

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

---

**КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра физики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ**  
для студентов специальностей 060811, 060815, 240400, 290300, 290600,  
290700, 290800, 291000, 550100

Казань  
2012

## КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

**Колебаниями** называются процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости во времени.

Простейшим типом колебаний являются так называемые гармонические колебания. Колебания какой-либо физической величины называются гармоническими, если она изменяется со временем по закону косинуса или синуса, т.е.

$$s = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Здесь  $s$  — мгновенное значение колеблющейся величины;  $A$  — амплитуда колебания, т.е. наибольшее значение, которое может принимать колеблющаяся величина;  $(\omega t + \alpha)$  — фаза колебания;  $\alpha$  — начальная фаза колебания, т.е. фаза колебания в момент времени  $t = 0$ ;  $\omega$  — циклическая частота колебаний, которая показывает сколько колебаний совершается за  $2\pi$  секунд;  $\nu = 1/T$  — частота колебаний, т.е. число колебаний, совершаемых за одну секунду;  $T$  — период колебаний, т.е. время одного полного колебания.

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике. Качание маятника часов, волны на воде, переменный электрический ток, свет, звук, радиоволны и т.д. являются примерами колебаний различных физических величин.

Несмотря на различие физической природы различного вида колебаний, у них существует общность ряда закономерностей и единство математического аппарата для их изучения. Это позволяет выделить в качестве одного из разрядов физики учение о колебаниях и волнах.

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

**Колебательной** называют систему, в которой могут происходить колебания. Примерами такой системы является пружинный маятник, колебательный контур и т.д.

Колебания, происходящие в колебательной системе, выведенной из состояния равновесия и представленной самой себе, называются **свободными колебаниями**. Свободные колебания всегда являются затухающими, так как энергия, сообщённая колебательной системе, постоянно убывает. Это уменьшение энергии в зависимости от вида колебаний обусловлено

различными причинами. Например, при электромагнитных колебаниях, происходящих в колебательном контуре, электромагнитная энергия, запасённая в контуре, превращается в теплоту, поскольку при протекании электрического тока в контуре, согласно закону Джоуля — Ленца, будет происходить нагревание индуктивности.

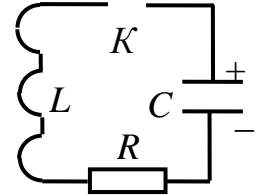


Рис. 1

Рассмотрим колебательный контур (рис. 1). Составим дифференциальное уравнение, описывающее колебания, происходящие в контуре. Пусть в начальный момент ( $t = 0$ ) времени конденсатору сообщён некоторый заряд  $q$ . После замыкания ключа  $K$  в контуре возникает электрический ток  $i$ , который вызывает в индуктивности  $L$  э.д.с. самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ , равную  $\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}$ . По второму правилу Кирхгофа сумма напряжений в любом замкнутом контуре равна сумме э.д.с., входящих в этот контур. В данном случае напряжение  $U_R$  на резисторе и  $U_C$  на ёмкости равно  $iR$  и  $q/C$  соответственно. Единственной э.д.с. в контуре является  $\mathcal{E}_s$ . Следовательно, уравнение Кирхгофа для контура имеет вид:

$$U_R + U_C = \mathcal{E}_s \quad \text{или} \quad iR + \frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}.$$

Преобразуя это уравнение и учитывая, что  $i = \frac{dq}{dt}$  и  $\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dq}{dt} \right) = \frac{d^2q}{dt^2}$ , получаем:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (1)$$

Введём обозначения:

$$\frac{R}{L} = 2\beta \quad \text{и} \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3)$$

Получили дифференциальное уравнение (3), описывающее колебания заряда на конденсаторе колебательного контура.

Подстановкой легко убедиться, что решением дифференциального уравнения (3) является функция

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cdot \cos \omega t, \quad (4)$$

где  $q$  — начальный заряд на конденсаторе при  $t = 0$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — циклическая частота колебаний, происходящих в контуре;  $\beta$  — постоянная, называемая коэффициентом затухания. Формула (4) имеет физический смысл только в том случае, если  $\omega$  — действительная величина, т.е. если выполнено условие

$$\omega_0^2 > \beta^2. \quad (5)$$

Используя формулу (4), можно найти зависимость напряжения  $u$  на конденсаторе от времени:  $u = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos \omega t$ . Но  $\frac{q_0}{C} = U_0$  — начальное напряжение на конденсаторе при  $t = 0$ . Следовательно,

$$u = U_0 e^{-\beta t} \cdot \cos \omega t. \quad (6)$$

Придадим формуле (6) иной вид:

$$u = U_m(t) \cdot \cos \omega t, \quad (7)$$

где

$$U_m(t) = U_0 e^{-\beta t}. \quad (8)$$

Величину  $U_m(t)$  можно рассматривать как амплитуду затухающих колебаний. Видно, что амплитуда убывает по экспоненциальному закону. Итак, решая дифференциальное уравнение (3), приходим к выводу, что в колебательном контуре происходят колебания с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , причём напряжение на обкладках конденсатора изменяется по закону (7). График функции (7) приведён на рис. 2. График функции (8) показан на рис. 2 пунктирной линией. Из формулы (5) с учётом выражения (2) следует, что в колебательном контуре

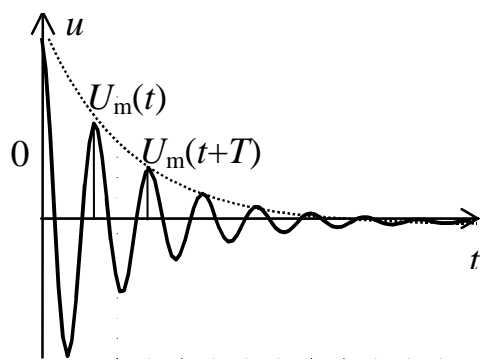


Рис. 2

колебания происходят, если  $R < 2\sqrt{L/C}$ . При  $R \geq 2\sqrt{L/C}$  будет происходить аperiodический (непериодический) разряд конденсатора. График этого процесса изображён на рис. 3.

Для характеристики затухающих колебаний вводится специальная величина, называемая логарифмическим декрементом затухания. Возьмём отношение двух амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на один период

(рис. 2), т.е.  $U_m(t) / U_m(t + T)$ . *Натуральный логарифм этого отношения называют логарифмическим декрементом затухания  $d$* , т.е.

$$d = \ln \frac{U_m(t)}{U_m(t+T)} \quad (9)$$

Выясним физический смысл логарифмического декремента затухания. Используя формулы (8) и (9), запишем:

$$d = \ln \frac{U_0 e^{-\beta t}}{U_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Введём промежуток времени  $\tau$ , за который амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз ( $e \approx 2,718$  — основание натурального логарифма), т.е.

$$\frac{U_m(t)}{U_m(t+\tau)} = \frac{U_0 e^{-\beta t}}{U_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta \tau} = e.$$

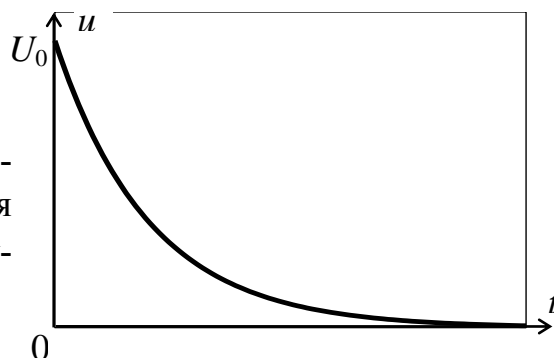


Рис. 3

Отсюда следует, что  $\beta \tau = 1$  и  $\beta = 1/\tau$ , т.е. коэффициент затухания обратно пропорционален промежутку времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Обозначим через  $N_e$  число колебаний, по совершении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Тогда  $\tau/T = N_e$  и  $d = \beta T = 1/(\tau/T) = 1/N_e$ .

Следовательно, логарифмический декремент затухания обратно пропорционален числу колебаний, совершаемых за промежуток времени, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

### СХЕМА УСТАНОВКИ

Для изучения затухающих колебаний, происходящих в колебательном контуре, собрана схема, приведённая на рис. 4.

Схема состоит из источника тока  $\mathcal{E}$ , электронного ключа  $\mathcal{ЭК}$ , переключателя  $\Pi$ , колебательного контура с индуктивностью  $L$ , ёмкостью  $C$  и набором резисторов  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Меняя положение переключателя  $\Pi$ , в контур включаются различные резисторы.

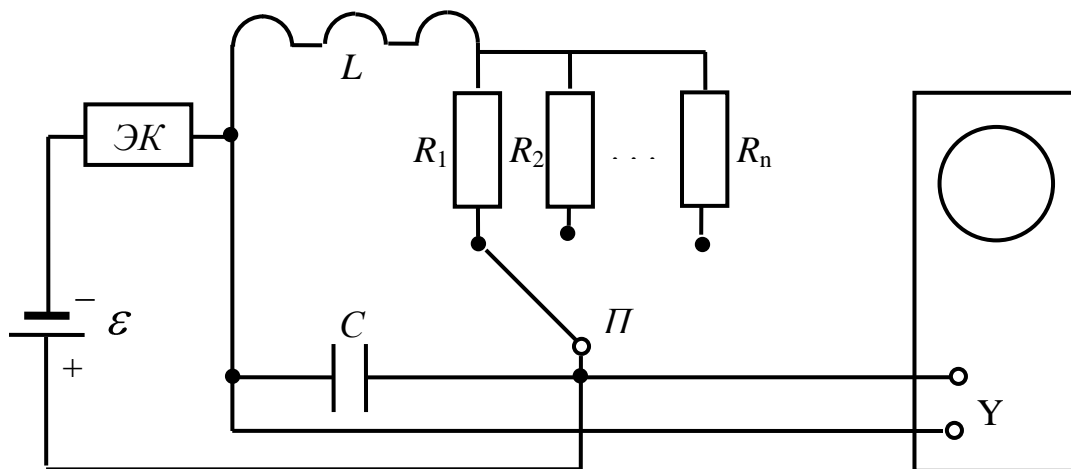


Рис. 4

Напряжение от источника тока через электронный ключ  $ЭК$  в течение очень малого промежутка времени (порядка нескольких мкс) подаётся на конденсатор  $C$  колебательного контура. Под действием приложенного напряжения он заряжается. Сразу же после зарядки конденсатора электронный ключ  $ЭК$  отключает источник тока от контура. Промежуток времени между двумя последовательными включениями или отключениями электронного ключа  $ЭК$  больше времени, в течение которого колебания в контуре прекращаются. Поэтому в колебательном контуре будут происходить свободные колебания.

В данной работе изучается зависимость напряжения  $u$  на конденсаторе колебательного контура от времени  $t$ . С этой целью исследуемое напряжение подаётся на "вход  $Y$ " осциллографа. На экране осциллографа наблюдается зависимость  $u = U(t) \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ , график которой аналогичен графику, приведённому на рис.2. Измеряя  $U_m(t)$  и  $U_m(t + T)$ , по формуле (9) определяют логарифмический декремент затухания. Меняя сопротивление контура, строят зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления контура.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Соедините выход со стенда с входом усилителя вертикального отклонения осциллографа (гнездо "  $Y$  ", расположенное на левой стороне осциллографа) специальным кабелем. Тумблеры "СИНХ" и "РАЗВЁР" на правой стороне осциллографа должны находиться в верхнем положении. **ПРОВЕРЬТЕ!**
2. Включите установку в сеть.
3. Включите осциллограф. Установите переключатель "  $Y$  " на передней панели осциллографа в положение "  $\sim$  ".
4. Поставьте переключатель  $II$  на стенде в крайне правое положение, а тумблер "СЕТЬ" в верхнее положение. При этом на экране осциллографа появится картина затухающих колебаний, аналогичная графику, приведённому на рис. 2. Если картина неустойчива или отсутствует, то с помощью ручек "СТАБ" и "УРОВЕНЬ", расположенных на передней панели осциллографа, добейтесь устойчивого изображения.
5. Измерьте амплитуды затухающих колебаний для моментов времени, отличающихся на период (рис. 2). Для этого ручкой  $\updownarrow$  совместите нулевую линию с горизонтальной линией, имеющей деление. Ручкой  $\leftarrow$  подведите одну из амплитуд к вертикальной оси с делениями и измерьте её в делениях. При этом ручку "U/ДЕЛ" надо поставить в такое положение, чтобы высота сигнала была как можно больше (ручка "УСИЛЕНИЕ" должна находиться в крайнем правом положении (**проследите!**)). Умножая это значение на показание ручки

"U/ДЕЛ", находим измеряемую амплитуду напряжения. Затем к вертикальной оси с делениями подведите другую амплитуду и измерьте её напряжение (рис. 5).

6. Проведите измерения, аналогичные измерениям, приведённым в пункте 5, с различными резисторами колебательного контура, переводя переключатель  $\Pi$  в разные положения, поворачивая ручку влево.
7. Отключите установку от сети.
8. Определите по формуле (9) логарифмический декремент затухания для всех сопротивлений с точностью до сотых долей. Данные занесите в таблицу.
9. Постройте зависимость  $d$  от  $R$ . Значения  $d$  откладывайте по оси ординат. При этом выберите такой масштаб, чтобы можно было откладывать сотые доли числа.
10. Результаты покажите преподавателю.

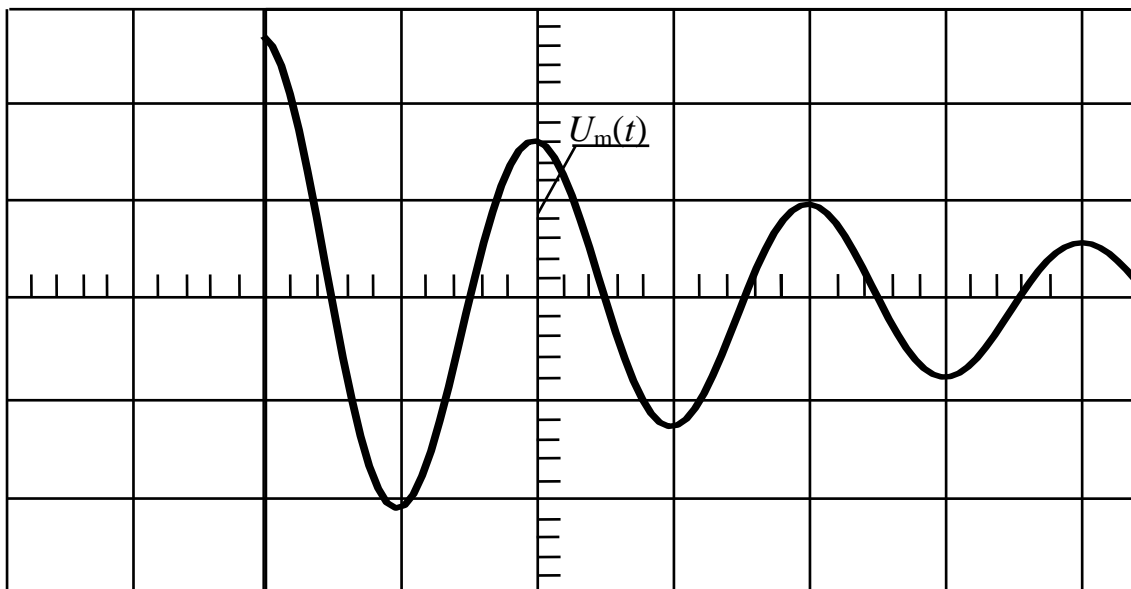


Рис. 5

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие процессы называются колебательными?
2. Какие колебания называют гармоническими и свободными?
3. Что такое амплитуда, фаза, частота, циклическая частота и период колебания?
4. Составьте дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Каков вид его решения?
5. Что называется логарифмическим декрементом колебаний? Каков его физический смысл?
6. Каков физический смысл коэффициента затухания?