МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.Ю. Горская, Э.Н. Хасанова

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для решения задач по темам
«Алгебра и аналитическая геометрия»,
«Дифференциальное исчисление функции одной и двух переменных»
для студентов заочной формы обучения направления подготовки
08.03.01 «Строительство» (бакалавриат)

Казань
2021

УДК 512+514.7
ББК 22.14; 22.151
Г67

Горская Т.Ю., Хасанова Э.Н.
Г67 Учебно-методическое пособие для решения задач по темам «Алгебра и аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функции одной и двух переменных» для студентов заочной формы обучения направления подготовки 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат) / Т.Ю. Горская, Э.Н. Хасанова. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2021. – 48 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Материал соответствует части программы по дисциплине «Математика» для студентов заочной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат), связанных с такими разделами, как алгебра и аналитическая геометрия, пределы и производные, функции нескольких переменных. Разделы содержат теоретический материал, разбор типовых задач по указанным выше разделам, ссылки на видеоуроки по решению подобных задач для самостоятельного изучения. В конце приведен список литературы, рекомендуемой для более глубокого изучения материала.

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры БиЦО К(П)ФУ
А.Ф. Галимянов

УДК 512+514.7
ББК 22.14; 22.151

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2021

© Горская Т.Ю., Хасанова Э.Н., 2021

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по решению задач по темам «Алгебра и аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функции одной и двух переменных» состоит из разбора заданий по следующим разделам математики: линейная и векторная алгебры, аналитическая геометрия, начало математического анализа в объеме дифференциального исчисления функций одного и нескольких переменных.

Подставленный материал соответствует содержанию контрольных работ № 1, 2 для студентов заочной формы обучения в первом семестре.

Изложение в данном учебно-методическом пособии снабжено теоретическим материалом, а также ссылками на видео уроки по решению типовых задач вышеуказанных контрольных работ.

Самостоятельное выполнение заданий поможет студентам подготовиться к экзаменационной сессии. Поэтому важно, чтобы контрольные работы выполнялись до начала экзаменационной сессии и в соответствии с правилами их оформления.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольные работы [1] оформляются в виде отдельной работы, в школьной тетради либо на скрепленных листах формата А4 (предпочтение отдается тетради, так как в ней более аккуратно излагается текст).

Обложка контрольной работы должна содержать следующую информацию:

Контрольная работа по математике №__,
ФИО студента,
учебная группа,
ШИФР, который состоит из номера зачетной книжки, совпадающей с номером студенческого билета.

Шифр имеет значение при выборе номеров задач и их содержания, так как в текстах заданий контрольной работы № 1 фигурируют параметры «**m, n**», определяемые с помощью шифра. *Последняя цифра шифра* задает последнюю цифру номера задания. Например, если она равна 3, то выполняются задания под номерами 3. Если последняя цифра 0, то выполняются задания под номером 10. *Предпоследняя цифра номера шифра* – это значение параметра m, но если она равна 0, то **m** = 1. Например, шифр 1113103, значит **m** = 1. Значение параметра **n** определяется как последняя цифра текущего года, которая совпадает для Контрольной работы № 1 с годом поступления.

Для определения заданий для выполнения в Контрольной работе № 2 используются последние две цифры шифра. Далее по таблице находятся номера примеров для выполнения.

Видеоподсказка

Посмотрите видео с объяснениями о выборе вариантов контрольных работ 1 и 2.

https://youtu.be/BFBx1dRjCUs

1. АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Определившись с вариантом и выбрав согласно шифру задания для выполнения, приступим к решению типовых примеров контрольных работ. Начнем выполнение контрольной работы № 1, состоящей из заданий 1.1–1.4.

Задание 1.1

Сначала приведем основные понятия и формулы, необходимые для решения данного задания, связанного с элементами векторной алгебры и аналитической геометрии.

Пусть в пространстве $Oxyz$ точки A и B заданы координатами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Расстояние между точками определим следующим образом.

Так как координаты точки A равны проекциям на оси координат радиус-вектора этой точки, то $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{OB} = (x_2; y_2; z_2)$. Тогда $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, но $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$. Значит, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Отсюда видно, что проекции на оси координат вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала. Зная проекции $\overrightarrow{AB}$, найдём длину вектора $\overrightarrow{AB}$, следовательно, и расстояние между точками A и B: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$ (либо $\vec{a}\,\vec{b}$) и определяется как число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать также $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Пусть векторы заданы своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, поэтому $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – базисные векторы, тогда скалярное произведение запишем в виде:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций этих векторов.

Вычисление угла между векторами. Запишем $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через проекции. Тогда, используя $\cos\varphi = \left(\vec{a},\ \vec{b}\right)/(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|)$, имеем:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор (обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), который обладает свойствами:

- $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, т.е. *длина вектора* $\vec{c}$ *численно равна площади параллелограмма, построенного на* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *как на сторонах*;
- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, т.е. $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости указанного параллелограмма;
- вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ совершается против хода часовой стрелки.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$. Тогда векторное произведение определяется по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Эту формулу можно записать так:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ перемножим векторным произведением и получим $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Этот вектор умножим скалярно на $\vec{c}$ и получим число

$(\vec{d},\vec{c})$, которое называется *смешанным (векторно-скалярным) произведением трёх исходных векторов* $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ и обозначается

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{d},\vec{c}) = ([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c}).$$

Когда векторы заданы своими проекциями $\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z), \vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$, $\vec{c}=(c_x,\ c_y,\ c_z)$, тогда смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения. Смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{d},\vec{c}) = |\vec{d}\,||\vec{c}|\cos\varphi$. Но $|\vec{d}| = S$ и $h = |\vec{c}|\cos\varphi$. Поэтому $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = Sh = V$, где V – объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c},$ составляющих правую тройку векторов.

С помощью векторного анализа можно вычислить длины отрезков, площади треугольников, объемы пирамид, а также легко получить уравнения плоскости и прямой в пространстве.

Пусть в пространстве *Oxyz* задана плоскость, т.е. заданы:

- координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0, лежащей на этой плоскости;
- $A,\ B,\ C$ – проекции на оси координат ненулевого вектора $\vec{N}=(A,B,C)$, перпендикулярного плоскости, который называется *нормальным вектором плоскости*.

Пусть $M(x\ ,y\ ,z\ )$ – произвольная точка плоскости. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ лежит на плоскости и поэтому перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N}$ этой плоскости, следовательно, скалярное произведение этих векторов $\left(\overrightarrow{M_0M},\vec{N}\right)=0$. Выражая скалярное произведение через проекции векторов, получим уравнение:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Раскрывая скобки, получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + C\,z + D = 0.$$

Пусть в пространстве *Oxyz* заданы две плоскости, соответственно, уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тогда векторы $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы этих плоскостей. За угол φ между плоскостями примем один из двухгранных углов (образованных ими), равный углу между их нормальными векторами. Поэтому справедливо:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на прямой. Координаты этих точек заданные числа. Нужно записать уравнения прямой, проходящей через эти две точки, как геометрическое место точек $M(x, y, z)$, для которых векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ будут коллинеарными. При этом вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можно назвать направляющим вектором прямой. Тогда уравнение запишется в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пусть в пространстве *Oxyz* две прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

Далее рассмотрим решение задания 1.1.

Даны точки $A_1(1,2,5)$, $A_2(1,2,7)$, $A_3(0,2,7)$, $A_4(1,5,1)$ – вершины пирамиды.

Найти:
1) длину ребра A_1A_2;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
4) площадь грани $A_1A_2A_3$;
5) объем пирамиды;
6) уравнение прямой A_1A_2;
7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение

Для наглядности представим пирамиду на рис. 1.

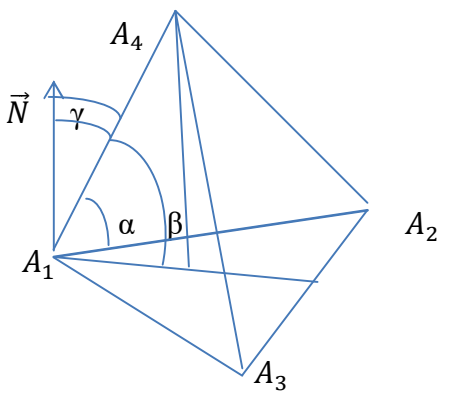


Рис. 1

1. Найдем вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$.
Воспользуемся формулой:

$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x; b_y - a_y; b_z - a_z),$$

где $(b_x; b_y; b_z), (a_x; a_y; a_z)$ – координаты конца и начала вектора, соответственно.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (0,0,2).$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2},$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{0 + 0 + 4} = 2.$$

2. Найдем угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4. Вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ найдем аналогично вектору $\overrightarrow{A_1A_2}$. $\overrightarrow{A_1A_4} = (0,3,-4)$. Воспользуемся формулой для нахождения косинуса угла между векторами:

$$\cos(\widehat{a,b}) = \frac{b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}}.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}}\right) = \frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-4)}{2\sqrt{0 + 9 + 16}} = \frac{-5}{10} = -0.5.$$

$$\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}}\right) = \pi - \arccos(0.5) = \frac{2\pi}{3}.$$

(*Заметим, что на рис. 1 пирамида является условной и величины ее могут не совпадать с результатами вычислений*).

3. Найдем угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$. Сначала определим векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, вектор, перпендикулярный плоскости этих векторов. Для этого найдем вектор $\overrightarrow{A_1A_3}$ аналогично предыдущим вычислениям и применим формулу векторного произведения двух векторов:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (-1,0,2).$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} + (-2-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k}.$$

Обозначим через $\vec{N} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = (0,-2,0)$, тогда угол между ребром и гранью найдем как:

$$cos\gamma = sin\beta = \frac{\left(\vec{N}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)}{\left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{0-6+0}{2 \cdot \sqrt{0+9+16}} = \frac{-3}{5} = -0.6.$$

$$\beta = 2\pi - arcsin0.6.$$

4. Найдем площадь грани $A_1A_2A_3$. Площадь треугольника $A_1A_2A_3$ равна половине длины векторного произведения векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. $S = \frac{1}{2}\left|\vec{N}\right| = 1$.

5. Найдем объем пирамиды. Согласно свойству смешанного произведения:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{N}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right| = \frac{1}{6}(-3) = 0.5.$$

6. Запишем уравнение прямой A_1A_2. Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ направлен вдоль прямой, следовательно, его можно взять как направляющий вектор, точка A_1 принадлежит прямой. Воспользуемся каноническим уравнением прямой с точкой

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ней и направляющим вектором $\vec{q} = (m, n, p)$, направленным вдоль нее:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 5}{2} -$$

искомое уравнение прямой A_1A_2.

7. Определим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$. В качестве нормального вектора возьмем вектор $\vec{N} = (0, -2, 0)$, точку $A_1(1,2,5) -$ в качестве точки плоскости. Тогда, используя уравнение плоскости, содержащей точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{N} = (A, B, C)$, в виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Запишем искомое уравнение:

$$0(x - 1) - 2(y - 2) + 0(z - 5) = 0.$$

или $y = 2$.

8. Найдем уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Воспользуемся каноническим уравнением прямой. В качестве точки на прямой возьмем $A_4(1,5,1)$, за направляющий вектор примем $\vec{N} = (0, -2, 0)$, тогда искомое уравнение высоты получим в виде:

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y - 5}{-2} = \frac{z - 1}{0}.$$

Видеоподсказка

Посмотрите видео с объяснением решений аналогичных задач.

https://www.youtube.com/watch?v=2JePOQoh7no&t=3s

Задание для закрепления материала

Предлагаем, пользуясь теоретическими и практическими материалами, изложенными выше и видеоинструкции решения задания (см. QR-код), самостоятельно выполнить в качестве закрепления следующее задание.

Даны точки $A_1(1,-3,4)$, $A_2(1,2,5)$, $A_3(0,2,7)$, $A_4(1,5,2)-$ вершины пирамиды.

Найти:

1) длину ребра A_1A_2;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
4) площадь грани $A_1A_2A_3$;
5) объем пирамиды;
6) уравнение прямой A_1A_2;
7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Для сравнения результатов решения этого примера, можете посмотреть по QR-коду.

Задание 1.2

Условия задания 1.2 содержат определения кривых второго порядка на плоскости. Представляют собой текстовую задачу на составление уравнений для линий, по указанному правилу построения. Необходимо записать условие текстовой задачи в виде математического выражения, с последующим выводом канонического уравнения кривой и ее построением на плоскости.

Напомним основные кривые второго порядка на плоскости, их определения и канонические уравнения.

Окружность – это геометрическое место точек равноудаленных от центра. Каноническое уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O_1(a,b)$ имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами,* есть величина постоянная. Эту постоянную обозначим через $2a, a > 0,$ а фокусы – через $F_1(c, 0),$ $F_2(-c, 0)$. Расстояние между ними $F_1F_2 = 2c.$ Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса, соединим ее с F_1 и F_2 (рис. 2). По определению эллипса сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов равна $2a,$ т.е.

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

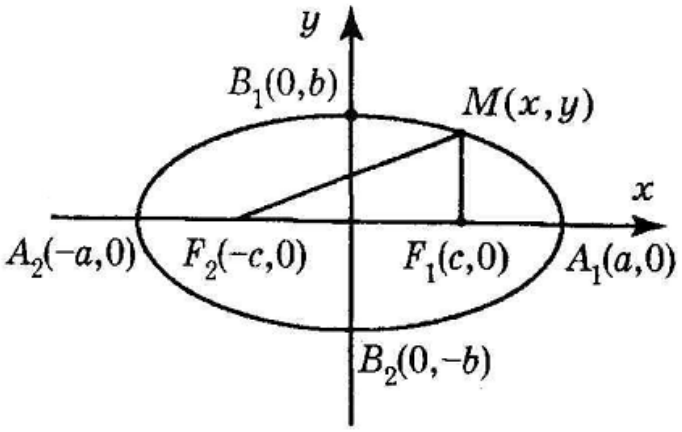


Рис. 2

Обозначая $b^2 = a^2 - c^2$ (так как $a > c$), и считая $b > 0,$ имеем соотношение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Такое уравнение эллипса называется *каноническим.*

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (рис. 3). Обозначим эту постоянную $2a > 0,$ а фокусы – через $F_1,$ $F_2,$ Расстояние между ними $F_1F_2 = 2c.$ Фокусы имеют координаты $F_1(c, 0),$ $F_2(-c, 0).$ Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы, тогда по определению

$$F_1M - F_2M = \pm 2a.$$

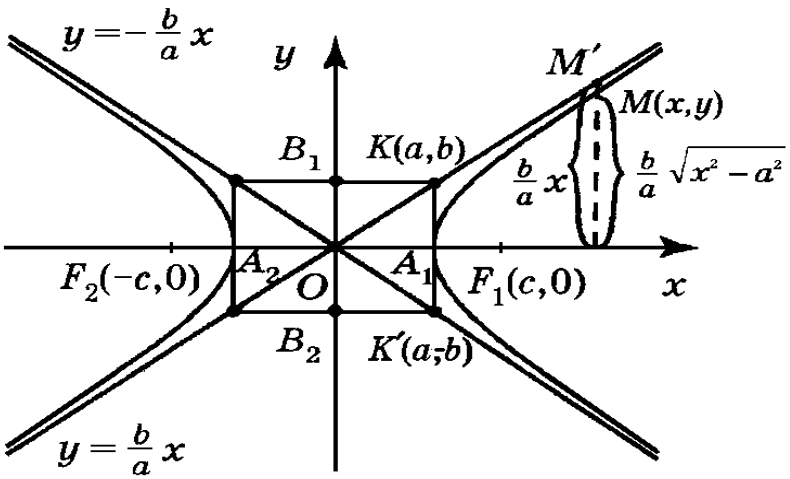


Рис. 3

Выражая $b^2 = c^2 - a^2$, b – действительное число, которое будем считать положительным, получим *каноническое уравнение гиперболы:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Прямые с уравнением

$$y = \pm(b/a)x,$$

называются *асимптотами гиперболы.*

Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой *фокусом*, и заданной прямой, называемой *директрисой*. Пусть F – фокус. Ось Ox проведём через F перпендикулярно директрисе (рис. 4).

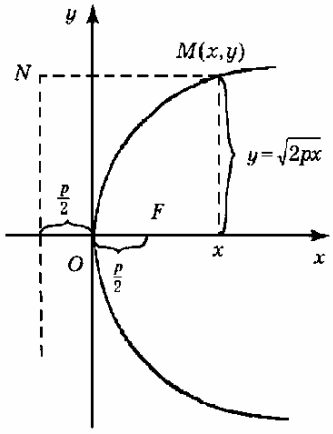


Рис. 4

Пусть p – расстояние от фокуса F до директрисы. Это число задано и называется *параметром параболы.* Начало координат возьмём в середине перпендикуляра, опущенного из точки F на директрису. Тогда фокус будет иметь координаты $F(p/2\,,0)$. Директриса имеет уравнение $x = -p/2$.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Покажем решения задания 1.2 на примере трех задач.

1. Составить уравнение и построить линию, расстояние от каждой точки которой до начала координат $O(0{,}0)$ и до точки $A(3{,}4)$ относятся как 2:1.

Решение

Пусть точка $M(x, y) -$ точка с искомой линии, тогда условия задачи выражаются уравнением: $\frac{|OM|}{|AM|} = \frac{2}{1}$. Известно, что

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad |AM| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2},$$

тогда имеем уравнение:

$$|OM| = 2|AM| \;\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}.$$

Возводим в квадрат обе части последнего уравнения, принимая во внимание, что обе части – есть положительные величины.

$$x^2 + y^2 = 4((x-3)^2 + (y-4)^2).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$x^2 + y^2 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 - 32y + 64 \;\Rightarrow$$

$$3x^2 - 24x + 3y^2 - 32y + 100 = 0.$$

Выделяем полные квадраты для двух переменных, получим:

$$3(x^2 - 8x + 16 - 16) + 3(y^2 - \frac{32}{3}y + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2) + 100 = 0.$$

$$3(x-4)^2 + 3(y - \frac{16}{3})^2 - \frac{16^2}{3} + 52 = 0.$$

$$(x-4)^2 + (y - \frac{16}{3})^2 = \frac{100}{9}.$$

Последнее уравнение задает окружность радиуса $\frac{10}{3}$ с центром в точке с координатами $\left(4, \frac{16}{3}\right)$, рис. 5.

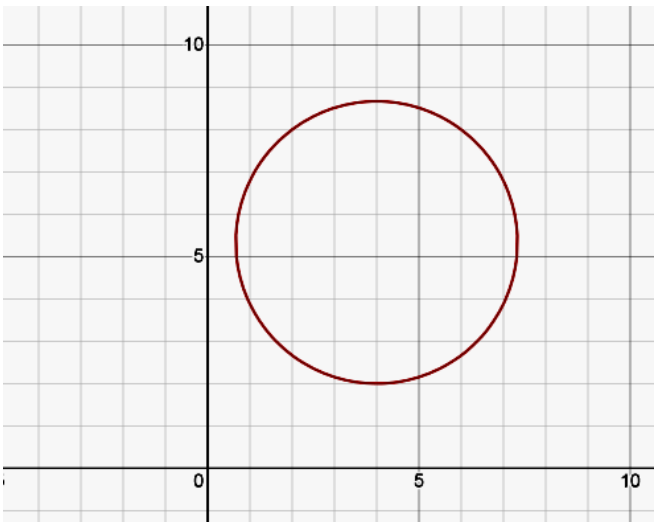


Рис. 5

2. Составить уравнение и построить линию, расстояние от каждой точки которой до прямой $x = 3$ и до точки $A(-1,2)$ относятся как 5:4.

Решение

Как и ранее обозначим через $M(x, y)$ – точку с искомой линии, указанную прямую обозначим через $l: x = 3$, тогда условия задачи выражаются уравнением: $\frac{|AM|}{|lM|} = \frac{5}{4}$. $|AM| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$, $|lM| = |x-3|$, тогда получим уравнение:

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}}{|x-3|} = \frac{5}{4}.$$

$$\left(4\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = (5|x-3|)^2.$$

$$16(x+1)^2 + 16(y-2)^2 = 25(x-3)^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены по переменной x, получим:

$$9x^2 - 182x + 209 - 16(y-2)^2 = 0.$$

Выделяя полный квадрат то переменной x, получим:

$$9\left(x - \frac{91}{9}\right)^2 - 16(y-2)^2 = -\frac{6400}{9}.$$

Поделим обе части уравнения на величину, стоящую справа от знака равенства, получим каноническое уравнение:

$$\frac{(y-2)^2}{\frac{6400}{144}} - \frac{\left(x-\frac{91}{9}\right)^2}{6400} = 1.$$

Последнее уравнение определяет гиперболу, фокусы которой расположены на оси, параллельной OY, центр в точке с координатами $\left(\frac{91}{9}, 2\right)$, полуоси $a = 80, b = \frac{20}{3}$ (рис. 6).

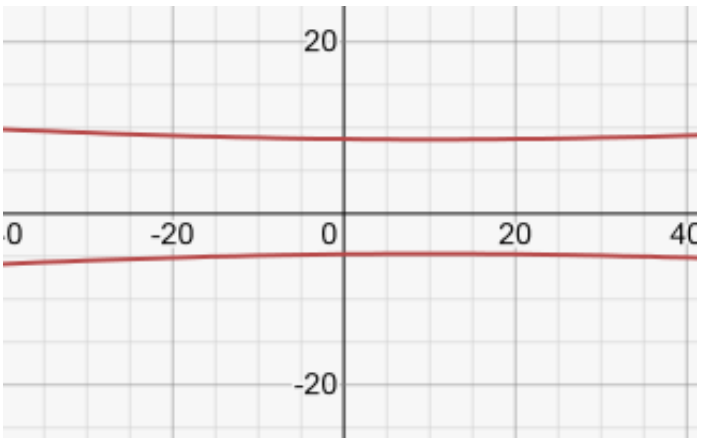
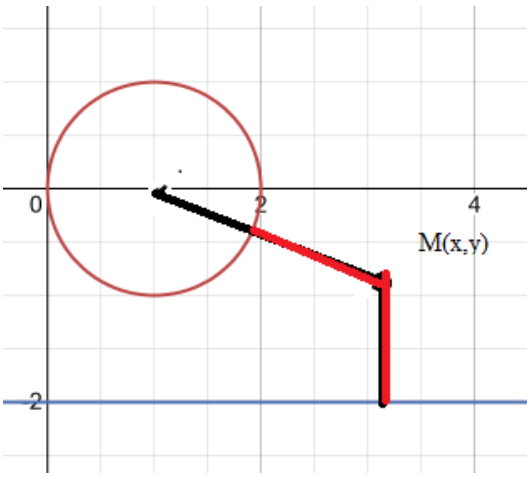


Рис. 6

3. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноотстоит от прямой $d: y = -2$ и окружности $l: x^2 + y^2 = 2x$.

Решение

Для наглядности построим окружность и линию, но прежде приведем уравнение окружности к каноническому виду: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ –окружность с центром в точке (1,0) радиуса 1.



Точка M(x,y) – точка на искомой линии. Расстояние от нее до центра круга равно расстоянию до прямой плюс радиус окружности. $|dM| = |y+2|$, однако, знак модуля можно убрать, так как если бы $y < -2$, то условия равноотстояния не были бы выполнены.

Учитывая это, запишем уравнение в виде:

$$(x-1)^2 + y^2 = (1 + |y+2|)^2.$$

После преобразований окончательно получим искомую линию.

$$(x-1)^2 + y^2 = 9 + 6y + y^2 \;\Rightarrow\; (x-1)^2 = 6(y+1.5).$$

В результате преобразований получили уравнение параболы, вершина которой в точке с координатами (1,-1.5), ветви направлены вдоль положительного направления оси *OY* (рис. 7).

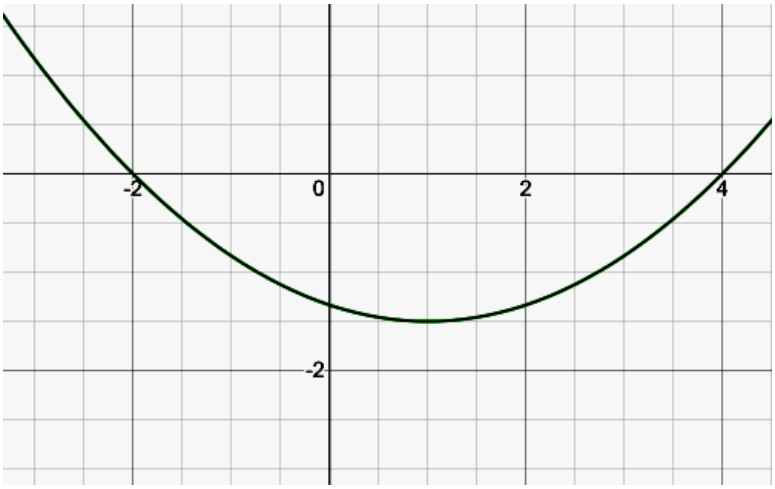


Рис. 7

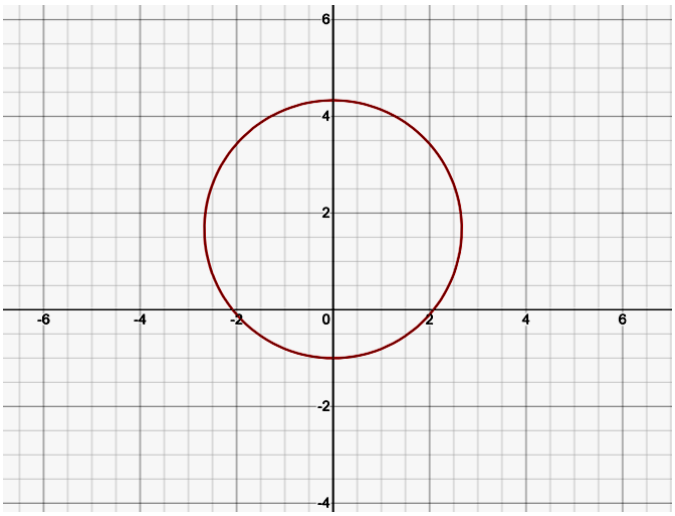
Выберите задание, соответствующее вашему шифру и решите его по аналогии с теми, что показаны выше. Для тренировки можете выполнить следующее задание.

Задание для закрепления материала

Составьте уравнение и постройте линию, каждая точка которой находится от точки A(0,3) на расстояние вдвое меньше, чем от точки B(0,7).

Проверьте себя, используя QR-код.

Чертеж линии представлен на рисунке.



Задание 1.3

Это задание по линейной алгебре и выражается в нахождении решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Сначала представим теоретический материал по методу Гаусса.

Метод Гаусса − это метод перехода от исходной системы линейных уравнений (при помощи эквивалентных преобразований) к системе, которая решается проще, чем исходная система.

Эквивалентными преобразованиями системы линейных уравнений являются:

- перемена местами двух уравнений в системе;
- умножение какого-либо уравнения в системе на ненулевое действительное число;
- прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$Ax=b, \tag{2}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

A – называется матрица коэффициентов системы, b − правая часть ограничений, x − вектор переменных, которую нужно найти. Пусть rang(A)=p (рангом матрицы называют максимальное количество линейно независимых строк или столбцов матрицы).

Эквивалентные преобразования не меняют ранг матрицы коэффициентов и ранг расширенной матрицы системы. Не меняется также множество решений системы при эквивалентных преобразованиях. Суть метода Гаусса заключается в приведении матрицы коэффициентов A к диагональному или ступенчатому виду.

Построим расширенную матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{4}$$

Предположим $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то можно поменять местами эту строку со строкой с ненулевым элементом в столбце 1 (если нет таких строк, то переходим к следующему столбцу). Обнуляем все элементы столбца 1 ниже ведущего элемента a_{11}. Для этого сложим строки 2, 3, ... m со строкой 1,

умноженной на $-a_{21}/a_{11}$, $-a_{31}/a_{11}$, ..., $-a_{m1}/a_{11}$, соответственно. Тогда (4) примет следующий вид:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right], \tag{5}$$

На следующем этапе обнуляем все элементы столбца 2, ниже элемента $a_{22}^{(1)}$. Если данный элемент нулевой, то эту строку меняем местами со строкой, лежащей ниже данной строки и имеющей ненулевой элемент во втором столбце. Далее обнуляем все элементы столбца 2 ниже ведущего элемента a_{22}. Для этого сложим строки 3, ... m со строкой 2, умноженной на $-a_{32}/a_{22}$, ..., $-a_{m2}/a_{22}$, соответственно. Продолжая процедуру, получим матрицу диагонального или ступенчатого вида. Пусть полученная расширенная матрица имеет вид:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2p}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{pp}^{(k)} & \dots & a_{pn}^{(k)} & b_p^{(k)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{p+1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_m^{(k)} \end{array}\right], \tag{6}$$

Обратим внимание на последние строки. Если $b_{p+1}^{(k)}$,..., $b_m^{(k)}$ равны нулю, то система линейных уравнений имеет решение, если же хотя бы один из этих чисел отлично от нуля, то система несовместна. Иными словами, система (2) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $(A|b)$.

Пусть $b_{p+1}^{(k)} = 0, \dots, b_m^{(k)} = 0$.

Тогда

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2p}^{(1)}x_p = b_2^{(1)} - a_{2p+1}^{(1)}x_{p+1} - \dots - a_{2n}^{(1)}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{pp}^{(k)}x_p = b_p^{(k)} - a_{p,p+1}^{(k)}x_{p+1} - \dots - a_{pn}^{(k)}x_n \end{gathered} \tag{7}$$

Так как $rangA=rang(A|b)$, то множество решений (7) есть $(n-p)$ − многообразие. Следовательно, $n-p$ неизвестных $x_{p+1}, \dots, x_n$ можно выбрать произвольно. Остальные неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_p$ из системы (7) вычисляются так. Из последнего уравнения выражаем x_p через остальные переменные и вставляем в предыдущие выражения. Далее из предпоследнего уравнения выражаем x_{p-1} через остальные переменные и вставляем в предыдущие выражения и т.д.

Рассмотрим метод Гаусса на примере задания 1.3 контрольной работы № 1, в котором необходимо доказать совместность системы линейных алгебраических уравнений и решить методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1. \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований со строками матрицы приведем ее к ступенчатому виду. Матрицу системы обделили от столбца свободных членов вертикальной чертой. Первая строка не меняется, но с помощью её будем обнулять элементы первого столбца, лежащие под диагональным элементом: вместо второй строки новой матрицы запишем сумму первой строки, предварительно умноженной на число (-2), и второй строки исходной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim$$

вместо третьей строки новой матрицы запишем сумму первой строки исходной матрицы, предварительно умноженной на (-3), и третьей строки исходной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -7 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Очевидно, чтобы в третьей строке справа от вертикальной черты остался бы один ненулевой элемент, достаточно прибавить к ней вторую строку последней матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -7 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -8 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Полученная эквивалентная матрица ляжет в основу эквивалентной исходной СЛАУ. Заметим, что эквивалентные системы имеют одинаковое решение. Кроме того, заметим также, что все три строки расширенной матрицы содержат ненулевые элементы справа от вертикальной черты, а это значит, что система совместна, т.е. имеет решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -x_2 - x_3 = -7 \\ -8x_2 = -6 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения найдем x_2, затем подставим его во второе уравнение и найдем x_3, а после, подставив полученные величины в первое уравнение, найдем x_1:

$$-8x_2 = -6 \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{6}{-8} = \frac{3}{4},$$

$$-x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow \quad x_3 = 7 - x_2 = 7 - \frac{3}{4} = \frac{25}{4},$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow \quad x_1 = 3 - 2x_2 - x_3 = 3 - \frac{6}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{19}{4}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{19}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{25}{4}$.

Видеоподсказка

Рекомендуем посмотреть пример решения системы уравнений методом Гаусса:

https://www.youtube.com/watch?v=-Av7SNLcFQY&t=117s

Задание для закрепления материала

Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -5. \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Проверьте себя.

Задание 1.4

Данное задание относится к аналитической геометрии и использует теоретический материал по кривым второго порядка на плоскости, который был изложен выше. В задании необходимо, предварительно приведя предложенные квадратичные уравнения к каноническому виду, указать тип кривой, соответствующей уравнению и построить ее.

Итак, предлагается три квадратичных уравнения, соответствующие трем кривым второго порядка:

$$1.\ x^2 + 2y^2 = 4;$$

$$2.\ \frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{2} = 3;$$

$$3.\ 2x^2 - 16x + 2y - 7 = 0.$$

Решение

Последовательно приводя к каноническому виду уравнения, определим тип кривых и построим их.

1. В первом уравнении $x^2 + 2y^2 = 4$ поделим обе части на 4:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{2y^2}{4} = 1 \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Последнее уравнение определяет эллипс (рис. 8) с центром в начале координат, полуоси которого $a = 2,\ b = \sqrt{2}$.

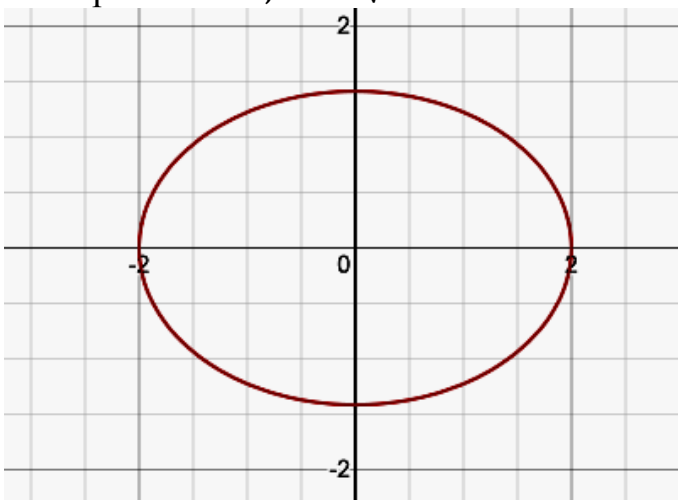


Рис. 8

2. Обе части второго уравнения $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{2} = 3$ поделим на 3:

$$\frac{x^2}{12} - \frac{3y^2}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

Получили уравнение гиперболы (рис. 9) с центром в начале координат, полуоси которого $a = 2\sqrt{3},\ b = \sqrt{2}$.

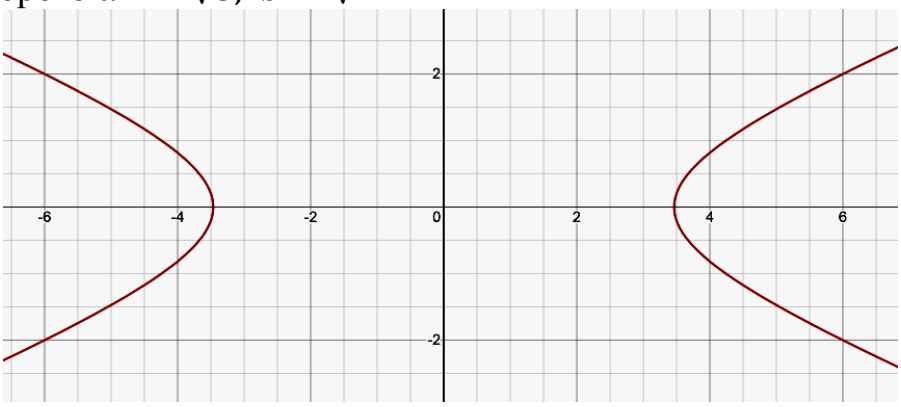


Рис. 9

3. В третьем уравнении $2x^2 - 16x + 2y - 7 = 0$ выделим полный квадрат для x, затем приведем подобные члены и получим каноническое уравнение кривой:

$$2(x^2 - 8x + 16 - 16) + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 2(x-4)^2 - 39 + 2y = 0 \Rightarrow$$
$$2(x-4)^2 = 39 - 2y \Rightarrow (x-4)^2 = -\left(y - \frac{39}{2}\right).$$

Последнее уравнение определяет параболу (рис. 10), вершина которой находится в точке с координатами $\left(4, \frac{39}{2}\right)$, ветви которой направлены вниз симметрично относительно прямой $x = 4$.

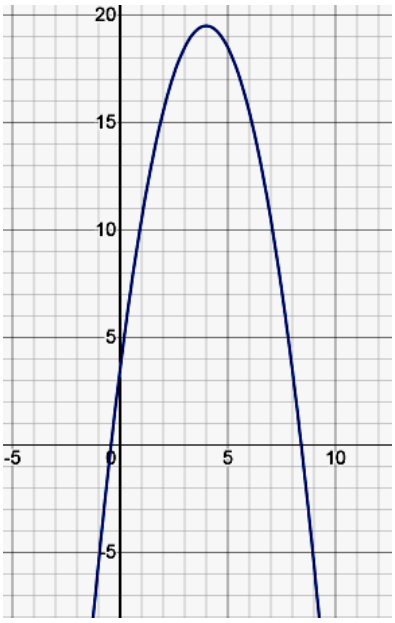


Рис. 10

Для визуального представления решения данных примеров рекомендуем посмотреть видео, в котором подробно разобрано выделение полного квадрата.

Видеоподсказка

Рекомендуем посмотреть видео о выделении полного квадрата.

https://www.youtube.com/watch?v=hp8-dzv25VE

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данном разделе представлены задачи по пределам и производным функции одного аргумента (задания 2.1–2.5) и функций двух переменных (задание 2.6). Для самостоятельного изучения данного раздела математики перед началом решения типовых задач приведем основные понятия, определения и свойства пределов и производных функций одного аргумента, затем и понятия частного дифференцирования для функций двух переменных и связанных с этим приложений.

Задание 2.1

Предел функции на бесконечности, вычисление предела

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого положительного числа ε, каким бы малым оно ни было, найдется положительное число N, такое, что для всех $x>N$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$.

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to +\infty$, если ее предел равен нулю, т.е. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Примером бесконечно малой функции служит $y = {}^{1}/_{x^n}, \quad n > 0.+$

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to +\infty$, если ее предел равен бесконечности, т.е. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями. Если $f(x) -$ бесконечно малая функция, то ${}^{1}/_{f(x)} -$ бесконечно большая, т.е. $\frac{1}{0} = \infty$. И наоборот, если $f(x) -$ бесконечно большая функция, то ${}^{1}/_{f(x)} -$ бесконечно малая, т.е. $\frac{1}{\infty} = 0$.

Свойства пределов

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \to a$ (a – число конечное или бесконечное). Тогда справедливо:

1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$;
2) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$;
3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, если $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$;
4) $\lim_{x\to a}[A \cdot g(x)] = A \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$, A – постоянный множитель.

В результате вычисления пределов возникают неопределенности видов: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$. Последняя неопределенность $0 \cdot \infty$ может быть сведена к двум предыдущим, следующим образом: $0 \cdot \infty = \frac{0}{1/\infty} = \frac{0}{0}$ или $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{1/0} = \frac{\infty}{\infty}$.

Задача

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 100x^2 + 1}{100x^3 + 15x}.$$

Решение

В результате подстановки предельного значения $x = +\infty$ получаем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Раскроем эту неопределенность, вынесением старшей степени аргумента за скобки:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 100x^2 + 1}{100x^3 + 15x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{100}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(100 + \frac{15}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{100}{x} + \frac{1}{x^3}}{100 + \frac{15}{x^2}} = \frac{1}{100},$$

так как $1/_{x^n} \to 0$.

Видеоподсказка

Посмотрите видео с примерами решения пределов.

https://www.youtube.com/watch?v=ZtQ5tGNA9MY

Предел функции в точке. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Первый и второй замечательные пределы

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \epsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$, при этом пишут $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

При подстановке в первый замечательный предел значения $x = 0$, получаем неопределенность вида $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$. Этот предел показывает, что функции числителя и знаменателя при $x \to 0$ являются эквивалентными функциями. Напомним, функции $f(x)$, $g(x)$ будут эквивалентными при $x \to a$, если существует предел $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, при этом принято писать: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

Видеоподсказка

Рекомендуем посмотреть решение следующих примеров.

https://www.youtube.com/watch?v=HKmGpUemCiE

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e; \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Второй замечательный предел после подстановки предельных значений x сводится к неопределенности вида 1^{∞}.

Задача

Вычислить предел.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

Здесь от неопределённости вида $\frac{0}{0}$ избавились, разложив многочлены на множители.

Задача

Вычислить предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}}{3x^2-10x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}\right)}{(3x-1)(x-3)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{-2(x-3)}{(3x-1)(x-3)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{-2}{(3x-1)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{-1}{16}.$$

Здесь, после подстановки предельного значения $x = 3$, получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$, для избавления от которой многочлен в знаменателе разложили на множители, а числитель умножили и поделили на сопряженное ему выражение.

Задача

Используя первый замечательный предел, найти:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{sin3x}.$$

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{xcos2x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{cos2x}=2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2({}^{x}/_{2})}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin({}^{x}/_{2})}{x}\right)^2=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin({}^{x}/_{2})}{2({}^{x}/_{2})}\right)^2$$
$$=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{sin3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x(3x-5)}{3sin3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x-5}{3}=-\frac{5}{3}.$$

Задача

Вычислить предел.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-1}{6x-4}\right)^{3x}=1^{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{6x-4}\right)^{\frac{6x-4}{3}}\right]^{3x\frac{3}{6x-4}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{9x}{6x-4}}=e^{\frac{9}{6}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Сначала необходимо в предел подставить предельное значение x, в случае получения неопределённости вида 1^{∞}, выделить целую часть дроби, стоящую в скобках. Затем смоделировать степень этой дроби, согласно структуре второго замечательного предела. Применить замечательный предел и вычислить оставшуюся часть предела.

Задача

Вычислить предел $\lim_{x\to\infty}(x+3)ln\frac{x+1}{x+2}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)ln\frac{x+1}{x+2}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{(x+3)}=ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{(x+3)}$$

$$=ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(2+\frac{1}{x+2}\right)^{(x+2)}\right]^{\frac{1}{x+2}(x+3)}=ln\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x+3}{x+2}}=lne=1.$$

Задание 2.1 связано с вычислением пределов функций, рассмотрим основные типы пределов на примере следующих пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3}{3(x-1)(x+3)^2+1},$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{tgx}\cdot x}{\sqrt[3]{x^2 sin2x}},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-2x}{3-2x}\right)^{1-2x}.$$

Напомним, что вычисление любого предела начинается с подстановки вместо x его предельного значения и в случае, если возникают неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$, избавляемся от них способами, изложенными ниже.

Решение

Первый предел – предел алгебраической функции на бесконечности, после подстановки вместо x его предельного значения ∞, получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, для избавления от которой выносим за скобки в числителе и в знаменателе x в старшей степени, при этом в скобках некоторые слагаемые степенные функции преобразуются в бесконечно малые величины, которые стремятся к нулю при неограниченном росте x, т.е. $\frac{1}{\infty} = 0$. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3}{3(x-1)(x+3)^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1+2/x)^3}{x^3(3(1-1/x)(1+3/x)^2+1/x^3)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+2/x)^3}{(3(1-1/x)(1+3/x)^2+1/x^3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+0)^3}{(3(1-0)(1+0)^2+0)} = \frac{1}{3}.$$

Второй предел – это предел алгебраической функции в точке, после подстановки вместо x его предельного значения, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая указывает на то, что предельная точка является корнем для алгебраических функций числителя и знаменателя, поэтому, согласно теореме о разложении, их можно разложить по корням. Однако, в нашем примере функция знаменателя иррациональная и нужно избавиться от квадратного корня, умножив числитель и знаменатель на сопряженное выражение к знаменателю, в знаменателе получится формула сокращенного умножения – разность квадратов:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{2}\right)}{(x-4-2)} = \lim_{x\to 6}\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Далее рассмотрим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1.$$

С помощью этого предела стало возможным вычислять пределы от неалгебраических функций, приводящие к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Третий предел будем вычислять, подгоняя его под первый замечательный предел. Для этого выражаем функции, стоящие под знаком предела, через функцию синуса, заметим также, что в замечательном пределе аргумент синуса должен равняться

функции, стоящей в знаменателе, которая стремится к нулю. Будем моделировать замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{tgx}\cdot x}{\sqrt[3]{x^2 sin2x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{\frac{sinx}{x\cdot cosx}\cdot x}}{\sqrt[3]{x^2\frac{sin2x}{2x}\cdot 2x}}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{3/2}}{\sqrt{cosx}}}{\lim\limits_{x\to 0}x^{3/2}\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}}\cdot\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{cosx}}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Последний предел – второй замечательный предел, который позволяет работать с неопределённостью вида 1^{∞}:

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e.$$

Наша задача, подвести вычисляемый нами предел, имеющий этот вид неопределенности ко второму замечательному пределу. Дробь, стоящая в скобках неправильная, выделяя целую часть ее, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-2x}{3-2x}\right)^{1-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-2x+2}{3-2x}\right)^{1-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3-2x}\right)^{1-2x}=1^{\infty}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3-2x}\right)^{1-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3-2x}\right)^{\frac{3-2x}{2}}\right)^{\frac{2}{3-2x}(1-2x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2}{3-2x}(1-2x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(1-2x)}{3-2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x(1/x-2)}{x(\frac{3}{x}-2)}}=e^{\frac{-4}{-2}}=e^2.$$

Видеоподсказка

Рекомендуем посмотреть решение следующего примера для закрепления пройденного материала.

https://www.youtube.com/watch?v=zDwZAiAUge4

Задание для закрепления материала

Самостоятельно выполните следующее задание.

1. $\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{7}$

2. $\lim_{x\to -7}\frac{x^2+8x+7}{x^2-49}$

3. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x}$

4. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^2+x+1}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{6x^2 sinx}{sinx^3 2x}$

Проверьте себя, используя QR-код.

Задание 2.2

Найти производные

Прежде чем разберем типовые задачи по нахождению производных, напомним таблицу производных основных элементарных функций.

Таблица производных и правила дифференцирования

1. $c' = 0,$

2. $(u+v-w)' = u' + v' - w',$

3. $(cu)' = cu',$

4. $(uv)' = u'v + v'u,$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$

6. $y'_x = y'_z\, z'_x\,,$

11. $(\mathrm{tg}\, x)' = \sec^2 x,$

12. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\mathrm{cosec}^2 x,$

13. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$

14. $(\ln x)' = \frac{1}{x},$

15. $(a^x)' = a^x \ln a\,,$

16. $(e^x) = e^x,$

$7. x'_y = \frac{1}{y'_x}$, $\quad$ $17.\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$8. (x^n)' = nx^{n-1}$, $\quad$ $18.\ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$9. (\sin x)' = \cos x$, $\quad$ $19. (\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

$10. (\cos x)' = -\sin x$, $\quad$ $20. (\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Напомним, что $secx = \frac{1}{cosx}$, $cosecx = \frac{1}{sinx}$.

Найти производные следующих функций:

$y = x\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $y = lntg(3x)$

$y = \frac{cos2x}{1-sinx}$ $\quad$ $\frac{x}{y} = arcsin\frac{y}{x}$

$y = x^{cos^2 x}$

Заметим, что этот набор функций содержит в основном сложные функции, а также функцию, заданную неявно. Подробно разберём каждую производную.

Решение

Производная функции $y = x\sqrt{1-x^2}$ находится согласно правилу производной от произведения:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$\left(x\sqrt{1-x^2}\right)' = x' \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \sqrt{1-x^2} + \frac{x \cdot (-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производная следующей функции $y = \frac{cos2x}{1-sinx}$ находится по правилу дифференцирования частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$$

$$\left(\frac{cos2x}{1-sinx}\right)' = \frac{(cos2x)' \cdot (1-sinx) - (1-sinx)' \cdot cos2x}{(1-sinx)^2} =$$

$$= \frac{-2sin2x \cdot (1-sinx) + cosx \cdot cos2x}{(1-sinx)^2}.$$

Здесь и выше использовали правило дифференцирования сложной функции:

$$y = f\big(g(x)\big) \Rightarrow\ y' = f'_g \cdot g'(x).$$

Воспользуемся этой формулой также для дифференцирования функции $y = lntg(3x)$:

$$y' = \big(lntg(3x)\big)' = \frac{1}{tg3x} \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{3}{sin3x \cdot cos3x}.$$

Логарифмическое дифференцирование. Рассмотрим сложную логарифмическую функцию $z(x) = ln(y(x))$, тогда ее производная равна $z' = (lny)' = \frac{y'}{lny}$

Дифференцирование показательно-степенных функций $y = u(x)^{v(x)}$, где функции $u(x), v(x) -$ дифференцируемые в некотором промежутке функции.

Для дифференцирования таких функций, как правило, применяют способ логарифмирования с последующим дифференцированием логарифмической функции. Действительно, если $y = u(x)^{v(x)}$, тогда $lny = lnu(x)^{v(x)} = v(x)lnu(x)$, продифференцируем обе части уравнения по аргументу x:

$$(lny)' = (v(x)lnu(x))'$$

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot lnu(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Таким образом, для производной y' имеем:

$$y' = y\left(v'(x) \cdot lnu(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Для дифференцирования функции $y = x^{cos^2 x}$ воспользуемся логарифмической производной:

$$y = x^{cos^2 x}\ \Rightarrow lny = lnx^{cos^2 x} = cos^2 x \cdot lnx$$

$$(lny)' = (cos^2 x \cdot lnx)' = (cos^2 x)' \cdot lnx + cos^2 x \cdot (lnx)' =$$

$$= 2cosx \cdot (-sinx) \cdot lnx + \frac{cos^2 x}{x} = -sin2x \cdot lnx + \frac{cos^2 x}{x}.$$

$$\left(x^{cos^2 x}\right)' = x^{cos^2 x} \cdot \left(-sin2x \cdot lnx + \frac{cos^2 x}{x}\right).$$

Следующая функция $\frac{x}{y} = arcsin\frac{y}{x}$ – неявная. Неявной функцией y аргумента x называется функция, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$. Для нахождения производной функции $y(x)$ нужно продифференцировать уравнение $F(x, y) = 0$ по переменной x, полагая y – функцией от x. В нашем случае дифференцируем обе части уравнения по переменной x:

$$\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \left(arcsin\frac{y}{x}\right)'_x$$

$$\frac{y - xy'}{y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \frac{xy' - y}{x^2}$$

$$y - xy' = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{xy' - y}{x}$$

$$-xy' - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}y' = \frac{-y^3}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{1}{x} - y$$

$$y'\left(x + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{1}{x} + y$$

$$y' = \frac{\frac{y^3}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{1}{x} + y}{x + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}} = \frac{y\left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{1}{x} + 1\right)}{x + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}} = \frac{y\frac{y^2 + x\sqrt{x^2 - y^2}}{x\sqrt{x^2 - y^2}}}{\frac{y^2 + x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}}} = \frac{y}{x}.$$

Исследование функции на монотонность и экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции

Задача

Исследовать возрастание и убывание функции $y = 2x^3 - 3x^2$.

Решение

Проверим выполнение достаточного условия возрастания и убывания функции, для этого найдем производную функции, приравняем ее к нулю и определим интервалы ее знакопостоянства:

$$y' = 6x^2 - 6x = 0 \qquad 6x(x - 1) = 0\,.$$

Уравнение имеет корни $x = 0,\ x = 1$. Эти числа разбивают действительную ось на три интервала. При этом, $y' > 0$, если $x \in (-\infty, 0) \cup (1, = \infty)$, следовательно, функция здесь возрастает. При $x \in (0,1)$ функция убывает, поскольку там $y' < 0$.

Задача

Исследовать функцию $y = (x - 5)e^x$ на экстремум.

Решение

Находим производную функции и приравниваем ее к нулю, получаем точки, подозрительные на экстремум:

$$y' = e^x + (x - 5)e^x = (x - 4)e^x = 0.$$

$x = 4$ делит вещественную ось на два интервала монотонности функции $y = (x - 5)e^x$. Проверим знак производной в каждом интервале: при $x < 4$ $y' < 0$, следовательно, функция убывает, при $x > 4$ $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому точка $x = 4$ является точкой минимума функции $y = (x - 5)e^x$.

Задание 2.3

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x - x^3$ на отрезке [-2,3].

Решение

Известно, что функция, ограниченная на замкнутом множестве достигает своих максимальных и минимальных значений как внутри области, так и на ее границе. Следовательно, исследуем функцию на экстремум и проверим значения на концах интервала.

$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 0$, решением уравнения является пара точек $x = -1,\ x = 1$. Эти точки лежат внутри отрезка [-2,3]. Проверяя знаки производной, имеем, функция $y = 3x - x^3$убывает в интервалах $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и возрастает на $(-1,1)$. $x = -1$ –точка минимума, $x = 1$ – точка максимума. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке найдем значения функции в точках экстремума и на концах промежутка:

$$y(-2) = 3 \cdot (-2) - (-2)^3 = 2,$$
$$y(-1) = 3 \cdot (-1) - (-1)^3 = -2,$$
$$y(1) = 3 \cdot 1 - 1^3 = 2,$$
$$y(3) = 3 \cdot 3 - 3^3 = -18.$$

Таким образом, наибольшее значение функции на отрезке [-2,3] равно 2, оно достигается в точках $= -2,\ x = 1$. Наименьшее значение равно -18, достигается в точке $x = 3$.

Видеоподсказка

Рекомендуем посмотреть видео о поиске наибольшего и наименьшего значения функции.

https://www.youtube.com/watch?v=e3KfTVfFg8A

Задание для закрепления материала

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

$$f(x) = 8x + \frac{4}{x^2} - 15, \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

Проверьте себя.

Схема исследования функции и построения ее графика

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на непрерывность.
3. Исследовать функцию на четность.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функций; найти точки разрыва и определить их характер.
5. Исследовать поведение функции на границах области определения, найти асимптоты.
6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
7. Исследовать направление выпуклости графика функции, найти точки перегиба.
8. Составить таблицу значений функции для некоторых значений ее аргумента
9. Исследовать все полученные результаты, построить график функции.

Задание 2.4

Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x-2}$ и построить ее график.

1. Область определения функции: $x\neq 2$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. График пересекает оси в точках $(-1,0)$ и $(0,-½)$ точка разрыва $x=0$. Отметим интервалы знакопостоянства функции: $(-\infty,-1)$ и $(-1,\ 2)$ – здесь функция принимает лишь отрицательные значения; $(2,+\infty)$ – здесь функция принимает положительные значения.

5. Находим

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+2x+1}{x-2}=-\infty,\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2+2x+1}{x-2}=\infty.$$

График функции имеет вертикальную асимптоту $x=2$.

Далее имеем $\quad \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x-2}=\infty.$

Найдем коэффициенты наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x(x-2)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4.$$

$y=x+4$ – наклонная асимптота.

6. Найдем интервалы возрастания и убывания функции. Имеем

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+2x+1}{x-2}\right)'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

$$f'(x)>0 \text{ при } x>5,\ x<-1;$$

$$f'(x)<0 \text{ при } -12<x<2,\ 2<x<5.$$

Значит, функция возрастает на лучах $(-\infty,-1]\,\mathrm{Y}\,[5,\ +\infty)$ и убывает на промежутках $[-1,2)\,\mathrm{Y}\,(2,\ 5,]$.

Найдем точки экстремума функции:

$x = -1$– точка максимума, $y=0$;
$x = 5$– точка минимума, $y= 12$.

7. Исследуем функцию на выпуклость. Для этого найдем вторую производную данной функции:

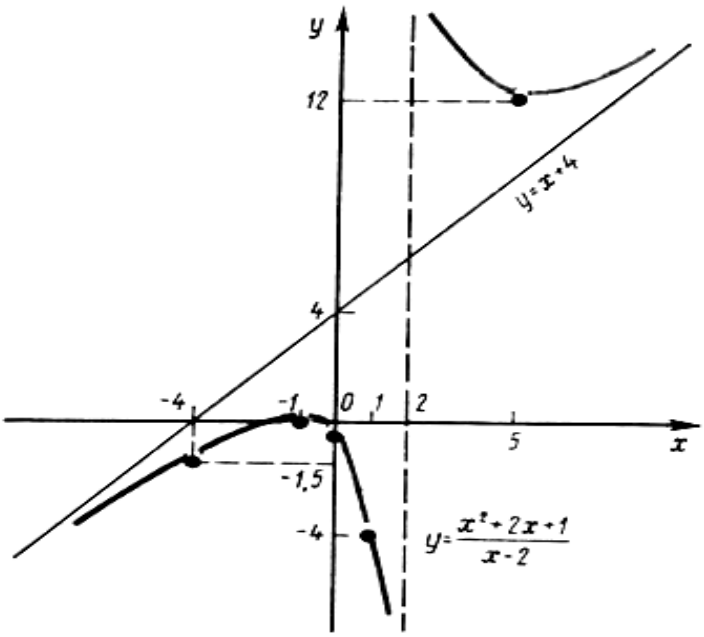
$$f''(x)=\left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)\left(x^2-4x-5\right)}{(x-2)^4}=\frac{18}{(x-2)^3};$$

$f''(x)>0$ при $x>2$ – здесь функция вогнута вверх;
$f''(x)<0$ при $x<2$ – здесь функция выпукла вверх.

8. Составим таблицу значений функции для некоторых значений аргумента.

x	-4	-1	0	1	5
$f(x)$	-1,5	0	-0,5	-4	12

9. Строим график.



Задание для закрепления материала

Предлагаем самостоятельно провести полное исследование функции $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

После выполнения задания, проверьте себя.

Задание 2.5

В тексте задания фигурирует параметр m, который соответствует второй цифре справа в номере зачетной книжки, выбор номера задания соответствует последней цифре номера зачетной книжки. Данное задание на нахождение наибольшего значения величины, задаваемой в тексте задачи. Текстовая задача требует составления уравнения с последующим его решением. Рассмотрим пример выполнения типового задания.

Задача

Из углов квадратного листа картона размером $m \times m$ дм^2 нужно вырезать одинаковые квадраты, чтобы после сгибания оставшихся частей картона получилась коробка. Необходимо определить размеры вырезанных квадратов так, чтобы объем коробки был наибольшим.

Решение

Обозначим размеры сторон вырезанных квадратов через x, тогда после сгибания основание коробки будет иметь размер $(m-2x) \times (m-2x)$ дм^2, высота коробки равна x. Тогда объем коробки вычислим по формуле $V = (m-2x)^2 x$. Необходимо найти наибольшее значение функции $V(x)$. Для этого дифференцируем ее по переменной x и производную приравниваем к нулю, находим x, который удовлетворяет также и условию $m - 2x > 0$.

$$V = (m-2x)^2 x = m^2 x - 4mx^2 + 4x^3.$$

$$V' = m^2 - 8mx + 12x^2$$

$$m^2 - 8mx + 12x^2 = 0 \;\Rightarrow\; D = 64m^2 - 4 \cdot 12m^2 = 16m^2.$$

$$x_{1,2} = \frac{8m \pm 4m}{24} = \left[\begin{array}{l} \frac{m}{2} \\ \frac{m}{6}, \end{array}\right.$$

$x_1 = \frac{m}{2}$ не удовлетворяет условию $m - 2x > 0$, поэтому остается единственное решение $x_2 = \frac{m}{6}$. Наибольший объем $V = (m - \frac{m}{3})^2 \frac{m}{6} = \frac{2m^3}{27}$дм^3 достигается при высоте коробки, равной $\frac{m}{6}$ дм.

Задание 2.6

Задание 2.6 контрольной работы № 2 относится к дифференцированию функций двух переменных, состоит из трех заданий.

Рассмотрим основные понятия по дифференциальному исчислению функций двух переменных, которые будут использоваться при решении этих задач.

Частной производной функции $z = f(x,y)$ по x называется предел (если такой существует) отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции к частному приращению Δx этой переменной при стремлении последнего к нулю, и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$.

Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Аналогично определяется частная производная $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ от функции $z = f(x, y)$ по y $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

Заметим, что если от функции $z = f(x, y)$ берется частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, то y считается постоянным; если же находится $\frac{\partial z}{\partial y}$, то x считается постоянным и $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d}{dx}[f(x, y)]_{y=const}$; $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d}{dy}[f(x, y)]_{x=const}$.

Производная по данному направлению

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в области w. Рассмотрим некую точку $M(x,y) \in w$ и некоторое направление l, определяемое направляющими косинусами $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ (рис. 11).

При перемещении в данном направлении l точки $M(x, y)$ в точку M' $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in w$ функция $z = f(x, y)$ получает приращение $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, которое называется <u>приращением функции в данном направлении l</u>.

Если $MM' = \Delta l$ есть величина перемещения точки M, то из прямоугольного треугольника MPM' получаем: $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos \beta$.

Следовательно, $\Delta_l z = f(x + \Delta l \cos \alpha, y + \Delta l \cos \beta) - f(x, y)$.

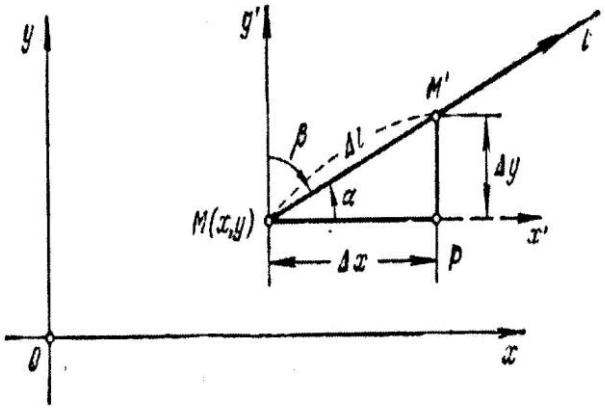


Рис. 11

Под производной $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ функции z в данном направлении l понимается предел отношения приращения функции в данном направлении к величине приращения при условии, что последняя стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

С этой точки зрения производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ можно рассматривать, как производные функции z в положительных направлениях осей координат Ox, Oy.

Числовая формула для производной функции в данном направлении:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta .$$

Вектор градиент функции $z = f(x,y)$ – вектор, определяющий направление наискорейшего ее изменения, обозначается как:

$$grad\ z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right\}.$$

Рассмотрим типовые примеры решения.

1. Показать, что для функции $z = x^y$ справедливо равенство:

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + ylnx)\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Решение

Найдем частные производные, учитывая, что функция $z = x^y$ является относительно x – степенной, а относительно y – показательной функцией, следовательно, при дифференцировании по каждой переменной этот факт нужно учесть.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1}lnx.$$

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + ylnx)\frac{\partial z}{\partial x} = y(x^{y-1} + yx^{y-1}lnx) - (1 + ylnx)yx^{y-1} =$$
$$= yx^{y-1}[(1 + ylnx) - (1 + ylnx)] \equiv 0.$$

2. Найти градиент функции $z = e^{x+5y^2} + 2x$ в точке $A(0,1)$.

Решение

Вектор градиент функции определяется в виде: $grad\, z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right\}$. В каждой точке A определяется числовым вектором: $grad\, z|_A = \left\{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\right\}$. Найдем для заданной функции частные производные и вычислим из значения в заданной точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+5y^2} + 2; \ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+5y^2}10y.$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = e^5 + 2; \ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = 10e^5.$$

Окончательно имеем: $grad\, z|_A = \{e^5 + 2; 10e^5\}$.

3. Для функции $z = \ln(x^2 + 5y^2) + 2x$ найти производную в точке $A(-1,2)$ по направлению вектора $\vec{a} = (2, -1)$.

Решение

Воспользуемся формулой для нахождения производной по направлению в заданной точке:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cos\beta,$$

где $cos\alpha, cos\beta$ −направляющие косинусы направления l.

Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (2, -1)$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+5y^2} + 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{10y}{x^2+5y^2}.$$

Вычислим их значения в точке $A(-1,2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = \frac{-2}{1+20} + 2 = \frac{40}{21}; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = \frac{20}{21}.$$

Подставим найденные величины в формулу производной по направлению в точке, получим:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{40}{21} + \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{20}{21} = \frac{20}{7\sqrt{5}}.$$

Видеоподсказка

Рекомендуем посмотреть видео о нахождении частных производных функции двух переменных.

https://youtu.be/85vnW-kXELg

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 484 с.

2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том второй. – М.: Изд-во «Наука», 2000. – 656 с.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов / Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов; под ред. Р.Ш. Марданова. – Казань: Гос. ун-т, 2009. – 576 с.

4. Горская Т.Ю. Конспект лекций по курсу математика. Дифференциальное исчисление. – Казань: КГЭУ, 2008. – 108 с.

5. Сборник задач по темам «Пределы. Производные» для студентов дневного отделения (бакалавриат), направления 270800.62 «Строительство» / Н.К. Туктамышов, Т.Ю. Горская. – Казань: КГАСУ, 2015. – 32 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…….. 3
ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ…….. 4
1. АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ……..... 5
Задание 1.1……..... 5
Задание 1.2…… 12
Задание 1.3…… 19
Задание 1.4…… 23
2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ…… 26
Задание 2.1…… 26
Задание 2.2…… 33
Задание 2.3…… 37
Задание 2.4…….. 39
Задание 2.5…… 41
Задание 2.6…… 42
Список использованной литературы…….. 46

Горская Татьяна Юрьевна
Хасанова Энже Назиповна

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для решения задач по темам
«Алгебра и аналитическая геометрия»,
«Дифференциальное исчисление функции одной и двух переменных»
для студентов заочной формы обучения направления подготовки
08.03.01 «Строительство» (бакалавриат)