126,7 \text{ см.}$$

Число планок « N » в колонне будет:

$$N = \frac{L}{b} + 1 = \frac{500}{126,7} + 1 = 4,95 = 5 \text{ штук (округление до большего числа)}$$

Действительное расстояние « b_D » между планками:

$$b_D = \frac{L}{N-1} = \frac{500}{5-1} = 125 \text{ см.}$$

Планки соединяются с профилями колонны сваркой или заклепками (болтами).

Результаты расчетов примера:

Колонну изготовить из двутавров № 18.

Расстояние между двутаврами $\beta = 5,36 \text{ см.}$

Расстояние между планками $b = 125 \text{ см.}$

Итоговый вид колонны в двух проекциях без узлов крепления показан на рис.2.

Таблица коэффициентов φ для стали марок 3 и 4

Таблица 4.1.

λ	φ	λ	φ
0	1,0	110	0,52
10	0,99	120	0,45
20	0,97	130	0,40
30	0,95	140	0,36
40	0,92	150	0,32
50	0,89	160	0,29
60	0,86	170	0,26
70	0,81	180	0,23
80	0,75	190	0,21
90	0,69	200	0,19
100	0,60		

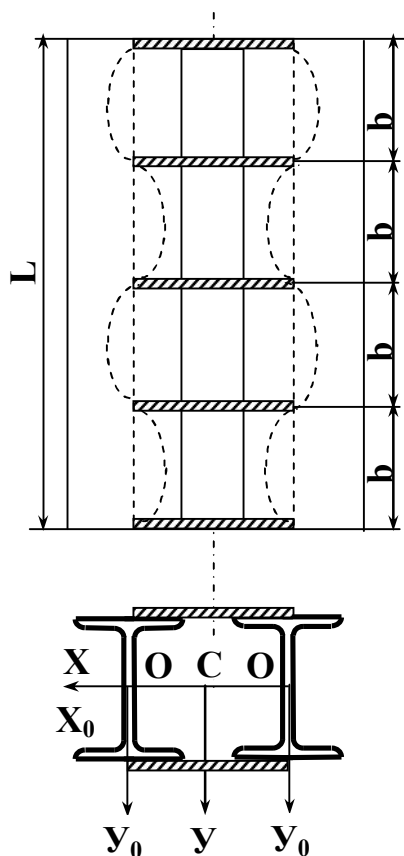


Рис.2

ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 4.2

На стальной стержень ступенчатого переменного сечения с высоты H падает груз весом Q (рис.1). Не учитывая собственный вес стержня, определить перемещение сечения I-I после падения груза, а также наибольшее (растягивающее или сжимающее) напряжение в стержне.

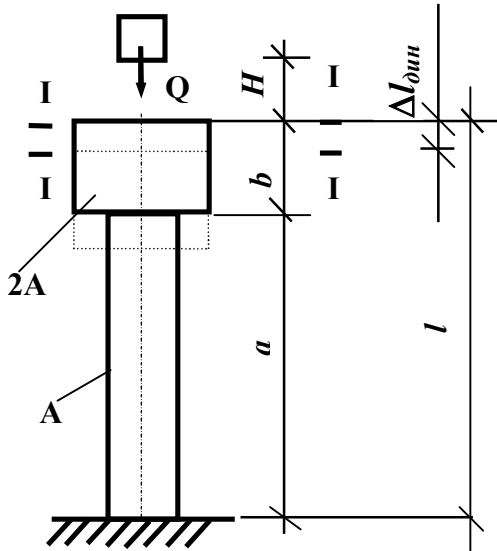


Рис.1

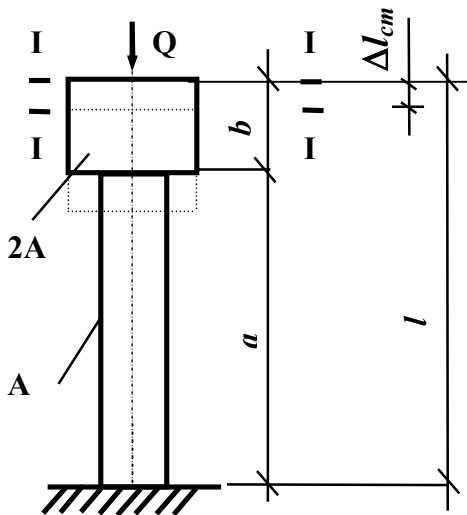


Рис.2

Исходные данные:

$$A=10 \text{ см}^2, H=5 \text{ см},$$

$$a=4 \text{ м}, b=1 \text{ м},$$

$$Q=0,4 \text{ кН}, E=2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $\Delta l_{\text{дин}}$ – искомое перемещение сечения I-I после падения груза Q (рис.1), $\Delta l_{\text{ст}}$ – перемещение того же сечения от статически приложенной силы Q (рис.2.). Тогда

$$\Delta l_{\text{дин}} = \Delta l_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}} \quad (1)$$

где $K_{\text{дин}}$ – динамический коэффициент, равный

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{\text{ст}}}}, \quad (2)$$

$\Delta l_{\text{ст}}$ – определится в виде

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{Q \cdot b}{E \cdot 2A} + \frac{Q \cdot a}{E \cdot A}. \quad (3)$$

По формулам (3), (2) последовательно находим: $\Delta l_{\text{ст}} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, $K_{\text{дин}} = 106,414$.

Подставляя найденные значения $\Delta l_{\text{ст}}$ и $K_{\text{дин}}$ в (1), окончательно найдем

$$\Delta l_{\text{дин}} = 9 \cdot 10^{-4} \cdot 106,414 = 9,577 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Наибольшие (сжимающие) напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{дин}}^{\text{max}} = K_{\text{дин}} \cdot \sigma_{\text{ст}}^{\text{max}}, \quad (4)$$

где $\sigma_{\text{ст}}^{\text{max}}$ – наибольшие (сжимающие) напряжения в стержне от статически приложенной нагрузки Q (рис.2), равные Q/A . Подставляя в (4) числовые значения, получим: $\sigma_{\text{дин}}^{\text{max}} = 106,414 \cdot \frac{0,4}{10} = 4,256 \text{ кН/см}^2$.

ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 4.3

На шарнирно опертую двутавровую балку № 40 (рис. 1) падает груз F с высоты h .

Требуется:

1. Найти максимальное нормальное напряжение в балке и указать сечение, в котором оно возникает.
2. Определить перемещения в точке падения груза K_1 и в точке K_2 .

РЕШЕНИЕ

В данном варианте задачи имеем
 $l = 3$ м, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $F = 5$ кН,
 $h = 0.10$ м

Для двутавра № 40 из сортамента
 $A = 71,4$ см², $J_x = 18930$ см⁴,
 $W_x = 947$ см³.

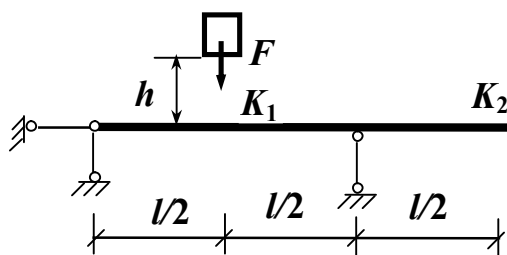


Рис.1

Для нахождения напряжений, перемещений, деформаций при поперечном ударе необходимо прежде всего решить соответствующую статическую задачу (рис.2).

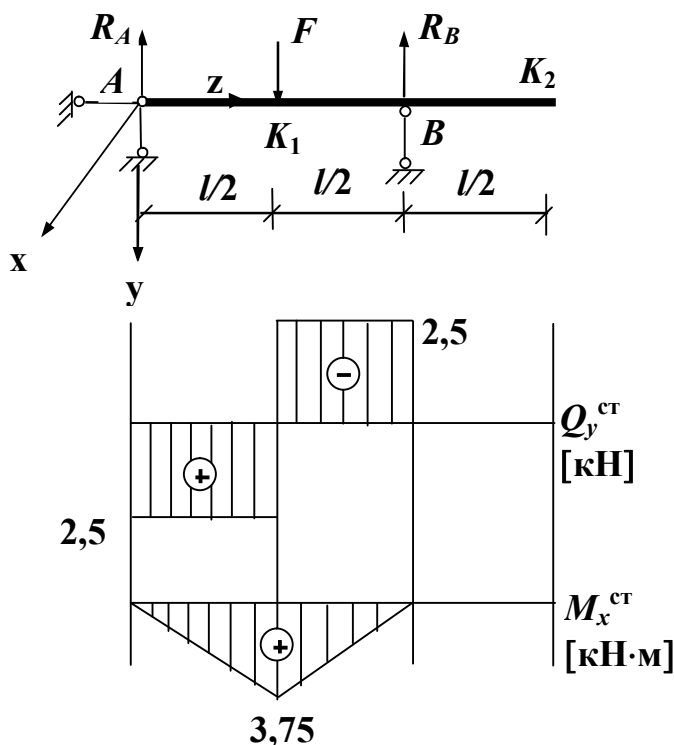


Рис.2

Из уравнения статики имеем
 $R_A = R_B = F/2 = 25$ кН. Строим
эпюры внутренних факторов:

$$(M_x^{\text{ст}})_{\text{max}} = \frac{Fl}{4} = 3,75 \text{ кН} \cdot \text{м} =$$

$$= 375 \text{ кН} \cdot \text{см},$$

$$(Q_y^{\text{ст}})_{\text{max}} = \frac{F}{2} = 2,5 \text{ кН}$$

Определяем максимальное нормальное напряжение

$$(\sigma_z^{\text{ст}})_{\text{max}} = \frac{(M_x^{\text{ст}})_{\text{max}}}{W_x} = 0.396 \text{ кН/см}^2$$

Определение статических прогибов в точках K_1 и K_2 можно осуществлять различными методами. В дальнейшем используем два метода:

метод интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки и метод перемножения эпюр (метод Верещагина).

Примечание: В контрольной работе использовать оба метода

1. Метод интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки $EJ_x V'' = -M_x$ по участкам.

На втором участке $l/2 \leq z \leq l$ уравнение имеет вид

$$EJ_x V'' = -[R_A z - F(z - l/2)],$$

а его интегралы

$$EJ_x V' = -[R_A \frac{z^2}{2} - F \frac{(z - l/2)^2}{2}] + C$$

$$EJ_x V = -[R_A \frac{z^3}{6} - F \frac{(z - l/2)^3}{6}] + Cz + D - \text{уравнение упругой линии.}$$

Так как для первого участка при $z = 0$ $V = 0$, то $D = 0$. Для определения постоянной интегрирования C используем второе краевое условие в точке B , которое принадлежит второму участку при $z = l$, $V = 0$

$$-[R_A \frac{l^3}{6} - F \frac{l^3}{6 \cdot 8}] + Cl = 0$$

Откуда
$$C = \frac{Fl^2}{16}$$

Окончательно для второго участка имеем

$$EJ_x V = \left[\frac{F}{2} \frac{z^3}{6} - F \frac{(z - l/2)^3}{6} \right] + \frac{Fl^2}{16} z$$

Прогиб в точке приложения силы ($z = l/2$)

$$EJ_x V = -\frac{F}{2} \frac{l^3}{48} + \frac{Fl^3}{32} = \frac{Fl^3}{48}, V|_{z=l/2} = \frac{Fl^3}{48 EJ_x} = 0.01025 \text{ см}$$

Прогиб в точке K_2 определяется из интегрирования дифференциального уравнения упругой линии на третьем участке при $l \leq z \leq 1.5l$

$$EJ_x V'' = -[R_A z - F(z - l/2) + R_B(z - l)],$$

$$EJ_x V' = -[R_A \frac{z^2}{2} - F \frac{(z - l/2)^2}{2} + R_B \frac{(z - l)^2}{2}] + C,$$

$$EJ_x V = -[R_A \frac{z^3}{6} - F \frac{(z - l/2)^3}{6} + R_B \frac{(z - l)^3}{6}] + Cz + D$$

Постоянные интегрирования определены выше

$$EJ_x V = -\left[\frac{F}{2} \frac{z^3}{6} - F \frac{(z - l/2)^3}{6} + \frac{F}{2} \frac{(z - l)^3}{6} \right] + \frac{Fl^2}{16} z$$

Определяем прогиб в точке K_2 при $z = \frac{3}{2} l$:

$$EJ_x V_{K_2} = -\frac{F}{2} \frac{27l^3}{48} + F \frac{l^3}{6} - \frac{Fl^3}{2 \cdot 48} + \frac{3Fl^3}{32} = -\frac{Fl^3}{32}$$

$$V_{K_2} = -\frac{Fl^3}{32EJ_x} = -0.01538 \text{ см}$$

Определяем коэффициент динамичности при ударе по соотношению

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{ст}}}},$$

где $\delta_{\text{ст}}$ - есть статический прогиб в точке приложения груза:
 $\delta_{\text{ст}} = V_{K1} = 0.01025 \text{ см}$.

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0.01025}} = 45.18$$

Все величины динамической задачи определяются через решение соответствующей статической задачи и коэффициент динамичности:

$$(\sigma_z^{\text{дин}})_{\text{max}} = (\sigma_z^{\text{ст}})_{\text{max}} K_{\text{дин}} = 0.396 \cdot 45.18 = 17.89 \text{ кН/см}^2$$

$$V_{K_1}^{\text{дин}} = V_{K_1}^{\text{ст}} K_{\text{дин}} = 0.01025 \cdot 45.18 = 0.463 \text{ см}$$

$$V_{K_2}^{\text{дин}} = V_{K_2}^{\text{ст}} K_{\text{дин}} = -0.01538 \cdot 45.18 = -0.695 \text{ см}$$

2. Метод Верещагина вычисления перемещений при статическом нагружении заключается в перемножении эпюр изгибающих моментов заданного нагружения и единичной силы, приложенной в той точке, в которой требуется вычислить перемещение.

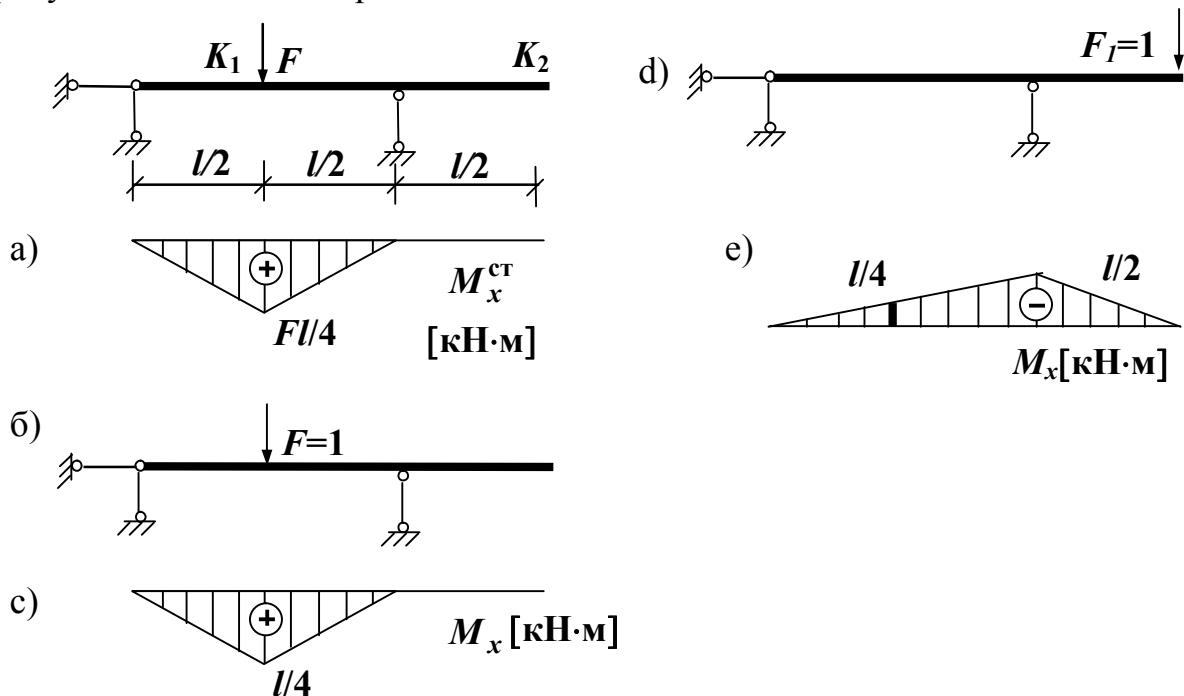
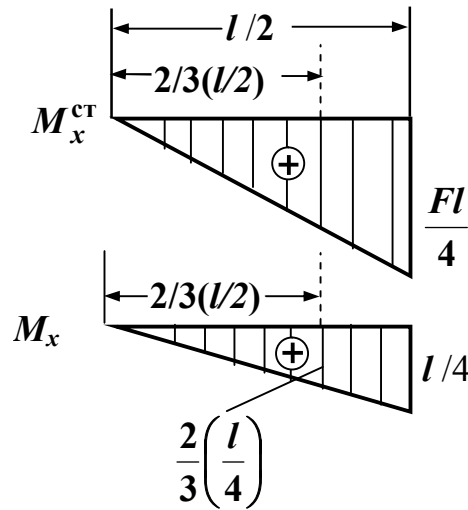


Рис. 3

Так для вычисления прогиба в точке приложения силы K_1 используем эпюры $M_x^{ст}$ (рис. 3, а) и M_x от силы $F = 1$, приложенной в той же точке (рис. 3, б, с). Каждая из этих эпюр состоит из двух одинаковых участков, поэтому рассматриваем любой один участок, описываемый одним аналитическим выражением. Рассмотрим эти эпюры отдельно



Перемножение эпюр $M_x^{ст}$ (рис. 3, а) на M_x (рис. 3, с) заключается в перемножении площади любой из этих эпюр (например, рис.3, а)

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l}{2}$$

на ординату второй эпюры (рис. 3, с), находящейся под центром тяжести первой эпюры $\frac{2}{3} \left(\frac{l}{4} \right)$.

Тогда
$$V|_{z=l/2} = \frac{1}{EJ_x} A \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{l}{4} \right) \cdot 2 = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \cdot 2 \right] = \frac{Fl^3}{48}.$$

Для нахождения перемещения в точке K_2 прикладываем в этой точке силу $F = 1$ и строим эпюру M_x (рис. 3, д, с). В данном случае перемножаются эпюры $M_x^{ст}$ (рис. 3, а) и эпюра M_x (рис. 3, е). Эпюра M_x имеет два участка (первый: $0 \leq z \leq l/2$; второй: $l/2 \leq z \leq l$). Эпюра M_x тоже имеет два участка (первый: $0 \leq z \leq l$; второй: $l \leq z \leq \frac{3}{2}l$). Перемножение эпюр осуществляется на участке $0 \leq z \leq l$, причем с учетом того, что первая эпюра $M_x^{ст}$ имеет два участка:

площадь участка $0 \leq z \leq l/2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{El}{4} \cdot \frac{l}{2}$, ордината второй эпюры $\left(-\frac{2}{3} \frac{l}{4} \right)$,

площадь участка $l/2 \leq z \leq l \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{El}{4} \cdot \frac{l}{2}$, ордината второй эпюры

$$\left(-\left[\frac{l}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right) \right] \right).$$

Тогда с учетом знаков эпюр имеем

$$V|_{z=1,5 \cdot l} = -\frac{1}{EJ_x} \left(\frac{Fl^3}{96} + \frac{Fl^3}{48} \right) = -\frac{Fl^3}{32EJ_x}.$$