

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-  
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

О.В. Радайкин

**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ  
ЗАДАЧ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**  
к выполнению практических заданий для магистрантов  
направления подготовки 08.04.01 «Строительство» по дисциплине  
«Методы решения научно-технических задач в строительстве»

Казань  
2018

УДК 001.8:69

ББК 38

P15

**Радайкин О.В.**

P15 Примеры решения научно-технических задач в строительстве: Учебно-методическое пособие к выполнению практических заданий для магистрантов направления подготовки 08.04.01 «Строительство» по дисциплине «Методы решения научно-технических задач в строительстве» / О.В. Радайкин. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун.-та, 2018. – 101 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

В учебно-методическом пособии приводится краткая теория, примеры решения различных научно-технических задач в строительстве: в области прочности конструкций, технологии их изготовления и монтажа, из сферы теплотехники и инженерного обеспечения и т.д.

Пособие предназначено для подготовки к практическим занятиям магистрантов направления подготовки 08.04.01 «Строительство» по дисциплине «Методы решения научно-технических задач в строительстве».

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры  
технологии строительного производства КГАСУ

**Р.Х. Мухаметрахимов**

УДК 001.8:69

ББК 38

© Казанский государственный  
архитектурно-строительный  
университет, 2018

© Радайкин О.В., 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
РЕШЕНИЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ .....	4
1.    Защита от подтопления загородного дома .....	4
2.    Задачи оптимального выбора для разработки технологии производства строительных материалов, изделий, конструкций и зданий.	19
3.    Задачи оптимального плана по выпуску продукции симплекс- методом.....	24
4.    Задача оптимального распределения рабочих на объектах методом динамического программирования.....	34
5.    Задача оптимизации железобетонного элемента, работающего на косоое внецентренное сжатие, итерационным методом «деления отрезка пополам»... ..	45
6.    Решение транспортной задачи методом потенциалов. ....	52
7.    Определение оптимального сечения центрально растянутого стального элемента.....	63
8.    Определение оптимального сечения изгибаемого элемента из клеёной древесины. ....	68
9.    Определение максимальной площади помещения гаража, отапливаемой регистрами заданной конструкции. Применение критериев подобия в задачах гидродинамики и теплотехники. ....	75
10.   Проектирование солнечного коллектора для системы отопления и горячего водоснабжения жилого дома. ....	81
ЛИТЕРАТУРА .....	101

## ВВЕДЕНИЕ

В учебно-методическом пособии приводится краткая теория, примеры решения различных научно-технических задач в строительстве: в области прочности конструкций, технологии их изготовления и монтажа, из сферы теплотехники и инженерного обеспечения и т.д.

Пособие предназначено для подготовки к практическим занятиям магистрантов направления подготовки 08.04.01 «Строительство» по дисциплине «Методы решения научно-технических задач в строительстве».

## РЕШЕНИЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

### 1. Защита от подтопления загородного дома

Запроектировать горизонтальный трубчатый дренаж загородного дома с подвалом. Дом в плане – прямоугольный, габариты  $L_1 \times L_2 = 9 \times 7$  м. Уровень чистого пола первого этажа соответствует отметке  $\pm 0,000$  м. Уровень пола подвала –  $-2,620$  м, уровень подошвы ленточного фундамента –  $-2,960$  м; уровень земли –  $-0,600$  м; установившийся уровень грунтовых вод (УГВ) –  $-1,200$  м. Грунты на площадке строительства в пределах глубины осушения по данному геологии: супесь толщиной 1 м и ниже – суглинок 6 м. Оба ИГЭ имеют коэффициент инфильтрации менее 5 м/сут. (соответственно, 2 и 0,5 м/сут.). Содержание частиц крупнее 2 мм в представленных грунтах составляет 30%. Водоупорный грунт располагается ниже подошвы фундамента на 7 м, уклон водоносного слоя составляет 0,008. Район строительства – г. Казань.



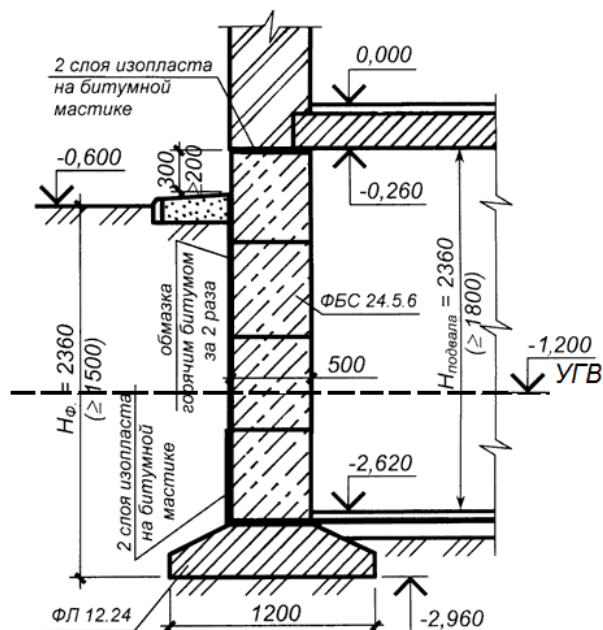


Рис. 1.1. Общий вид дома (вверху) и разрез по стене подвала (внизу)

Значения параметров задачи по вариантам приведены в табл. 1.1. При этом отметку земли для всех вариантов принять  $-0,600$  м, отметку УГВ  $0,5$  от отметки пола подвала.

### Решение

Дренаж проектируют в следующей последовательности:

1 – выбирают систему дренажа с учетом гидрогеологических условий и характера защищаемого объекта;

2 – назначают глубину заложения дренажа и его конструктивные элементы (диаметр труб, их материал; количество слоев, толщину и гранулометрический состав фильтрующих обсыпок или технические параметры обертывающих искусственных материалов);

3 – проектируют дренаж в плане и профиле (намечают трассу дренажа, определяют расчетную схему);

4 – выполняют гидрологический, а при необходимости и гидравлический расчет;

5 – сопоставляют конструктивно принятые параметры дренажа с расчетными.

#### Выбор типа дренажа

#### СПРАВКА

Горизонтальные трубчатые дренажи изготовляют следующих видов:

- пристенные (для зданий на водоупоре);
- кольцевые (контурные, вокруг компактных зданий);
- одно- и двухлинейные (для вытянутых зданий).

Поскольку на площадке строительства присутствуют грунты с коэффициент инфильтрации менее 5 м/сут., то примем для проектирования систему местного (локального) дренажа. В противном случае необходимо проектировать системы общего понижения (это характерно для песков).

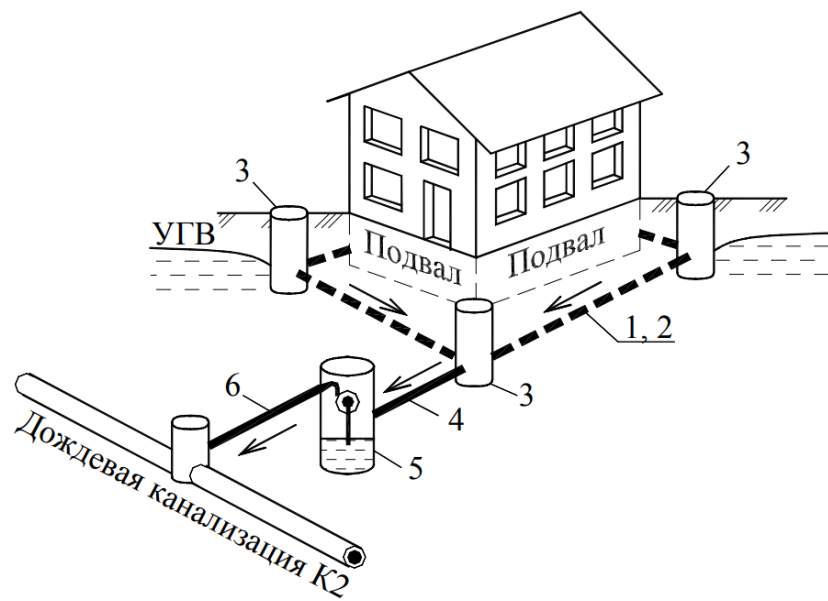
При нормальной работе дренажа пониженный уровень подземных вод (УПВ) должен находиться ниже отметки пола подвала или основания сооружения не менее 0,5 метра – примем  $a=0,6$  м.

Для рассматриваемого здания примем кольцевой дренаж.

Основные элементы дренажа представлены на рис. 1.2:

- 1) водоприёмное устройство (дрена, скважина);
- 2) фильтрующие обсыпки и слои (защита от заиления);
- 3) смотровые колодцы (для удобства обслуживания и ремонта – периодически необходимо прочищать дренаж от ила с помощью шланга и струи воды);
- 4) водоотводящая труба (дренажный коллектор);
- 5) насосная станция перекачки дренажных вод (не всегда);
- 6) труба-выпуск дренажных вод (в канализационную сеть К2, водоём или пласт).

Дрены 1 уложены вокруг здания на такой глубине, чтобы кривая депрессии уровня грунтовых вод (УГВ) находилась относительно пола подвала как минимум на 0,5 метра ниже. Дрены обсыпаны слоями щебня (в непосредственной близости) и песка (между щебнем и окружающим грунтом) для защиты внутреннего пространства дрен от заиления частицами грунта. Грунтовая вода проходит фильтрующую обсыпку 2 и, довольно чистая, попадает в дрена 1 через водоприёмные отверстия или щели-пропилы. Подземная вода, попавшая внутрь дрены, называется дренажным стоком, который самотёком отводится дренами и через один из смотровых колодцев 3 поступает по дренажному коллектору 4 в резервуар насосной станции перекачки 5. Оттуда дренажные воды время от времени насосом перекачиваются в коллектор дождевой канализации К2. Элемент 5 не всегда нужен (если сброс воды осуществляется в пласт грунта через септик и скважину).



*Рис. 1.2. Схема элементов дренажа (на примере кольцевого дренажа) – сверху. Устройство в специальных траншеях дрены со смотровыми колодцами – внизу*

Местные условия строительства дома не позволяют производить сброс дренажной воды в канализационную сеть или в водоём (по причине их отсутствия вблизи дома). Принимаем решение сделать выпуск дренажных вод в подземный пласт через септик, который необходим для отстаивания загрязнённой воды и последующей очистки (рис. 1.3). При этом в насосной станции перекачки нет необходимости – за счёт правильно подобранного уклона дрен и коллектора вода поступает самотёком.



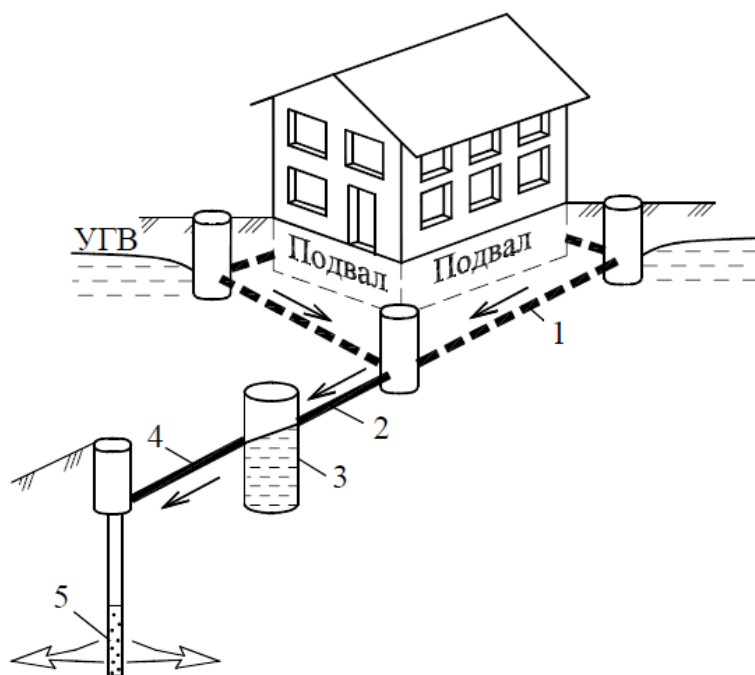


Рис. 1.3. Выпуск дренажных вод в подземный пласт: 1 – кольцевой дренаж; 2 – дренажный коллектор; 3 – септик; 4 – выпуск очищенных дренажных вод; 5 – поглощающая скважина

### Выбор дрен.

Дрены – это водоприёмные и одновременно водоотводящие элементы дренажных сооружений и систем.

#### СПРАВКА

В городском строительстве их устраивают из труб. Трубопроводы могут быть:

- асбестоцементные (ранее широко применялись);
- чугунные (обычно под фундаментами);
- керамические (в агрессивных средах);
- трубофильтры из пористого беспесчаного бетона;
- полимерные гибкие (обретают всё большую популярность).

Трубы, кроме полимерных, применяют диаметром 150 (min), 200, 250, 300 мм. Полимерные – 100, 200 мм. Минимальный уклон дрен 0,003, в проектах обычно назначают уклон 0,005.

В качестве дрен в первом приближении применимы полиэтиленовые трубы с внешним диаметром  $D=630$  мм – «Перфокор-1» SN4 с двухслойной профилированной стенкой (СТО 73011750-006-2010), рис. 1.4. Трубы поставляются с защитным фильтром (оболочкой) из нетканого иглопробивного геотекстиля «Ортон» (СТО 8397-001-00320928-2007).





*Рис. 1.4. Общий вид дрены из полиэтиленовой трубы «Перфокор» с защитным фильтром (оболочкой) из геотекстиля*

Соединение труб «Перфокор» производится с помощью полиэтиленовых муфт (СТО 73011750-003-2008), рис. 1.5.



*Рис. 1.5. Муфтовое соединение дрен из полиэтиленовой трубы «Перфокор»*

Уклон дренажа  $i_d$  принимается в пределах от 0,003 до 0,03. Примем в первом приближении  $i_d=0,005$ .

#### *Выбор обсыпки*

Фильтрующие обсыпки и слои вокруг дрен и скважин защищают их от заиливания частицами грунта. На рис. 1.6 изображено поперечное сечение дрены с традиционной двухслойной обсыпкой. Первый слой, рядом с дренажной трубой, устраивают из щебня. Второй слой, между щебнем и грунтом, – из песка. Щебень берётся фракций 3-20 мм, желательно кубической или сферической формы с содержанием глинистых частиц не более 1,5% по массе. Песок среднезернистый, с коэффициентом неоднородности  $K_{60/10}<5$ , должен быть чистый, лучше речной, с содержанием глинистых частиц не более 5%.

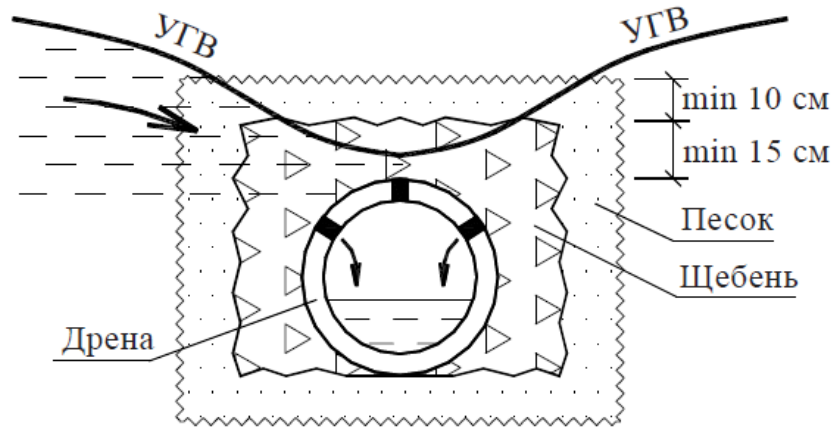


Рис. 1.6. Двухслойная обсыпка дрены

Принимаем толщины для щебёночной  $t_1$  и песчаной  $t_2$  обсыпки равную 150 мм для каждой. Щебёночную обсыпку при этом обворачиваем геотекстилем «Ортон». Ширина траншеи под обсыпку будет равна

$$B = D + 2t_1 + 2t_2 = 0,63 + 2 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,15 = 1,23 \text{ м.} \quad (1.1)$$

#### Выбор смотрового колодца СПРАВКА

Смотровые колодцы для дренажа могут быть выполнены из железобетонных колец почти так же, как канализационные, по ГОСТ 8020-80 (рис. 1.7). При этом дно колодца устраивают из монолитной подбетонки. Колодцы могут быть изготовлены также из долговечного полиэтилена по ТУ 2291-011-59355492-2006 (рис. 1.8).

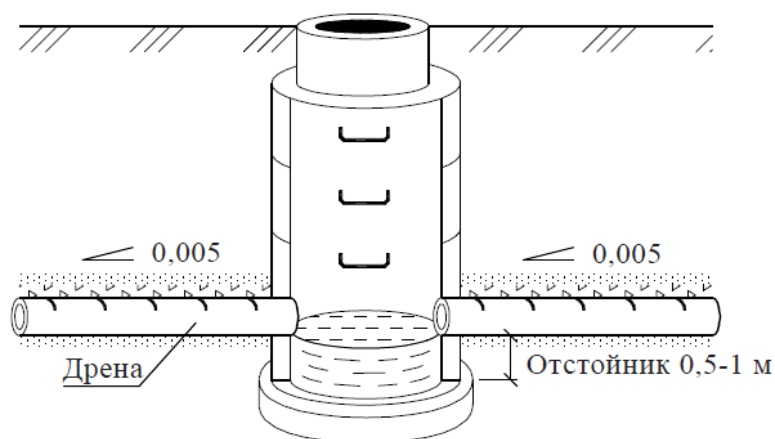


Рис. 1.7. Железобетонный смотровой дренажный колодец

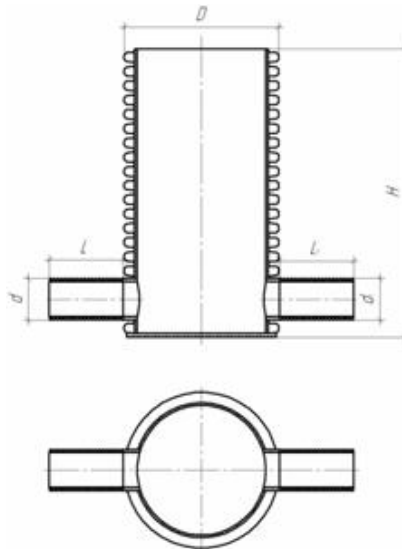


Рис. 1.8. Полиэтиленовый смотровой колодец

Смотровые колодцы дренажа необходимо устанавливать в местах поворота трассы и изменения его продольных уклонов, на перепадах, а также на прямых участках дренажа. В последнем случае шаг колодцев зависит от диаметра дрен и должен быть не более:

- 35м для трубопроводов  $\varnothing$  150мм и менее;
- 50м для трубопроводов от  $\varnothing$  200 до 450мм;
- 75м для трубопроводов от  $\varnothing$  500 до 600мм;
- 100м для трубопроводов от  $\varnothing$  700 до 900мм;
- 150м для трубопроводов от  $\varnothing$  1000 до 1400мм;
- 200м для трубопроводов от  $\varnothing$  1500 до 2000мм;
- 250-300м для трубопроводов свыше  $\varnothing$ 2000мм.

На поворотах дренажа у выступов зданий устройство смотровых колодцев не обязательно, если расстояние от поворота до ближайшего смотрового колодца не более 20 м. Когда на участке между смотровыми колодцами дренаж делает несколько поворотов, смотровые колодцы устанавливают через один поворот. Стартовые участки дренажной сети длиной до 20 м можно выполнять без первого дренажного колодца. В этом случае необходимо предусмотреть заглушку дренажной трубы. В отличие от канализационных, данные колодцы должны иметь отстойник для выпадения в осадок частиц грунта из дренажных вод (рис. 1.7).

Люки колодцев на асфальтовых покрытиях должны быть вровень с ними, на газонах – выше на 5...7 см, на пустырях – выше на 20 см.

Диаметр смотрового колодца зависит от диаметра дрены и глубины его опускания. Зависимость диаметра колодца  $D_k$  от диаметра трубы  $D$ :

- до  $D$  600 мм –  $D_k=1000$  мм;
- $D$  700 мм –  $D_k=1250$  мм;
- от  $D$  800 мм до 1000 мм –  $D_k=1500$  мм;
- $D$  1200 мм –  $D_k=2000$  мм.

Если глубина смотрового колодца 1,2 м и меньше, для трубопроводов не более 150 мм, допускается устройство колодца диаметром 700 мм, для остальных трубопроводов – не 1000 мм; для колодцев глубиной 3 м и более, минимальный размер рабочей камеры составляет не менее 1500 мм.

Для принятого типа дренажных труб целесообразно применение инвентарных полиэтиленовых колодцев на основе двухслойной профилированной трубы «Корсис» (рис. 1.8) (ТУ 2291-011-59355492-2006). Примем сварной безлотковый колодец диаметром  $D_k=1,0$  м, поскольку предполагаемая глубина колодцев будет не меньше глубины заложения подошвы фундаментов – 2,360 м.

#### *Выбор коллектора*

Трубы-коллекторы отводят самотёком дренажные воды от защищаемого объекта для последующего выпуска в дождевую канализацию К2, водоём или подземный пласт через поглощающую скважину или колодец. Трубы устраивают глухие, с полной заделкой стыков, как для наружной канализации. Иногда их функционально совмещают с дренами, иногда – с дождевыми (ливнедренажными) коллекторами.

#### *Назначение глубины заложения дренажа*

Заглубление дренажа должно обеспечить требуемую норму осушения, защиту сети от промерзания и разрушения.

Так как водоупорный грунт располагается намного ниже подошвы фундамента (на 7 м), то принятый дренаж, скорее всего, будет являться несовершенным, т.е. заложённым выше водоупора (совершенный дренаж тот, что лежит непосредственно на водоупоре). Если бы фундамент располагался на водоупоре, то однозначно можно было бы принять совершенный тип дренажа, расположив его на уровне подошвы фундамента. В нашем случае необходимо воспользоваться следующей формулой для глубины заложения дрен:

$$H_d = h_{np} + l + h_k + h_0, \quad H_d \geq d_f, \quad (1.2)$$

где  $h_{np}$  – глубина промерзания от верха поверхности земли, принимаемая по данным обследования или при их отсутствии – по карте глубин промерзания с добавлением 0,5 м;

$l$  – расстояние от нижней границы промерзания до верхней границы капиллярного поднятия воды, принимаемое 0,2-0,25 м;

$h_y$  – высота капиллярного поднятия воды над кривой депрессии, принимаемая по данным лабораторного анализа (но не более: 0,2 м – для песка; 1 м – для супесей с содержанием частиц крупнее 2 м от 25 до 50 % и песков пылеватых; 1,5 м – для суглинков с содержанием частиц крупнее 2 мм от 25 до 50 % и супесей с содержанием таких частиц от 15 до 25 %; 2,5 м – для глин, суглинков с содержанием частиц крупнее 2 мм менее 25 % и супесей с содержанием таких частиц менее 15%);

$h_0$  – глубина воды в дренаже, принимаемая равной 0,3 м;

$d_f$  – глубина заложения подошвы фундамента.

Таким образом,  $H_d = 1,65 + 0,5 + 0,25 + 1,5 + 0,3 = 4,2 м > 2,36 м$ , что ниже глубины заложения фундамента, но выше водоупора. Поэтому дренаж является несовершенным.

Уточняем принятый ранее диаметр смотровых колодцев: поскольку их глубина опускания составит более 3-х метров (не менее 4,2 м), следовательно, их диаметр примем  $D_k = 1,5 м$ .

*Привязка дренажа к стенам здания*

При заложении дренажа не ниже отметок подошвы фундамента (рис. 1.9а) защищаемого здания, минимальное расстояний между дренажом и стеной здания (сооружения) необходимо рассчитать по нижеприведенной формуле:

$$l_{\min} = \max \left\{ \begin{array}{l} b + \frac{B}{2} \\ b + \frac{D_k}{2} \end{array} \right. , \quad (1.3)$$

где  $l_{\min}$  – наименьшее расстояние от здания, м;  $b$  – уширение фундамента (консольный вылет плитной части), м;  $B$  – ширина дренажной траншеи;  $D_k$  – внешний диаметр смотрового колодца.

В нашем случае (рис. 1.9б) дренаж располагается ниже фундаментов,

поэтому значение  $l_{\min} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,35 + \frac{1,23}{2} = 0,965 \\ 0,35 + \frac{1,5}{2} = 1,1 \end{array} \right. = 1,1 м$  будет минималь-

ным конструктивным, но требующим уточнения по следующей формуле:

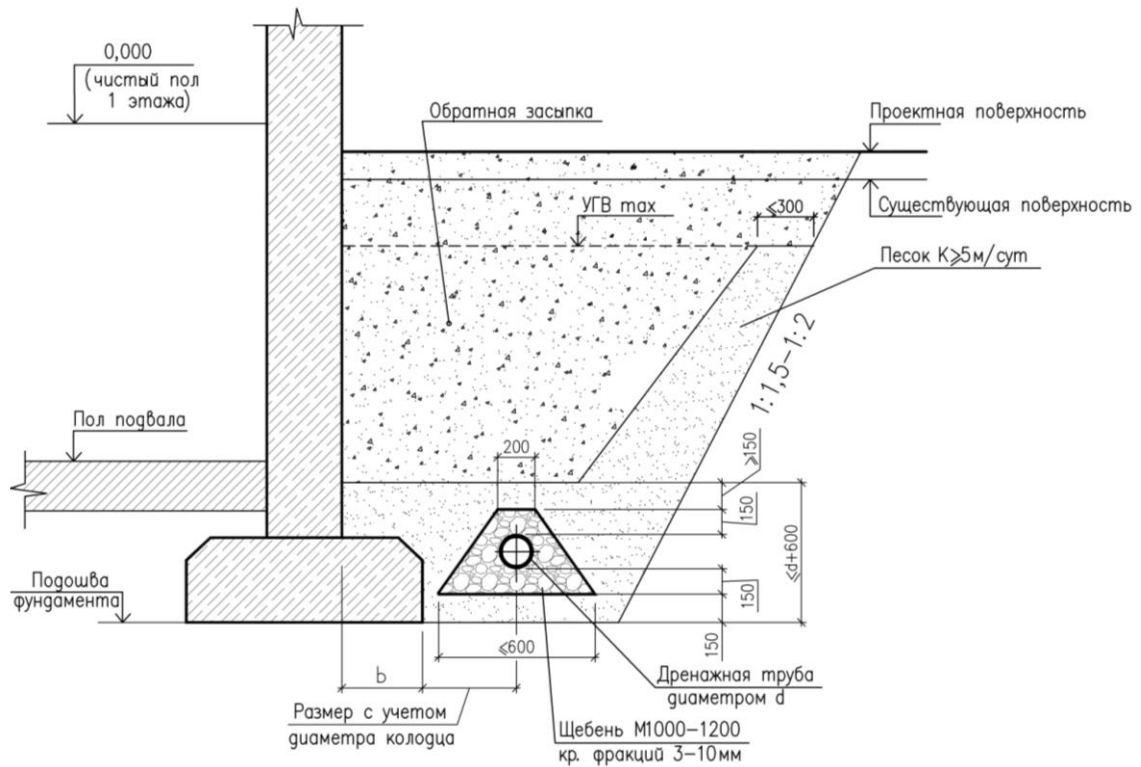
$$l_{\min} = b + \frac{B}{2} + \frac{(H_d - d_f)}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad (1.4)$$

где  $H_d$  – глубина заложения дрены, м;  $d_f$  – глубина заложения фундамента, м;  $\varphi$  – угол внутреннего трения грунта, град. (табл. 1.1).

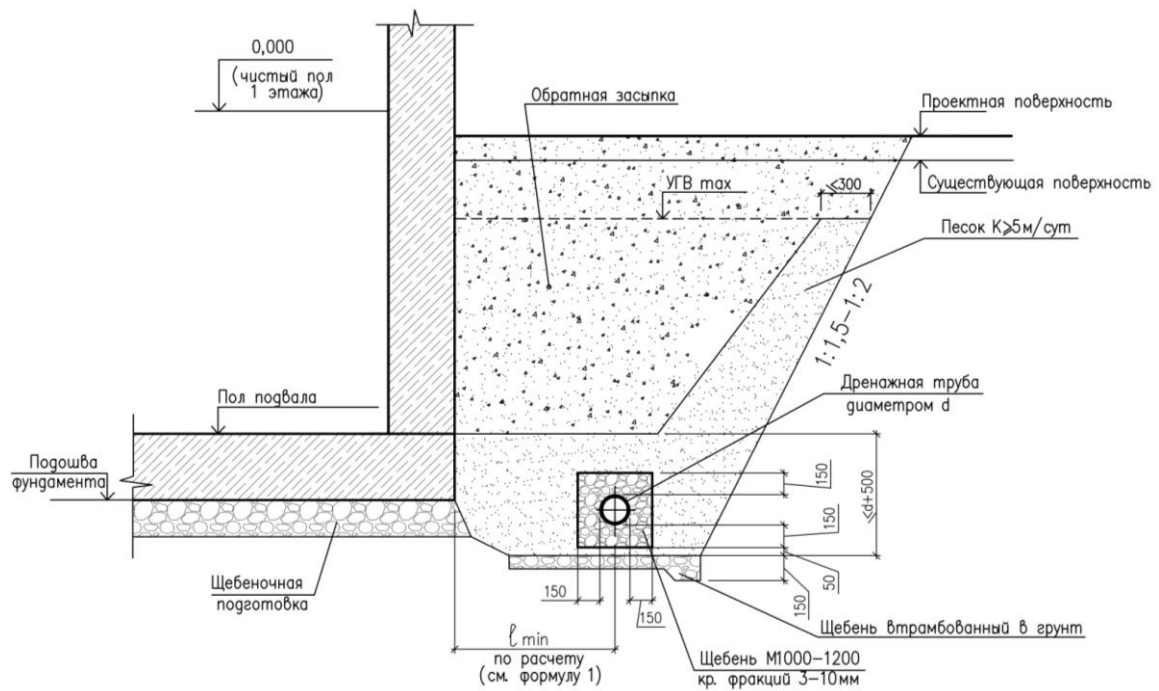
Таблица 1.1

**Значение угла внутреннего трения грунтов в мокром состоянии**

Песок мелкий	20°
Песок средний	25°
Песок крупный	27°
Растительный грунт	25°
Суглинок	30°
Супесь	18°
Глина	15°
Гравий	35°
Слабозаторфованные	30°



а)



б)

Рис. 1.9. Привязка дренажа к стенам здания выше подошвы фундамента (а) и ниже (б)

Таким образом, будем иметь  $d_f = 2,96 - 0,6 = 2,36\text{ м}$ ,  
 $l_{\min} = 0,35 + \frac{1,23}{2} + \frac{(4,2 - 2,36)}{\text{tg}30^\circ} = 4,15\text{ м}$ . Это больше конструктивного расстояния 1,1 м, поэтому оставляем  $l_{\min} = 4,15\text{ м}$ .

### Гидрологический расчёт (уточнение диаметра дрен)

Гидрологический расчет должен определить расход воды в дренаже и ординаты депрессионных кривых на дренируемой территории.

Коэффициент фильтрации ( $K$ ) осушаемых грунтов следует принять по табл. 1.2, при неоднородности последних рассчитать средневзвешенное значение ( $K_{cp}$ ) по формуле (1.5):

$$K_{cp} = \frac{K_1 m_1 + K_2 m_2 + \dots + K_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (1.5)$$

где  $K_1+K_2+\dots+K_n$  - коэффициент фильтрации отдельных осушаемых слоев грунта, м/сут.;  $m_1+m_2+\dots+m_n$  - мощность соответствующих слоев, м, которую принимают на основе исходных данных и расчетной схемы дренажа.

Таблица 1.2

#### Значение коэффициента фильтрации некоторых грунтов

Грунт	$K$ , м/сут.
Гравий с песком	100-75
Песок крупный	75-60
То же крупнозернистый	50-15
То же среднезернистый	15-5
То же мелкозернистый	5-2
Техногенные грунты	1-3
Супесь	2-0,8
Суглинок	0,8-0,2
Глина	0,005
Торф свежий	0,5-1,0
То же среднего возраста	1,0-0,15
То же старый	0,15-0,01

Для рассматриваемого примера будем иметь

Грунт	Толщина, м	$K$ , м/сут.
Супесь	$h_1=1,0$	2
Суглинок	$H_d-h_1=4,2-1=3,2$	0,5

$$K_{cp} = \frac{2 \cdot 1 + 3,2 \cdot 0,5}{1 + 3,2} = 0,857 \frac{\text{м}}{\text{сут.}}$$



Расход дренажных вод для контурных систем дренажа (кольцевой, прифундаментный), расчетные схемы которых показаны на рис. 1.10, определяют по формуле:

$$Q = K_{cp} i h l_d, \quad (1.6)$$

где  $i$  – уклон водоносного слоя;  $h$  – напор грунтовых вод (разность высоты грунтовых вод до и после понижения);  $l_d$  – длина дрены.

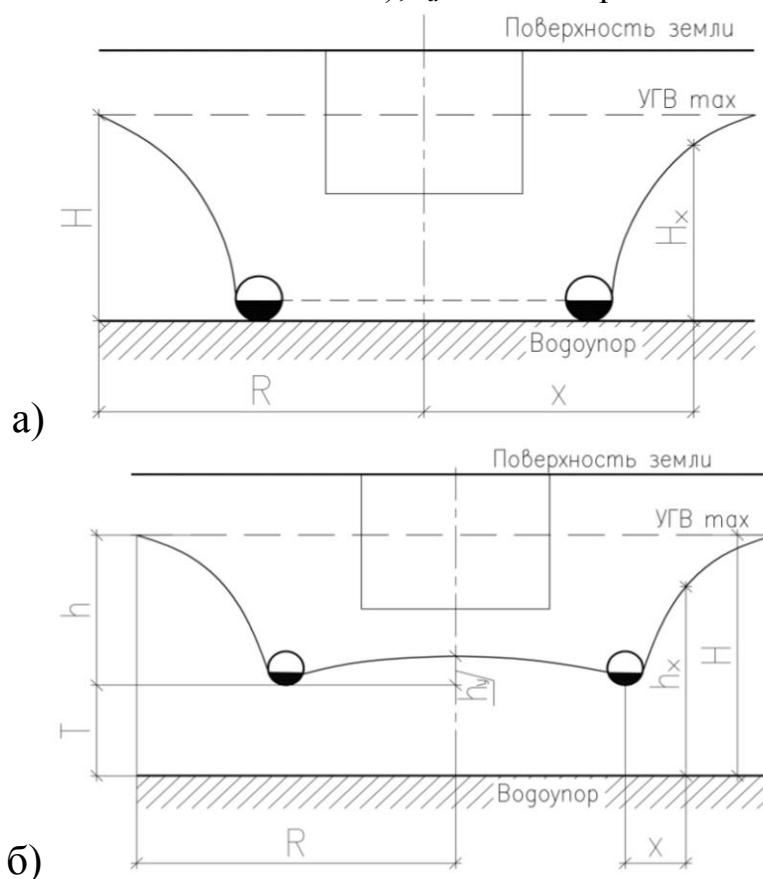


Рис. 1.10. Расчётная схема дренажа совершенного типа (а) и несовершенного (б)

$$h = d_{\text{подв}} + a - d_{\text{УГВ}}, \quad (1.7)$$

$$l_d = L_{\text{max}} + 2l_{\text{min}} \quad (1.8)$$

где  $a=0,6$  м – расстояние от пола подвала уровня грунтовых вод после понижения (принято не менее 0,5 м).

Для принятых условий будем иметь  $l_d = 9 + 2 \cdot 4,15 = 17,3$  м,  
 $h = 2,62 - 0,6 + 0,6 - 1,2 = 1,42$  м,  $Q = 0,857 \cdot 0,008 \cdot 1,42 \cdot 17,3 = 0,168 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$ .

Уточняем внутренний диаметр трубы дрены из условия пропускания фактического притока воды:

$$d = \left( \frac{Q}{140 \sqrt{i_d}} \right)^{0,375}, \quad (1.9)$$

где  $i_d$  – уклон дренажа.

Из условия предотвращения заиливания трубы:

$$d = \left( \frac{V_{\max}}{30,4\sqrt{i_d}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (1.10)$$

где  $V_{\max}$  – предельная скорость потока воды, принимая равной 0,7 м/с.

Имеем  $d = \left( \frac{0,168}{140 \cdot \sqrt{0,005}} \right)^{0,375} = 0,217 \text{ м}, \quad d = \left( \frac{0,7}{30,4\sqrt{0,005}} \right)^{\frac{3}{2}} = 0,185 \text{ м}.$

Принимаем трубу «Перфокор-II» с номинальным диаметром наруж-ным/внутренним D/d=315/271 мм.

В случае, если требуемый диаметр трубы получится больше сорта-ментного, то можно увеличить уклон дренажа от 0,003 до 0,03 (т.е. взять его больше уклона водоносного слоя). Либо можно применить дренажные трубы большого диаметра типа «Прага».

Таблица 1.2

**Размеры труб «Перфокор-II» (110-160 мм), в мм**

Номинальный размер тру-бопровода/внутренний диаметр (DN/OD)/di	Размеры водоприемного отверстия*	
	ширина	длина
110/91	2,8	11-13
125/107	2,8	13-16
160/139	2,8	16-20
* Размеры обеспечиваются инструментом		

Таблица 1.3

**Размеры труб «Перфокор-II» (200-630 мм), в мм**

Номинальный размер трубопро-вода/внутренний диаметр (DN/OD)/di	Размеры водоприемного отверстия*			
	ширина			длина
200/176	2,8			45-60
250/216	2,5	3,7	4,0	55-90
315/271	2,5	3,7	4,0	70-110
400/343	3,4	4,0		90-140
500/427	3,7	4,0	6,0	95-140
630/535	4,0	6,0	7,0	100-150
* Размеры обеспечиваются инструментом				

Таблица 1.4

## Варианты заданий к задаче № 1

Вар.	Габариты дома	Отм. пола подвала	Отм. подошвы фундамента	Вид грунта		Толщина слоя, м		Коэфф. инф., м/сут		Содержание частиц крупнее 2 мм, %		Уклон водоносного слоя	Город
				Сл. 1	Сл. 2	Сл. 1	Сл. 2	Сл. 1	Сл. 2	Сл. 1	Сл. 2		
1	8x6	-2,5	-2,7	Супесь	Песок	1,0	5	1	5	10	25	0,001	Москва
2	12x8	-2,55	-2,8	Суглинок	Глина	1,1	6	0,5	0,005	15	30	0,0015	Санкт-Петербург
3	9x8	-2,6	-2,9	Песок	Песок	1,2	7	3	4	20	35	0,002	Томск
4	8x8	-2,65	-3,0	Глина	Суглинок	1,3	8	0,005	0,3	25	40	0,0025	Казань
5	7x6	-2,7	-3,0	Песок	Суглинок	1,4	9	4	0,4	30	45	0,003	Владивосток
6	12x9	-2,75	-3,1	Суглинок	Песок	1,5	10	0,5	3	35	50	0,0035	Пенза
7	8x6	-2,8	-3,0	Песок	Глина	1,6	11	2	0,005	40	25	0,004	Самара
8	12x8	-2,85	-3,2	Глина	Песок	1,7	10	0,005	3	45	30	0,0045	Екатеринбург
9	9x8	-2,9	-3,3	Песок	Супесь	1,8	9	3	1,8	50	30	0,005	Пермь
10	8x8	-3	-3,5	Супесь	Песок	1,7	8	1	5	10	70	0,0055	Волгоград
11	7x6	-2,5	-2,7	Суглинок	Глина	1,6	7	0,3	0,005	15	10	0,006	Сочи
12	12x9	-2,55	-2,8	Песок	Песок	1,5	6	5	4	20	15	0,001	Петрозаводск
13	8x6	-2,6	-2,9	Глина	Песок	1,4	5	0,005	4	25	20	0,0015	Нижекамск
14	12x8	-2,65	-3,0	Песок	Глина	1,3	4	5	0,005	30	25	0,002	Саратов
15	9x8	-2,7	-3,0	Суглинок	Песок	1,2	3	0,2	2	35	30	0,0025	Бугульма
16	8x8	-2,75	-3,1	Песок	Суглинок	1,1	4	3	2	40	35	0,003	Уфа
17	7x6	-2,8	-3,0	Глина	Суглинок	1,0	5	0,005	0,5	45	40	0,0035	Йошкар-Ола
18	12x9	-2,85	-3,2	Песок	Песок	1,5	6	2	3	50	45	0,004	Чебоксары
19	8x6	-2,9	-3,3	Суглинок	Глина	1,6	7	0,8	0,005	10	50	0,0045	Ижевск
20	12x8	-3	-3,5	Песок	Песок	1,7	8	3	4	15	10	0,005	Симферополь
21	9x8	-2,5	-2,7	Глина	Супесь	1,8	9	0,005	1,5	20	15	0,0055	Вологда
22	8x8	-2,55	-2,8	Суглинок	Песок	1,7	8	0,3	3	25	20	0,006	Астрахань
23	7x6	-2,6	-2,9	Песок	Глина	1,7	7	5	0,005	30	25	0,0045	Н. Новгород
24	12x9	-2,65	-3,0	Глина	Песок	1,8	3	0,005	2	60	30	0,005	Грозный
25	7x6	-2,7	-3,0	Глина	Суглинок	1,7	4	0,005	0,5	35	50	0,0055	Пятигорск

## 2. Задачи оптимального выбора для разработки технологии производства строительных материалов, изделий, конструкций и зданий

*Решение задач оптимизации методами математического программирования*

В постановке и решении задач оптимизации эффективным является применение методов математического программирования, в частности численных методов математического программирования, с помощью которых на базе ЭВМ решаются многомерные экстремальные задачи с ограничениями. В основе процедуры численного программирования лежит итерационный процесс последовательной реализации однотипных этапов (шагов) вычислительного алгоритма, каждый из которых отличается от других этапов лишь значением переменных величин.

Экстремальная (оптимизационная) задача формулируется в следующем виде: найти глобальный максимум (минимум) функции  $f(x)$  переменных  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на множестве  $M$   $n$ -мерного пространства.

Множество  $M$  обычно задают в виде системы равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} g_i(x) &= 0, i = 1, 2, \dots, k; \\ g_i(x) &\leq 0, i = k + 1, k + 2, \dots, l; \\ g_i(x) &> 0, i = l + 1, l + 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.1)$$

а также с помощью разного рода дополнительных условий, накладываемых на переменные  $x$ , например, условие

$$x_i \geq 0 \quad (2.2)$$

или требования, чтобы переменные принимали только дискретные значения и т.п.

Функция  $f(x)$  является *целевой функцией*, а система (2.1) с дополнительными условиями (2.2) – *ограничениями* экстремальной задачи. Точки  $x_i$ , которые удовлетворяют ограничениям, называются допустимыми решениями экстремальной задачи, а их множество называется *допустимым множеством*. Точка  $x^*$ , в которой целевая функция  $f(x)$  достигает максимума (или минимума), является *оптимальным решением* экстремальной задачи.

Функция  $f(x)$  на множестве  $M$  имеет единственный локальный экстремум (он же глобальный), задача называется *одноэкстремальной*. В *многоэкстремальных задачах* целевая функция имеет множество локальных экстремумов, в связи с чем решение задачи сводится к нахождению среди них глобального экстремума.

Экстремальная задача решается методами линейного программирования, если целевая функция и условия ограничения заданы линейно. Если они нелинейны, то задача относится к нелинейному программированию.

Если переменные распределены во времени, то решение задачи ищется методами динамического программирования. Если же целевая функция определяется с учётом влияния случайных (неопределённых) факторов, то задача относится к стохастическому программированию.

Возникновение линейного программирования связано с экономической проблематикой. Задачи линейного программирования являются одноэкстремальными. Методами линейного программирования решаются многие планово-экономические и управленческие задачи в строительстве. Это задача о комплексном использовании сырья и загрузке оборудования, транспортная задача, задача текущего и перспективного планирования в строительстве, задача планирования наилучшего размещения производственной базы и т.п.

Задача линейного программирования формулируется следующим образом: задана система линейных ограничений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2; \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Требуется найти такие неотрицательные решения  $x_i \geq 0$  системы конечных ограничений (2.3), при которых линейная целевая функция достигает максимального или минимального значения, т.е.

$$C = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{extr}. \quad (2.4)$$

Геометрически задача линейного программирования состоит в отыскании **вершины многогранника  $M$** , в котором целевая функция  $f(x)$  принимает экстремальное значение.

**Задача.** Выбрать оптимальное соотношение типов зданий.

Строительная организация может застроить жилой массив домами из кирпича или из крупных блоков (с готовой отделкой). Требуется определить максимальное количество квартир, которые можно построить из имеющихся ресурсов (табл. 2.1).

Таблица 2.1

### Потребность в ресурсах и их наличие

Ресурс	Единица измерения	Потребность в ресурсах на одну квартиру		Количество имеющихся ресурсов
		Кирпичные дома	Крупноблочные дома	
Арматура	т	0,6	1,1	900
Пиломатериалы	м <sup>3</sup>	0,8	0,2	520
Цемент	т	4,0	9,0	7000
Керамическая плитка	тыс. шт.	0,720	-	400
Трудозатраты	чел.-час	0,225	0,160	200

## Решение

Обозначим количество квартир в кирпичных домах через  $x$  ( $x > 0$ ), в крупноблочных – через  $y$  ( $y > 0$ ). Составим ограничивающие неравенства, вытекающие из таблицы:

$$0,6x + 1,1y \leq 900$$

$$0,8x + 0,2y \leq 520$$

$$4x + 9y \leq 7000$$

$$0,72x + 0 \leq 400$$

$$0,225x + 0,16y \leq 200$$

Целевая функция имеет вид  $C = x + y \rightarrow \max$ .

В случае двух переменных задача линейного программирования может быть решена графически на плоскости. При трёх переменных задача графически решается в трёхмерном пространстве. Это предельный случай графического представления решения задач линейного программирования.

Введём на плоскости декартову прямоугольную систему координат ( $xOy$ ) и сопоставим каждой паре чисел  $(x, y)$  точку плоскости с координатами  $x$  и  $y$ . Прежде всего, выясним, что будет представлять собой множество точек, соответствующих допустимым решениям данной задачи. Рассмотрим сначала первое линейное неравенство:  $0,6x + 1,1y \leq 900$  (рис. 2.1).

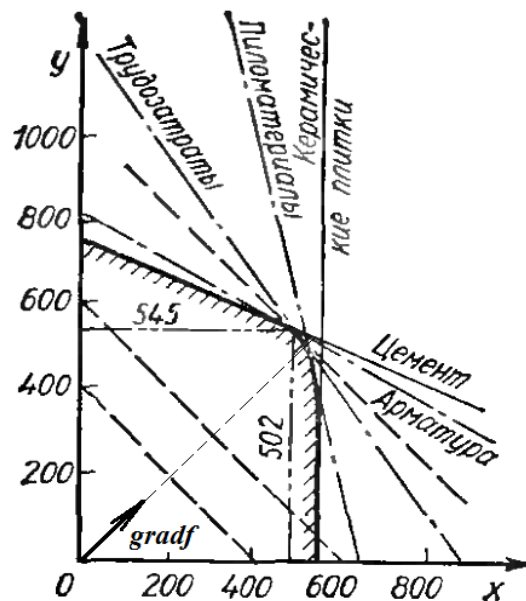


Рис. 2.1. Решение задачи линейного программирования графически

Оно, как известно, определяет на плоскости одну из двух частей (полуплоскостей), на которые прямая  $0,6x + 1,1y = 900$  разбивает плоскость (для построения графика прямой достаточно знать две точки, например, при  $x=0$ ,  $y=(900-0,6 \cdot 0)/1,1=818,2$  и при  $y=0$ ,  $x=(900-1,1 \cdot 0)/0,6=1500$ ). При этом соответствующая полуплоскость включает и граничную прямую

(замкнутая полуплоскость). Чтобы определить, какую именно из двух замкнутых полуплоскостей определяет данное неравенство, достаточно подставить в него координаты одной какой-нибудь точки, не лежащей на граничной прямой. Если неравенство удовлетворяется, то искомая полуплоскость та, в которой лежит взятая точка, а если не удовлетворяется – то противоположная ей. Например, при  $x=1, y=1$  даёт  $0,6 + 1,1 \leq 900$ , т.е. неравенство удовлетворяется, а рассматривать необходимо нижнюю полуплоскость. Аналогично определяем ограниченные полуплоскости для остальных неравенств. В результате получаем замкнутый многоугольник.

Для отыскания максимума целевой функции определим её градиент:

$gradf = \left( \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1; 1)$ . Графически на плоскости он представляет собой

радиус-вектор с началом в точке  $O$  и наклонённый к оси  $Ox$  под углом  $45^\circ$ . При этом линия  $f(x; y) = C$ , где  $C - \text{const}$ , представляет собой прямую, перпендикулярную вектору  $gradf$ . Считая  $C$  параметром, получаем семейство параллельных прямых (называемых *линиями постоянного значения*, или *линиями уровня функции*). Нас интересуют, в соответствии с поставленной задачей, те точки допустимой области, которые принадлежат линии уровня с наибольшим значением  $C$  по сравнению с его значениями для всех других линий уровня, пересекающихся с допустимой областью. Увеличение  $C$  соответствует перемещению линии уровня вдоль  $gradf$ . Следовательно, чтобы найти оптимальные точки допустимого множества задачи на максимум, нужно перемещать линии уровня в направлении вектора  $gradf$ , начиная с какого-нибудь фиксированного положения, при котором она пересекается с допустимой областью до тех пор, пока она не перестанет пересекаться с ней. Для рассматриваемого примера (рис. 2.1) оптимальной является точка с координатами (502; 545). Следовательно, необходимо строить 502 квартиры в домах с кирпичными стенами и 545 – в домах с крупноблочными стенами. Степень использования ресурсов показана в табл. 2.2.

Таблица 2.2

### Степень использования ресурсов

Ресурс	Ед. изм.	Количество ресурсов		
		наличных	используемых	неиспользуемых
Арматура	т	900	$0,6 \cdot 502 + 1,1 \cdot 545 = 900$	$900 - 900 = 0$
Пиломатериалы	м <sup>3</sup>	520	$0,8 \cdot 502 + 0,2 \cdot 545 = 510,6$	$520 - 510,6 = 9,4$
Цемент	т	700	$4 \cdot 502 + 9 \cdot 545 = 613$	$700 - 613 = 87,0$
Керамическая плитка	тыс. шт.	400	$0,72 \cdot 502 + 545 \cdot 0 = 361,5$	$400 - 361,5 = 38,5$
Трудозатраты	чел.-час	200	$0,225 \cdot 502 + 545 \cdot 0,16 = 200$	$200 - 200 = 0$

Неиспользуемые ресурсы могут быть поставлены на другие объекты.



## Варианты заданий\* к задаче № 2

№ варианта	Потребность в ресурсах на одну квартиру									
	Кирпичные дома					Крупноблочные дома				
	Арматура, т	Пиломатериалы, м <sup>3</sup>	Цемент, т	Керам. плитка, тыс. шт.	Трудозатраты, чел.-час	Арматура, т	Пиломатериалы, м <sup>3</sup>	Цемент, т	Керам. плитка, тыс. шт.	Трудозатраты, чел.-час
1	0,61	0,81	4,05	0,73	0,24	1,11	0,20	9,05	–	0,16
2	0,62	0,82	4,10	0,74	0,24	1,12	0,20	9,10	–	0,16
3	0,63	0,83	4,15	0,75	0,25	1,13	0,20	9,15	–	0,16
4	0,64	0,84	4,20	0,76	0,25	1,14	0,20	9,20	–	0,16
5	0,65	0,85	4,25	0,77	0,26	1,15	0,21	9,25	–	0,17
6	0,66	0,86	4,30	0,78	0,26	1,16	0,21	9,30	–	0,17
7	0,67	0,87	4,35	0,79	0,27	1,17	0,21	9,35	–	0,17
8	0,68	0,88	4,40	0,80	0,27	1,18	0,21	9,40	–	0,17
9	0,69	0,89	4,45	0,81	0,28	1,19	0,21	9,45	–	0,17
10	0,70	0,90	4,50	0,82	0,28	1,20	0,21	9,50	–	0,17
11	0,71	0,91	4,55	0,83	0,29	1,21	0,21	9,55	–	0,17
12	0,72	0,92	4,60	0,84	0,29	1,22	0,21	9,60	–	0,17
13	0,73	0,93	4,65	0,85	0,30	1,23	0,21	9,65	–	0,17
14	0,74	0,94	4,70	0,86	0,30	1,24	0,21	9,70	–	0,17
15	0,75	0,95	4,75	0,87	0,31	1,25	0,22	9,75	–	0,18
16	0,76	0,96	4,80	0,88	0,31	1,26	0,22	9,80	–	0,18
17	0,77	0,97	4,85	0,89	0,32	1,27	0,22	9,85	–	0,18
18	0,78	0,98	4,90	0,90	0,32	1,28	0,22	9,90	–	0,18
19	0,79	0,99	4,95	0,91	0,33	1,29	0,22	9,95	–	0,18
20	0,80	1,00	5,00	0,92	0,33	1,30	0,22	10,00	–	0,18
21	0,81	1,01	5,05	0,93	0,34	1,31	0,22	10,05	–	0,18
22	0,82	1,02	5,10	0,94	0,34	1,32	0,22	10,10	–	0,18
23	0,83	1,03	5,15	0,95	0,35	1,33	0,22	10,15	–	0,18
24	0,84	1,04	5,20	0,96	0,35	1,34	0,22	10,20	–	0,18
25	0,85	1,05	5,25	0,97	0,36	1,35	0,23	10,25	–	0,19

\* – количество имеющихся ресурсов принять, как в вышерассмотренном примере.

### 3. Задачи оптимального плана по выпуску продукции симплекс-методом

Среди методов линейного программирования для решения многопараметрических задач с сотнями ограничений и переменных, к которым относятся также задачи строительства, наибольшее распространение получил метод последовательного улучшения плана или симплекс-метод и его модификации.

Основой симплекс-метода является то, что линейная функция достигается экстремума в угловой точке многогранного множества. Поскольку в реальных задачах число угловых точек очень велико, то их полный перебор для поиска экстремального значения оказывается практически нереализуемым. Симплекс-метод позволяет осуществлять направленный перебор угловых точек по определённому алгоритму, в связи с чем приходится перебирать не все угловые точки, а их часть. Это существенно сокращает процесс вычислений. Основным понятием симплексного метода является понятие *допустимого базисного решения (опорного плана)*. Для нахождения базисного решения все переменные делятся на *базисные* и *небазисные*. Значения первых находятся решением системы ограничений задачи, значения вторых полагаются равным нулю. Базисное решение проверяется на оптимальность. Если его нет, то в дальнейшем, варьируя переменные с помощью итерационного вычислительного процесса, добиваются оптимального решения, соответствующего экстремуму целевой функции.

**Исходные данные задачи:** на полигоне для строительства зданий могут изготавливаться конструкции четырёх видов. Изготовление арматурного каркаса и самих конструкций требует определённых трудозатрат, ресурсы которых ограничены. На изготовление конструкций расходуется различное количество бетонной смеси. Для ускорения твердения применяется пропаривание, причём расход пара для различных изделий различен. Возможности производства бетонной смеси и мощности паросиловой установки также ограничены (табл. 3.1).

Таблица 3.1

**Исходные данные к задаче**

Тип конструкции	Нормы на изготовление конструкции			
	Трудоёмкость изготовления арматурных каркасов, чел.-дни	Потребность в бетоне, м <sup>3</sup>	Трудоёмкость изготовления конструкций, чел.-дни	Расход пара, т
I	0,25	1,6	2,5	0,28
II	0,10	1,5	1,9	0,24
III	0,09	1,6	3,0	0,20
IV	0,15	1,9	8,0	0,20

Кроме того, на изготовление арматурных каркасов может быть затрачено 11 чел.-дней. Соответственно, за это время может быть произведено 200 м<sup>3</sup> бетона, на изготовление конструкций может быть затрачено 210 чел.-дней (включая вспомогательные работы), для прогрева изделий может быть использовано 22 т пара.

Требуется определить, какие конструкции и в каком количестве нужно выпустить, чтобы обеспечить производство максимального количества сооружений.

**Решение.** Обозначим количество изготавливаемых конструкций, соответственно, через  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ . Примем, что эффективность всех конструкций одинакова, т.е.  $c_1=c_2=c_3=c_4=1$  (формула (3.1)).

Математически задача формулируется в следующем виде:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \quad (3.1)$$

$$x \geq 0. \quad (3.2)$$

Используя исходные данные табл. 3.1, запишем условия ограничения задачи. Это так называемые *балансные условия*, они заданы в виде неравенств и определяются возможностью производства:

$$\begin{aligned} 0,25x_1 + 0,1x_2 + 0,09x_3 + 0,15x_4 &\leq 11; \\ 1,6x_1 + 1,5x_2 + 1,6x_3 + 1,9x_4 &\leq 200; \\ 2,5x_1 + 1,9x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leq 210; \\ 0,28x_1 + 0,24x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 &\leq 22. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Возможным решением задачи является вектор  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , удовлетворяющий условиям (3.2) и (3.3). Если же этот вектор удовлетворяет и условию (3.4), то решение будет оптимальным.

Для нахождения первоначального (базисного решения) и его последующей оптимизации система (3.3) преобразуется в систему линейных уравнений путём введения дополнительных неизвестных (переменных). Обозначим их через  $x_5, x_6, x_7$  и  $x_8$ . Каждая дополнительная переменная входит в соответствующее уравнение с коэффициентом равным единице, а в уравнение целевой функции – с нулевым коэффициентом.

Запишем полученные уравнения, умножив для удобства каждый элемент на 100 и поменяв местами правые и левые части уравнений:

$$\begin{aligned} 1100 &= 25x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 15x_4 + x_5; \\ 20000 &= 160x_1 + 150x_2 + 160x_3 + 190x_4 + x_6; \\ 21000 &= 250x_1 + 190x_2 + 300x_3 + 800x_4 + x_7; \\ 2200 &= 28x_1 + 24x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_8; \\ L &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \max \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решение задачи состоит из следующих этапов: составление исходной симплексной таблицы (опорного плана); проверка решения на оптималь-

ность; последовательное улучшение путём пересчёта симплексной таблицы.

**Составление исходной симплексной таблицы.** Её основные элементы показаны в табл. 3.2.

Таблица 3.2

**Схема составления симплексной таблицы**

			Коэффициенты эффективности $c_j$		
$c^{(k)}$	$P^{(k)}$	$x_0$	Шапка матрицы (номер неизвестных $x_j$ )	$\alpha$	$\beta$
Коэффициенты эффективности при неизвестных, входящих в план	Неизвестные, входящие в план	Итоговый столбец	Матрица коэффициентов при неизвестных	$x_{i0}:a_{is}$	Коэффициенты для пересчёта элементов строк матрицы
		$L^{(k)}$	Целевая строка		

В верхней части таблицы записываются все неизвестные, входящие в математическую модель задачи: вначале располагаются основные неизвестные, а затем дополнительные. Над неизвестными записываются значения коэффициента эффективности  $c_j$  при соответствующих неизвестных.

В центре симплексной таблицы располагается матрица коэффициентов при неизвестных, в которой число столбцов равно числу всех неизвестных, а число строк – числу уравнений ограничений. Каждый столбец матрицы представляет собой вектор-столбец  $x_j$ , и в дальнейшем будет называться просто вектор  $x_j$ . Слева располагается основная часть матрицы, справа – единичная матрица, составленная коэффициентами при дополнительных переменных.

Внизу таблицы располагается целевая строка, служащая для определения оптимальности плана на каждом этапе вычислений. Элементы этой строки показывают для каждого вектора  $x_j$ , насколько увеличиваются значения функционала  $L$  цели при включении в план данного вектора.

В столбце  $c^{(k)}$  записываются коэффициенты при неизвестных, входящих в план. В исходной таблице записываются коэффициенты при дополнительных неизвестных, которые равны нулю.

Столбец  $P^{(k)}$  содержит неизвестные, входящие в план на данной итерации  $k$ . Число компонентов вектора  $P^{(k)}$  должно быть равно числу уравнений ограничений  $m$ . Входящие в план векторы должны быть линейно независимы. В столбце  $P^{(k)}$  записываются также дополнительные неизвестные. Эти неизвестные также независимы, они обозначают фиктивную продукцию. Иными словами, решение по симплексному плану начинается с момента, когда ничего не производится, т.е.  $L^{(0)}=0$ . Затем с помощью последо-

вательных этапов решений (итераций) определяют необходимый объём производства каждого продукта при заданной целевой функции и наложенных ограничениях.

В столбец  $x_0$  записываются свободные члены уравнений ограничений.

В конце процесса вычислений в столбце  $P^{(k)}$  будут записаны неизвестные оптимального плана, в столбце  $x_0$  – значения этих переменных, т.е. итоговое решение, а в  $L^{(k)}$  – максимальное (минимальное) значение функции цели.

Последние два столбца таблицы ( $\alpha$  и  $\beta$ ) имеют вспомогательное значение. Заполнение их удобно для выполнения проверки хода решения.

Исходная симплексная таблица, составленная в соответствии с системой уравнений (3.4), приведена в табл. 3.3.

Значение  $L^{(0)}$  и элементов целевой строки  $z_j$  вычислены по формулам:

$$L^{(0)} = \sum_{i=1}^m c_i^0 x_{i0}; \quad z_j = \sum_{i=1}^m c_i^0 a_{ij} - c_j.$$

Таблица 3.3

**Исходная симплексная таблица**

		$c_j$								$\alpha$	$\beta$	
		1	1	1	1	0	0	0	0			
$c^0$	$P^0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$		
0	$x_5$	1100	25	10	9	15	1	0	0	0	44	–
0	$x_6$	20000	160	150	160	190	0	1	0	0	125	6,4
0	$x_7$	21000	250	190	300	800	0	0	1	0	84	10,0
0	$x_8$	2200	28	24	20	20	0	0	0	1	78	1,12
		0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0		-0,04
		$z_j$										

В нашем примере значение  $L^{(0)}=0 \cdot 1100+0 \cdot 20000+0 \cdot 21000+0 \cdot 2200=0$ , значение элемента столбца  $x_1$  в целевой строке равно  $(0 \cdot 25+0 \cdot 160+0 \cdot 250+0 \cdot 28) \cdot 1=-1$  и т.д.

Сказанное позволяет установить формальные правила, на основе которых заполняется симплексная таблица: а) в столбец  $P^{(0)}$  записываются дополнительные переменные; б) в столбец  $x_0$  заносятся значения свободных членов уравнений ограничений; в) элементы целевой строки в столбцах основных переменных равны коэффициентам эффективности при этих переменных, взятых с обратным знаком; г) элементы целевой строки в столбцах дополнительных переменных равны нулю; д) значение функции целевой строки  $L$  равно нулю.

**Проверка плана на оптимальность.** План проверяется построением целевой строки. Если для основных векторов все элементы целевой строки  $z-c_j \geq 0$ , то план, записанный в столбце  $P^{(k)}$ , является оптимальным и значе-

ние линейной функции этого плана равно  $L^{(k)}$ . Если приведённое условие не удовлетворяется, то план улучшается.

**Последовательное улучшение плана.** Эта операция производится введением в план (столбец  $P^{(k)}$ ) вектора той неизвестной, которая может больше, чем другие, увеличить (уменьшить) значение целевой функции задачи.

Алгоритм симплексного метода определяет правила выбора вектора, который необходимо ввести в план, и вектора, исключаемого из плана, и правила связанных с этим расчётов.

1. Определяем вектор, вводимый в план. Для этого среди элементов целевой строки выбираем наибольшее отрицательное число (за исключением столбца  $x_0$ ). Этот вектор подлежит вводу в план. Столбец называется *направляющим*. Обозначим его индексом  $s$ .

В нашем примере можно вводить любой из векторов  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  или  $x_4$ , так как коэффициенты  $c_j$  у них одинаковые. Введём столбец  $x_1$  и будем называть его *ключевым* (в табл. 3.3 он выделен жирной линией).

2. Определим вектор, подлежащий исключению из плана. С этой целью для каждого положительного элемента  $x_{is} > 0$  находим отношение  $\alpha = x_{i0}/x_{is}$ , т.е. отношение свободных членов уравнений к соответствующим коэффициентам ключевого столбца. Значение  $\alpha$  записываем в табл. 3.3. Минимальное из значений  $\alpha$  определяет тот вектор, который должен быть исключён из плана. Строка, соответствующая минимальному значению  $\alpha$ , называется *ключевой строкой*. Обозначим её индексом  $r$ .

Из данных табл. 3.3 видно, что минимальное значение  $\alpha$  равно 44. Следовательно ключевой является первая строка и из плана должен быть исключён вектор  $x_5$ . На его место должен быть записан вектор  $x_1$  и соответствующее этому вектору значение коэффициента интенсивности, равного 1. Ключевая строка в табл. 3.3 также выделена.

На пересечении ключевой строки  $r$  и ключевого столбца  $s$  находится ключевой элемент  $a_{rs} = 25$ . С помощью этого элемента производится перерасчёт симплексной таблицы.

3. Пересчитываем симплексную таблицу так, чтобы на месте ключевого элемента получить 1, а все остальные элементы ключевого столбца обратить в нуль.

Элементы ключевой строки образуются с помощью формулы:

$$x_{ij}^{нов} = \frac{x_{ij}}{a_{rs}}. \quad (3.5)$$

Эта формула применяется также для пересчёта элемента столбца в ключевой строке.

Для преобразования всех остальных элементов матрицы коэффициентов, столбца  $x_0$  и целевой строки используется формула:

$$x_{ij}^{нов} = x_{ij} - x_{rj}\beta, \quad i \neq r, \quad (3.6)$$

где  $\beta = x_{is}/a_{rs}$  – вспомогательный постоянный коэффициент (например, в табл. 3.3  $\beta_2 = 160/25 = 6,4$ ,  $\beta_3 = 250/25 = 10$  и т.д.; в табл. 3.3  $x_{4,3}^{нов} = 800 - 15 \cdot 10 = 650$  и т. д.).

4. Повторяем операции 1-3 до тех пор, пока в целевой строке (в основных векторах-столбцах) не останется отрицательных чисел. Это будет означать получение оптимального решения.

Приведённые ниже симплексные таблицы позволяют проследить в числах методику поиска оптимального решения.

Таблица 3.4

**Первая итерация**

$c^1$	$P^1$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$\alpha$	$\beta$
1	$x_1$	44	1	0,4	0,36	0,6	0,04	0	0	0	122,22	0,002
0	$x_6$	12960	0	86	102,4	94	-6,4	1	0	0	126,56	0,488
0	$x_7$	10000	0	90	210	650	-10	0	1	0	47,62	1
0	$x_8$	968	0	12,8	9,92	3,2	-1,12	0	0	1	97,58	0,047
		44	0	-0,6	-0,64	-0,4	0,04	0	0	0	-68,75	-0,003

Таблица 3.5

**Вторая итерация**

$c^2$	$P^2$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$\alpha$	$\beta$
1	$x_1$	26,86	1	0,25	0	-0,51	0,06	0	-0,002	0	109,30	0,03
0	$x_6$	8083,81	0	42,11	0	-223	-1,52	1	-0,49	0	191,95	4,93
1	$x_3$	47,62	0	0,43	1	3,10	-0,05	0	0,005	0	111,11	0,050
0	$x_8$	495,62	0	8,55	0	-27,50	-0,65	0	-0,047	1	57,98	1
		74,48	0	-0,33	0	1,58	0,01	0	0,003	0	-229	-0,038

Таблица 3.6

**Третья итерация**

$c^3$	$P^3$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
1	$x_1$	12,61	1	0	0	0,28	0,08	0	0,000	-0,029
0	$x_6$	5642,16	0	0	0	-87,45	1,67	1	-0,25	0,000
1	$x_3$	22,77	0	0	1	3,02	-0,05	0	0,00	0,000
1	$x_2$	57,98	0	1	0	-3,22	-0,08	0	-0,006	0,117
		93,36	0	0	0	0,533	-0,015	0	0,001	0,038

Табл. 3.4 получена путём пересчёта исходной табл. 3.3. В неё включен вектор  $x_1$ , исключён вектор  $x_5$ . Численные значения в табл. 3.4 представля-



ют собой первую итерацию (приближение) решения задачи. Значение функции равно 44.

В табл. 3.5 дана вторая итерация. Она потребовалась в связи с тем, что в целевой строке табл. 3.4 имеются отрицательные значения. Наибольшее по модулю  $|0,64|$ . Ключевой элемент равен 210. Во второй итерации в решение введён вектор  $x_3$ , выведен вектор  $x_7$ . Значение функции цели равно 74,5.

В табл. 3.6 приведена третья итерация. Она вызвана тем, что в результате второй итерации в целевой строке получено значение  $-0,33$ , ключевой элемент равен 8,55. В связи с этим в третью итерацию введен вектор  $x_2$ , выведен вектор  $x_8$ .

Среди элементов целевой строки в табл. 3.6 есть только один отрицательный ( $-0,015$ ), но он находится в столбце вектора  $x_5$ , ранее исключённого из плана. Поэтому его повторное введение в план нецелесообразно.

Следовательно, решение является оптимальным при таких значениях векторов:

$$x=(x_1; x_2; x_3)=(12,61; 57,98; 22,77).$$

Это значит, что в заданных конкретных условиях оптимальным будет выпуск конструкций I типа 13 шт., II типа – 58 шт., III типа – 23 шт. Конструкции IV типа производить не целесообразно.

Найденные значения переменных  $x_1=13$ ,  $x_2=58$ ,  $x_3=23$  подставляем в уравнение ограничений и проверяем расход ресурсов при изготовлении конструкций:

$$0,25 \cdot 13 + 0,1 \cdot 58 + 0,09 \cdot 23 \approx 11 \text{ чел.} - \text{дн.};$$

$$1,6 \cdot 13 + 1,5 \cdot 58 + 1,6 \cdot 23 = 144,6 \text{ м}^3;$$

$$2,5 \cdot 13 + 1,9 \cdot 58 + 3 \cdot 23 \approx 210 \text{ чел.} - \text{дн.};$$

$$0,28 \cdot 13 + 0,24 \cdot 58 + 0,2 \cdot 23 \approx 22 \text{ т.}$$

Подсчёты показывают, что найденное решение является оптимальным, поскольку полностью исчерпаны ресурсы по изготовлению арматурных каркасов и конструкций, а также расходу пара для их прогрева. Производство бетона (вторая строка) имеет резерв ( $200-144,6=55,4 \text{ м}^3$ ), который может быть использован для иных объектов строительства.

При решении сложных задач повторяемость операций при пересчёте симплексной таблицы позволяет эффективно использовать стандартные программы для ЭВМ (например, Excel).

## Варианты заданий к задаче № 3

№ варианта	Тип конструкции	Нормы на изготовление конструкции				Количество имеющихся ресурсов			
		Трудоёмкость изготовления арматурных каркасов, чел.-дни	Потребность в бетоне, м <sup>3</sup>	Трудоёмкость изготовления конструкций, чел.-дни	Расход пара, т	Затраты на изготовление арм. каркасов, чел.-дни	Объём выпуска бетона, м <sup>3</sup>	Затраты на изготовление конструкций, чел.-дни	Пар, т
1	I	0,295	2,05	2,95	0,325	11	200	210	22
	II	0,145	1,95	2,35	0,285				
	III	0,135	2,05	3,9	0,245				
	IV	0,195	2,35	8,9	0,245				
2	I	0,26	1,7	2,6	0,29	12	210	220	23
	II	0,11	1,6	2	0,25				
	III	0,1	1,7	3,2	0,21				
	IV	0,16	2	8,2	0,21				
3	I	0,265	1,75	2,65	0,295	13	220	230	24
	II	0,115	1,65	2,05	0,255				
	III	0,105	1,75	3,3	0,215				
	IV	0,165	2,05	8,3	0,215				
4	I	0,27	1,8	2,7	0,3	14	230	240	25
	II	0,12	1,7	2,1	0,26				
	III	0,11	1,8	3,4	0,22				
	IV	0,17	2,1	8,4	0,22				
5	I	0,275	1,85	2,75	0,305	15	240	250	26
	II	0,125	1,75	2,15	0,265				
	III	0,115	1,85	3,5	0,225				
	IV	0,175	2,15	8,5	0,225				
6	I	0,28	1,9	2,8	0,31	11	200	210	22
	II	0,13	1,8	2,2	0,27				
	III	0,12	1,9	3,6	0,23				
	IV	0,18	2,2	8,6	0,23				
7	I	0,285	1,95	2,85	0,315	12	210	220	23
	II	0,135	1,85	2,25	0,275				
	III	0,125	1,95	3,7	0,235				

	IV	0,185	2,25	8,7	0,235				
8	I	0,29	2	2,9	0,32	13	220	230	24
	II	0,14	1,9	2,3	0,28				
	III	0,13	2	3,8	0,24				
	IV	0,19	2,3	8,8	0,24				
9	I	0,295	2,05	2,95	0,325	14	230	240	25
	II	0,145	1,95	2,35	0,285				
	III	0,135	2,05	3,9	0,245				
	IV	0,195	2,35	8,9	0,245				
10	I	0,3	2,1	3	0,33	15	240	250	26
	II	0,15	2	2,4	0,29				
	III	0,14	2,1	4	0,25				
	IV	0,2	2,4	9	0,25				
11	I	0,305	2,15	3,05	0,335	11	200	210	22
	II	0,155	2,05	2,45	0,295				
	III	0,145	2,15	4,1	0,255				
	IV	0,205	2,45	9,1	0,255				
12	I	0,25	1,6	2,5	0,28	12	210	220	23
	II	0,10	1,5	1,9	0,24				
	III	0,09	1,6	3,0	0,20				
	IV	0,15	1,9	8,0	0,20				
13	I	0,26	1,7	2,6	0,29	13	220	230	24
	II	0,11	1,6	2	0,25				
	III	0,1	1,7	3,2	0,21				
	IV	0,16	2	8,2	0,21				
14	I	0,265	1,75	2,65	0,295	14	230	240	25
	II	0,115	1,65	2,05	0,255				
	III	0,105	1,75	3,3	0,215				
	IV	0,165	2,05	8,3	0,215				
15	I	0,27	1,8	2,7	0,3	15	240	250	26
	II	0,12	1,7	2,1	0,26				
	III	0,11	1,8	3,4	0,22				
	IV	0,17	2,1	8,4	0,22				
16	I	0,275	1,85	2,75	0,305	11	200	210	22
	II	0,125	1,75	2,15	0,265				
	III	0,115	1,85	3,5	0,225				
	IV	0,175	2,15	8,5	0,225				
17	I	0,28	1,9	2,8	0,31	12	210	220	23
	II	0,13	1,8	2,2	0,27				
	III	0,12	1,9	3,6	0,23				
	IV	0,18	2,2	8,6	0,23				

18	I	0,285	1,95	2,85	0,315	13	220	230	24
	II	0,135	1,85	2,25	0,275				
	III	0,125	1,95	3,7	0,235				
	IV	0,185	2,25	8,7	0,235				
19	I	0,29	2	2,9	0,32	14	230	240	25
	II	0,14	1,9	2,3	0,28				
	III	0,13	2	3,8	0,24				
	IV	0,19	2,3	8,8	0,24				
20	I	0,295	2,05	2,95	0,325	15	240	250	26
	II	0,145	1,95	2,35	0,285				
	III	0,135	2,05	3,9	0,245				
	IV	0,195	2,35	8,9	0,245				
21	I	0,3	2,1	3	0,33	11	200	210	22
	II	0,15	2	2,4	0,29				
	III	0,14	2,1	4	0,25				
	IV	0,2	2,4	9	0,25				
22	I	0,305	2,15	3,05	0,335	12	210	220	23
	II	0,155	2,05	2,45	0,295				
	III	0,145	2,15	4,1	0,255				
	IV	0,205	2,45	9,1	0,255				
23	I	0,295	2,05	2,95	0,325	13	220	230	24
	II	0,145	1,95	2,35	0,285				
	III	0,135	2,05	3,9	0,245				
	IV	0,195	2,35	8,9	0,245				
24	I	0,3	2,1	3	0,33	14	230	240	25
	II	0,15	2	2,4	0,29				
	III	0,14	2,1	4	0,25				
	IV	0,2	2,4	9	0,25				
25	I	0,305	2,15	3,05	0,335	15	240	250	26
	II	0,155	2,05	2,45	0,295				
	III	0,145	2,15	4,1	0,255				
	IV	0,205	2,45	9,1	0,255				

#### 4. Задача оптимального распределения рабочих на объектах методом динамического программирования

Предметом динамического программирования является решение задач оптимизации управления процессами, которые моделируют, например, календарное планирование, определение стратегии развития производственной базы в строительстве, планирование парка машин и механизмов, последовательность включения объектов в строительный поток, выбора оптимального пути перевозок, принятия решения о приёме заказов на строительство объектов и т.п.

Основным методом динамического программирования является метод рекуррентных соотношений, в основе которого лежит принцип оптимальности Беллмана: если управление процесса оптимально, то оно будет оптимальным и для процесса, остающегося после осуществления первого шага. В соответствии с этим принципом процесс принятия решений при динамическом программировании является процессом многошаговым, а целевая функция зависит от последовательности реализации шагов и их продолжительности.

Общая схема решения задач выглядит следующим образом. Исходные данные заносят в таблицу. Затем путем перебора возможных вариантов находят оптимальные по принятому критерию варианты решений сначала для одной пары показателей. На следующей итерации, перебирая варианты по паре, образованной оптимизированным из первых двух вариантов и 3-им вариантом, находят новый оптимальный вариант и т.д., пока не будет пересмотрена вся исходная таблица. Обратным порядком определяют, каким образом получен оптимальный вариант.

Для решения практической задачи распределения рабочих по объектам вначале введем некоторые понятия.

*Бригаду* будем рассматривать как стабильную неделимую единицу, наделенную комплектом машин и механизмов и имеющую определенную производственную мощность и специализацию.

*Работа* представляет собой комплекс специализированных частных процессов, который поручается бригаде – например, возведение кирпичных стен, что включает в себя выгрузку кирпича, кладочных сеток, песка, цемента или готового раствора, монтаж подмостей, обустройство рабочих мест каменщиков, кладку стен и т.п. Отметим, что бригады каменщиков складываются из звеньев по 2-6 человек.

Под *производственной мощностью* (производственными возможностями) строительной бригады понимается максимально возможный объем строительно-монтажных работ (СМР) по сметной стоимости или в натуральном измерении, который способна выполнить бригада в течение квар-

тала (месяца) наличным составом рабочих, машин и механизмов при соответствующей технологической последовательности, структуре выполняемых работ на объектах, заданных темпах роста производительности труда рабочих бригады за счет использования внутрипроизводственных резервов и внедрения мероприятий по новой технике, механизации работ, технологии и организации труда в бригаде.

Производственная мощность бригады с одинаковым числом человек в звеньях определяется по формуле:

$$W = \frac{N}{n} twT, \quad (4.1)$$

где  $N$  – количество человек в бригаде, чел.;  $n$  – количество человек в одном звене, чел.;  $t$  – продолжительность смены, час;  $w$  – норма выработки для звена, у.е./час (может быть в натуральном или денежном выражении);  $T$  – плановый фонд рабочего времени, дни (составляет примерно 60-70% от календарного времени).

При этом норма выработки определяется по выражению:

$$w = \frac{E}{H_t}, \quad (4.2)$$

где  $E$  – единица измерения объёмов работ по ЕНиР;  $H_t$  – норма времени по ЕНиР.

Например, из ЕНиР Сборник ЕЗ «Каменные работы» Таблица 3 на 1 м<sup>3</sup> кладки для звена из 2-х человек нормы времени в зависимости от сложности работ варьируются от 2,3 до 4,6 час. Соответственно, норма выработки будет составлять от 0,22 до 0,43 м<sup>3</sup>/час.

Поскольку норма выработки зависит от разряда рабочих (профессионализма каменщиков) и сложности работ, то для одного и того же состава звена (и бригады в целом) норма выработки на различных участках (объектах) будет тоже различная. Кроме того, она сильно зависит от общего количества рабочих на объекте (**существует закономерность, что, начиная с определённого уровня численности рабочих, их общая производительность не растёт и может даже падать**). В связи с этим возникает задача об оптимальном распределении рабочих по объектам, чтобы обеспечить максимальный объём строительно-монтажных работ (СМР):

$$СМР = \sum_{i=1}^{m-1} W_i \rightarrow \max, \quad (4.3)$$

где  $m$  – количество бригад;  $W_i$  – производственная мощность  $i$ -ой бригады (по формуле 4.1).

**Задача.** Необходимо на ближайший квартал распределить 4-е бригады каменщиков ( $m=1\dots4$ ) по 10 человек ( $N=10$ ) и состоящие из 5-и звеньев по 2 человека ( $n=2$ ) каждая (разряд каменщиков по условию задачи не уточняется) на строительство новых четырех объектов (кирпичных зданий), чтобы выполнить максимальный объем строительно-монтажных работ (СМР), если известно, норма выработки  $w$  для одного звена на объектах с I по IV в зависимости от количества рабочих, направляемых на эти объекты, различен и записан в виде табл. 4.1.

Таблица 4.1

**Норма выработки для одного звена каменщиков из 2 чел., м<sup>3</sup>/час**

Количество рабочих	Номера объектов			
	I	II	III	IV
	Норма времени для одного звена из 2 чел., час			
0	0	0	0	0
10 (1 бригада)	0,321	0,256	0,385	0,353
20 (2 бригады)	0,369	0,288	0,321	0,304
30 (3 бригады)	0,288	0,267	0,331	0,299
40 (4 бригады)	0,232	0,256	0,280	0,288

**Решение.** Примем продолжительность смены  $t=8$  часов; плановый фонд рабочего времени в один квартал  $T=0,65 \cdot 30 \cdot 4=78$  дней.

Суммарная производственная мощность объединённых бригад определяется выражением:

$$\sum W = m \frac{N}{n} twT. \quad (4.4)$$

Результаты расчёта по этой формуле представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

**Суммарная производственная мощность бригад, м<sup>3</sup>/квартал**

Количество рабочих	Номера объектов			
	I	II	III	IV
	Производственная мощность бригады, м <sup>3</sup> /квартал			
0	0	0	0	0
10 (1 бригада)	1000	800	1200	1100
20 (2 бригады)	2300	1800	2000	1900
30 (3 бригады)	2700	2500	3100	2800
40 (4 бригады)	2900	3200	3500	3600

В табл. 4.2, например, для 1-го объекта при распределении на него 4-е бригады (40 человек):  $\sum W = 4 \frac{10}{2} 8 \cdot 0,232 \cdot 78 \approx 2900 м^3$ . Если на тот же объект распределить 3-и бригады:  $\sum W = 3 \frac{10}{2} 8 \cdot 0,288 \cdot 78 \approx 2700 м^3$  и т.д.

В качестве этапов вычисления будем рассматривать направление рабочих сначала на один объект, затем на два, на три и, наконец, на четыре объекта.

Таблица 4.3

Количество рабочих	$F_1(x) = q_1(x)$	$F_2(x)$	$q_2(x)$	$F_3(x)$	$q_3(x)$	$F_4(x)$	$q_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
10	1000	800	1000	<b>1200</b>	1200	<b>1100</b>	1200
20	<b>2300</b>	1800	<b>2300</b>	2000	2300	1900	2300
30	2700	2500	3100	3100	<b>3500</b>	2800	3500
40	2900	3200	4100	3500	4300	3600	<b>4600</b>

Функции объемов СМР в зависимости от количества рабочих на каждом объекте:  $F_1(x)$  – по первому объекту;  $F_2(x)$  – по второму;  $F_3(x)$  – по третьему;  $F_4(x)$  – по четвертому; где  $x$  – количество рабочих.

Функции оптимального распределения объемов СМР:

$q_1(x)$  – по первому объекту;

$q_2(x)$  – по двум;

$q_3(x)$  – по трем;

$q_4(x)$  – по четырем объектам.

Нахождение оптимума на каждом этапе производится методом простого перебора всех возможных вариантов.

1. В первом столбце  $F_1(x)$  записаны объемы СМР, получаемые при направлении рабочих на I объект.

$F_1(x) = q_1(x)$  так как при направлении всех рабочих на первый объект размер СМР  $F_1(x)$  для него и будет оптимальным.

2. Во втором столбце  $F_2(x)$  записаны объемы СМР, получаемые при направлении всех рабочих на второй объект.

3. Третий столбец формируется как результат выполнения объемов СМР по двум объектам (первому и второму).



3.1. При составлении бригады 10 человек их можно направить только в один из двух рассматриваемых объектов. Так как объем СМР при распределении 10 человек на I объект ( $1000 \text{ м}^3$ ) больше, чем на II ( $800 \text{ м}^3$ ), то этих рабочих выгоднее направить на I-й объект.

В столбце  $q_2(10)$  записываем  $1000 \text{ м}^3$

$$q_2(10) = \max \left\{ \begin{array}{l} 1000 + 0 = 1000 \\ 0 + 800 = 800 \end{array} \right\} = 1000.$$

3.2. Если количество рабочих равно 20 чел., то могут быть три варианта их распределения.

3.2.1. Всех рабочих (20 чел.) направить на I объект, что даст объем СМР  $2300 \text{ м}^3$ .

3.2.2. Всех рабочих направить на II объект, при этом объем СМР составит  $1800 \text{ м}^3$ .

3.2.3. 10 человек направить на I объект, 10 человек – на II объект, что даст суммарный объем СМР  $1000 + 800 = 1800 \text{ м}^3$ .

Максимальный объем СМР при распределении 20 человек по трем вариантам составит  $2300 \text{ м}^3$ .

$$q_2(20) = \max \left\{ \begin{array}{l} 2300 + 0 = 2300 \\ 0 + 1800 = 1800 \\ 1000 + 800 = 1800 \end{array} \right\} = 2300.$$

3.3. Если количество рабочих равно 30 человек, то могут быть четыре варианта распределения:

3.3.1. Всех рабочих (30 чел.) направить на I объект, что даст объем СМР  $2700 \text{ м}^3$ .

3.3.2. Всех рабочих направить на II объект, при этом объем СМР составит  $2500 \text{ м}^3$ .

3.3.3. 20 человек направить на I объект, 10 человек – на II объект, что даст суммарный объем СМР  $2300 + 800 = 3100 \text{ м}^3$ .

3.3.4. 10 человек направить на I объект, 20 человек – на II объект, что даст суммарный объем СМР  $1000 + 1800 = 2800 \text{ м}^3$ .

Максимальный объем СМР при распределении 30 человек на I и II объектах составит:

$$q_2(30) = \max \left\{ \begin{array}{l} 2700 + 0 = 2700 \\ 0 + 2500 = 2500 \\ 2300 + 800 = 3100 \\ 1000 + 1800 = 2800 \end{array} \right\} = 3100.$$

3.4. Если количество рабочих равно 40 человек, то могут быть пять вариантов их распределения:

3.4.1. Всех рабочих (40 чел.) направить на I объект, что даст объем СМР – 2900 м<sup>3</sup>.

3.4.2. Всех рабочих (40 чел.) направить на II объект, при этом объем СМР составит 3200 м<sup>3</sup>.

3.4.3. 20 человек направить на I объект и 20 человек направить на II объект, что даст суммарный объем СМР 2300+1800=4100 м<sup>3</sup>.

3.4.4. 30 человек направить на I объект, 10 человек - на II объект, что даст суммарный объём СМР 2700+800=3500 м<sup>3</sup>.

3.4.5. 10 человек – на I объект, 30 человек – на II объект, что даст суммарный объем СМР – 1000+2500=3500 м<sup>3</sup>.

Максимальный объем СМР при распределении 40 человек на I и II объектах

$$q_2(40) = \max \left\{ \begin{array}{l} 2900 + 0 = 2900 \\ 0 + 3200 = 3200 \\ 2300 + 1800 = 4100 \\ 2700 + 800 = 3500 \\ 1000 + 2500 = 3500 \end{array} \right\} = 4100.$$

4. Далее находим, пользуясь вышеизложенной методикой, оптимальное распределение рабочих по трем объектам, рассматривая оптимальные распределения  $q_2(x)$ , найденные на предыдущей итерации, в качестве исходных данных:

$$q_3(10) = \max \left\{ \begin{array}{l} 1000 + 0 = 1000 \\ 0 + 1200 = 1200 \end{array} \right\} = 1200$$

$$q_3(20) = \max \left\{ \begin{array}{l} 2300 + 0 = 2300 \\ 0 + 2000 = 2000 \\ 1000 + 1200 = 2200 \end{array} \right\} = 2300$$

$$q_3(30) = \max \left\{ \begin{array}{l} 3100 + 0 = 3100 \\ 0 + 3100 = 3100 \\ 2300 + 1200 = 3500 \\ 1000 + 2000 = 3000 \end{array} \right\} = 3500$$

$$q_3(40) = \max \left\{ \begin{array}{l} 4100 + 0 = 4100 \\ 0 + 3500 = 3500 \\ 2300 + 2000 = 4300 \\ 3100 + 1200 = 4300 \\ 1000 + 3100 = 4100 \end{array} \right\} = 4300.$$

5. Найдем оптимальное распределение рабочих по четырем объектам. Составляем оптимальный вариант  $q_4(x)$  на следующей итерации, перебирая варианты по паре, образованной оптимизированным вариантом  $q_3(x)$  и четвертым (исходным) вариантом  $F_4(x)$ .

$$q_4(10) = \max \left\{ \begin{array}{l} 1200 + 0 = 1200 \\ 0 + 1100 = 1100 \end{array} \right\} = 1200$$

$$q_4(20) = \max \left\{ \begin{array}{l} 2300 + 0 = 2300 \\ 0 + 1900 = 1900 \\ 1200 + 1100 = 2300 \end{array} \right\} = 2300$$

$$q_4(30) = \max \left\{ \begin{array}{l} 3500 + 0 = 3500 \\ 0 + 2800 = 2800 \\ 2300 + 1100 = 3400 \\ 1200 + 1900 = 3100 \end{array} \right\} = 3500$$

$$q_4(40) = \max \left\{ \begin{array}{l} 4300 + 0 = 4300 \\ 0 + 3600 = 3600 \\ 2300 + 1900 = 4200 \\ 3500 + 1100 = 4600 \\ 1200 + 2800 = 4000 \end{array} \right\} = 4600.$$

Полученные числа 1200, 2300, 3500, 4600 заносят в столбец  $q_4(x)$  новой матрицы (табл. 4.3).

Обратным порядком определяем оптимальный вариант. На основании полученной матрицы (табл. 4.3) сделаем следующий вывод: максимальный объем СМР будет выполнен, если на I объект направить 20 человек, на III объект направить 10 человек, на IV объект – 10 человек. Объем строительно-монтажных работ при этом составит 4600 м<sup>3</sup>.

Из примера видно, что благодаря применению метода динамического программирования задача с четырьмя параметрами превратилась в три задачи с одним параметром, что позволило легко и просто решить задачу.

Таблица 4.4

## Варианты заданий к задаче № 4

№ Варианта	Количество рабочих	Номера участков			
		1	2	3	4
		Норма выработки для одного звена из 2 чел., м <sup>3</sup> /час			
1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0
	10	0,224	0,412	0,214	0,694
	20	0,224	0,343	0,385	0,285
	30	0,321	0,203	0,405	0,361
	40	0,264	0,262	0,427	0,312
2	0	0	0	0!	0
	15	0,171	0,361	0,285	0,240
	30	0,160	0,406	0,253	0,385
	45	0,192	0,332	0,275	0,334
	60	0,160	0,374	0,293	0,331
3	0	0	0	0!	0
	10	0,192	0,374	0,366	0,321
	20	0,192	0,374	0,298	0,394
	30	0,224	0,290	0,439	0,321
	40	0,240	0,342	0,290	0,343
4	0	0	0	0!	0
	15	0,150	0,366	0,160	0,481
	30	0,160	0,427	0,144	0,570
	45	0,150	0,366	0,254	0,337
	60	0,176	0,330	0,283	0,342
5	0	0	0	0!	0
	10	0,256	0,361	0,285	0,240
	20	0,224	0,412	0,249	0,275
	30	0,288	0,332	0,240	0,382
	40	0,240	0,374	0,293	0,341
6	0	0	0	0!	0
	20	0,096	0,374	0,366	0,321
	40	0,096	0,374	0,366	0,341
	60	0,112	0,214	0,595	0,308
	80	0,116	0,332	0,342	0,321
7	0	0	0	0!	0
	15	0,171	0,361	0,249	0,275
	30	0,150	0,366	0,321	0,200
	45	0,171	0,334	0,282	0,262
	60	0,171	0,331	0,291	0,256

8	0	0	0	0!	0
	10	0,096	0,641	0,481	0,356
	20	0,144	0,427	0,427	0,300
	30	0,171	0,381	0,371	0,291
	40	0,168	0,458	0,342	0,321
9	0	0	0	0!	0
	20	0,112	0,275	0,481	0,285
	40	0,112	0,343	0,385	0,285
	60	0,144	0,332	0,275	0,334
	80	0,120	0,374	0,293	0,331
10	0	0	0	0!	0
	15	0,107	0,449	0,275	0,267
	30	0,128	0,347	0,370	0,278
	45	0,150	0,336	0,291	0,321
	60	0,134	0,333	0,333	0,309
11	0	0	0	0!	0
	10	0,160	0,449	0,275	0,481
	20	0,192	0,374	0,366	0,361
	30	0,224	0,366	0,307	0,348
	40	0,232	0,332	0,310	0,354
12	0	0	0	0!	0
	10	0,256	0,280	0,275	0,481
	20	0,256	0,300	0,256	0,481
	30	0,256	0,280	0,290	0,489
	40	0,256	0,290	0,309	0,389
13	0	0	0	0!	0
	10	0,385	0,187	0,275	0,748
	20	0,369	0,251	0,267	0,427
	30	0,299	0,286	0,372	0,332
	40	0,280	0,293	0,331	0,408
14	0	0	0	0!	0
	20	0,272	0,358	0,253	0,342
	40	0,208	0,308	0,308	0,361
	60	0,192	0,303	0,302	0,361
	80	0,176	0,342	0,307	0,349
15	0	0	0	0!	0
	15	0,192	0,285	0,401	0,385
	30	0,256	0,307	0,362	0,271
	45	0,192	0,344	0,309	0,332
	60	0,171	0,361	0,294	0,330

16	0	0	0	0!	0
	20	0,112	0,366	0,361	0,214
	40	0,112	0,412	0,374	0,259
	60	0,118	0,350	0,361	0,237
	80	0,128	0,341	0,358	0,278
17	0	0	0	0!	0
	10	0,192	0,374	0,366	0,361
	20	0,144	0,392	0,350	0,454
	40	0,168	0,290	0,354	0,305
	50	0,192	0,342	0,321	0,321
18	0	0	0	0!	0
	10	0,256	0,200	0,449	0,366
	20	0,192	0,374	0,412	0,214
	30	0,288	0,332	0,240	0,382
	40	0,240	0,374	0,311	0,302
19	0	0	0	0!	0
	15	0,150	0,412	0,214	0,427
	30	0,160	0,406	0,253	0,385
	45	0,150	0,366	0,254	0,337
	60	0,182	0,339	0,267	0,342
20	0	0	0	0!	0
	20	0,192	0,427	0,220	0,291
	40	0,112	0,412	0,285	0,220
	60	0,112	0,366	0,347	0,247
	80	0,128	0,341	0,358	0,278
21	0	0	0	0!	0
	20	0,080	0,449	0,275	0,481
	40	0,096	0,374	0,366	0,361
	60	0,112	0,427	0,275	0,334
	80	0,128	0,361	0,267	0,353
22	0	0	0	0!	0
	10	0,256	0,280	0,275	0,427
	20	0,192	0,374	0,366	0,361
	30	0,288	0,332	0,240	0,382
	40	0,240	0,363	0,311	0,340
23	0	0	0	0!	0
	20	0,096	0,374	0,229	0,513
	40	0,096	0,401	0,192	0,392
	60	0,112	0,366	0,307	0,279
	80	0,116	0,332	0,342	0,331

24	0	0	0	0!	0
	15	0,107	0,449	0,275	0,481
	30	0,171	0,220	0,350	0,374
	45	0,142	0,353	0,306	0,351
	60	0,123	0,334	0,307	0,404
25	0	0	0	0!	0
	10	0,256	0,401	0,353	0,262
	20	0,224	0,366	0,381	0,304
	30	0,224	0,366	0,334	0,295
	40	0,200	0,359	0,298	0,345
26	0	0	0	0!	0
	20	0,096	0,374	0,229	0,513
	30	0,171	0,300	0,256	0,374
	40	0,168	0,427	0,275	0,334
	60	0,171	0,341	0,302	0,331
27	0	0	0	0!	0
	15	0,192	0,285	0,401	0,385
	30	0,256	0,307	0,362	0,271
	45	0,199	0,332	0,321	0,298
	60	0,171	0,341	0,358	0,312
28	0	0	0	0!	0
	20	0,080	0,449	0,275	0,481
	30	0,128	0,374	0,412	0,321
	50	0,173	0,332	0,240	0,382
	60	0,171	0,331	0,291	0,353
29	0	0	0	0!	0
	10	0,192	0,374	0,183	0,641
	20	0,192	0,374	0,206	0,463
	30	0,288	0,332	0,240	0,382
	40	0,232	0,354	0,290	0,376
30	0	0	0	0!	0
	10	0,224	0,366	0,160	0,481
	20	0,224	0,412	0,285	0,220
	30	0,224	0,366	0,254	0,337
	50	0,179	0,332	0,287	0,333

## 5. Задача оптимизации железобетонного элемента, работающего на косо внецентренное сжатие, итерационным методом «деления отрезка пополам»

Пусть требуется оптимально запроектировать из условий прочности железобетонный элемент прямоугольного поперечного сечения, работающий на косо внецентренное сжатие (рис. 5.1). На элемент одновременно действует продольная сила  $N=2600$  кН и изгибающие моменты  $M_x=240$  кН·м и  $M_y=182,5$  кН·м в плоскостях, параллельных, соответственно, размерам сечения  $h$  и  $b$ . Внешними переменными параметрами при оптимизации выбираем геометрические размеры сечения  $h$  и  $b$ , класс бетона  $B$ , класс арматуры  $A$ ; внутренними переменными параметрами – площадь сечения арматуры.

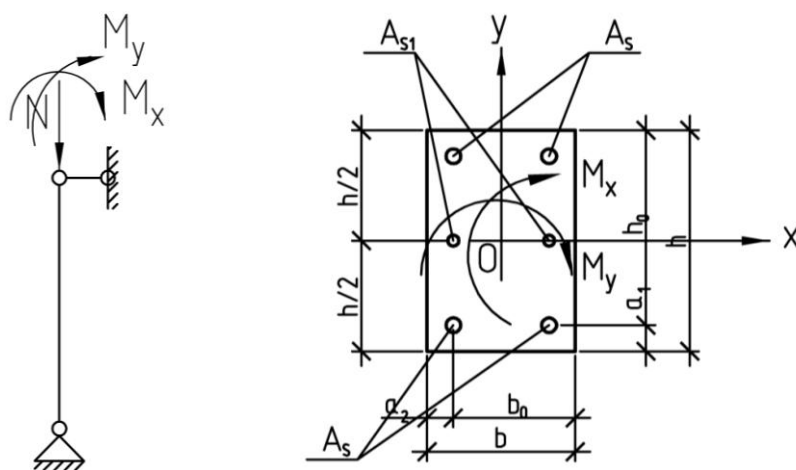


Рис. 5.1. Расчётная схема железобетонного элемента, работающего на косо внецентренное сжатие

Для решения внутренней задачи оптимизации необходимо задаться схемой армирования. Принимаем, что при каждом фиксированном значении внешних параметров элемент армируется шестью стержнями (рис. 5.1): четыре стержня одинакового сечения располагаются в углах сечения, а два других стержня одинакового диаметра – посередине высоты сечения  $h$ . Обозначим площадь одной пары стержней каждого из типов, соответственно,  $A_s$  и  $A_{s1}$ . Количество стержней и схему их расположения, показанные на рис. 5.1, сохраняем неизменными при любом значении внешних переменных параметров; меняются только диаметры стержней. Внутренняя задача оптимизации заключается в определении диаметров стержней, обеспечивающих прочность элемента при минимальной площади сечения



арматуры. Считаем, что для армирования могут применяться все стержни сортамента арматурной стали диаметром от 16 до 36 мм. Для рационального армирования выполняем условие:  $A_s \geq A_{s1}$ . Все назначенные возможные варианты армирования, расположенные в порядке возрастания несущей способности, представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

**Варианты армирования при решении внутренней задачи оптимизации для элемента, работающего на косое внецентренное сжатие**

№ варианта $T$	Количество и диаметр стержней $(A_{s1}+2A_s)$	Площадь арматуры $A_{s,tot}$ , $см^2$	№ варианта $T$	Количество и диаметр стержней $(A_{s1}+2A_s)$	Площадь арматуры $A_{s,tot}$ , $см^2$	№ варианта $T$	Количество и диаметр стержней $(A_{s1}+2A_s)$	Площадь арматуры $A_{s,tot}$ , $см^2$
1	2Ø16+4Ø16	12,06	11	2Ø20+4Ø25	25,91	21	2Ø22+4Ø32	39,77
2	2Ø16+4Ø18	14,20	12	2Ø22+4Ø25	27,23	22	2Ø25+4Ø32	41,99
3	2Ø18+4Ø18	15,27	13	2Ø16+4Ø28	28,65	23	2Ø16+4Ø36	44,74
4	2Ø16+4Ø20	16,58	14	2Ø18+4Ø28	29,72	24	2Ø18+4Ø36	45,81
5	2Ø18+4Ø20	17,65	15	2Ø20+4Ø28	30,91	25	2Ø20+4Ø36	47,0
6	2Ø16+4Ø22	19,22	16	2Ø22+4Ø28	32,23	26	2Ø22+4Ø36	48,32
7	2Ø18+4Ø22	20,29	17	2Ø25+4Ø28	34,45	27	2Ø25+4Ø36	50,54
8	2Ø20+4Ø22	21,48	18	2Ø16+4Ø32	36,19	28	2Ø28+4Ø36	53,04
9	2Ø16+4Ø25	23,65	19	2Ø18+4Ø32	37,26	29	2Ø32+4Ø36	56,81
10	2Ø18+4Ø25	24,72	20	2Ø20+4Ø32	38,45	30	2Ø36+4Ø36	61,08

**Внимание!** В табл. 5.1 представлены НЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ для решения задачи, а всевозможные варианты схем армирования сечения колонны по конструктивным требованиям, которые необходимо рассмотреть всем, независимо от варианта задания!

Для прямоугольного сечения с симметричной арматурой (а именно такой случай и рассматривается) проверка условий прочности при фиксированных значениях  $h$ ,  $b$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $A_s$  и  $A_{s1}$  проводится с помощью графиков, приведённых на рис. 5.2.

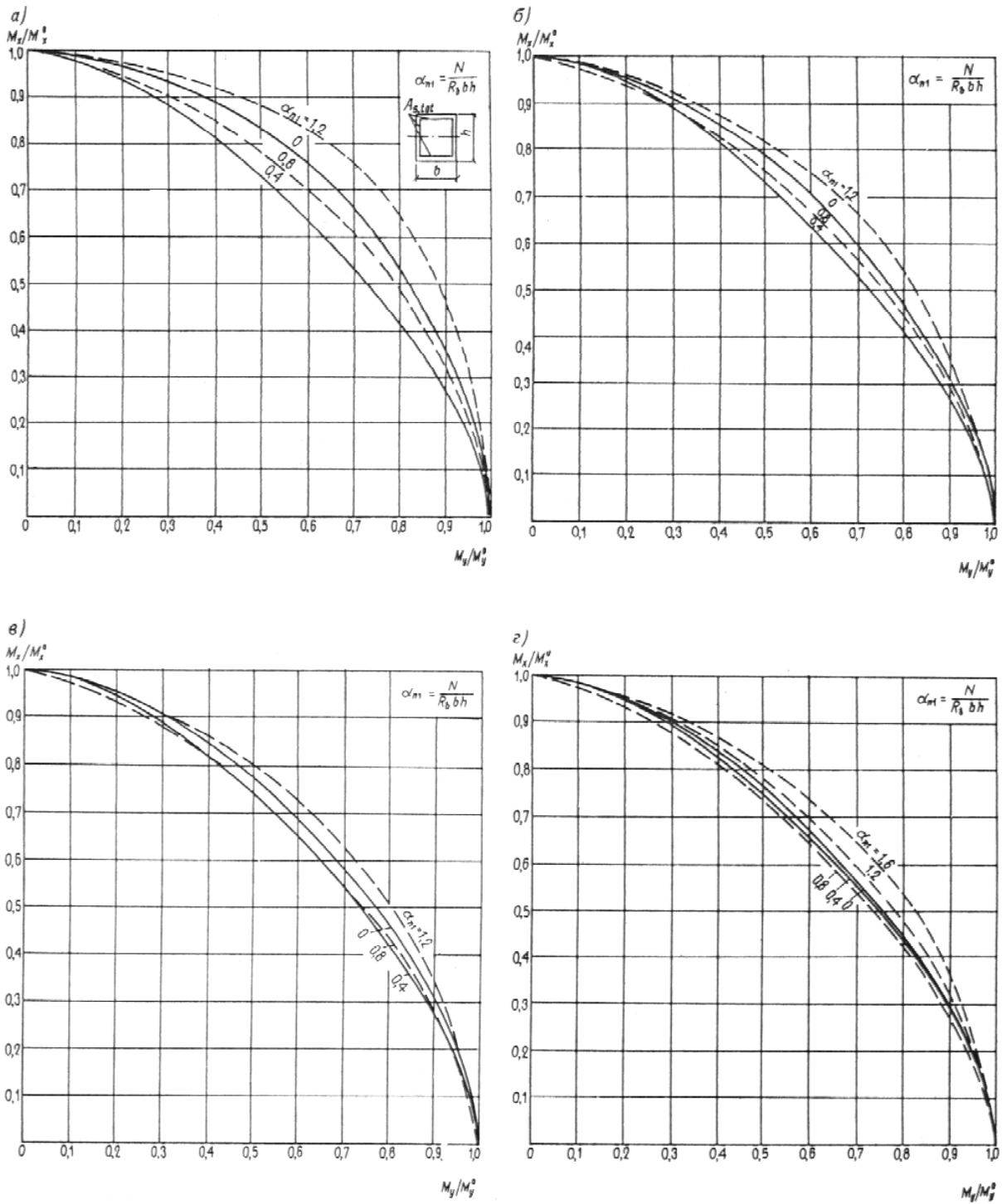


Рис. 5.2. Графики несущей способности элементов прямоугольного сечения с симметричной арматурой, работающих на косо внецентренное сжатие

а – при  $\alpha_s = 0,2$ ; б – при  $\alpha_s = 0,4$ ; в – при  $\alpha_s = 0,6$ ; г – при  $\alpha_s = 1,0$

$$\left( \alpha_s = \frac{R_s A_{s,tot}}{R_b b h} \right).$$

Чтобы найти вариант с минимальным армированием, обеспечивающим прочность элемента, используем один из методов одномерного поиска – **метод деления отрезка пополам**. Применительно к рассматриваемому примеру проиллюстрируем этот метод, когда фиксированные значения внешних переменных параметров имеют следующие значения:  $h=600$  мм,  $b=400$  мм, бетон класса В25, арматура класса А400.

Сначала проверяем, выполняются ли условия прочности для варианта с номером Т=1 в следующей последовательности.

$$1. \text{ Коэффициент } \alpha_{n1} = \frac{N}{R_b b h} = \frac{2600}{14,5 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 0,747.$$

$$2. \text{ Общая площадь сечения рабочей арматуры в сечении } A_{s,tot} = 2A_s + A_{s1} = 1206 \text{ мм}^2.$$

$$3. \text{ Коэффициент } \alpha_s = \frac{R_s A_{s,tot}}{R_b b h} = \frac{355 \cdot 1206}{14,5 \cdot 400 \cdot 600} = 0,123.$$

4. Площадь сечения арматуры, расположенной у одной из граней, параллельных плоскости изгиба:  $A_{s1} = \frac{A_{s1}}{2} (n_l + 1) = \frac{402}{2} (1 + 1) = 402 \text{ мм}^2$ ,  $n_l$  – число промежуточных стержней.

5. Площадь сечения арматуры, расположенной у одной из граней, перпендикулярных плоскости изгиба:

$$A_{st} = \frac{A_{s,tot}}{2} - A_{s1} = \frac{1206}{2} - 402 = 201 \text{ мм}^2.$$

$$6. \text{ Коэффициент } \delta_1 = \frac{a_1}{h} = \frac{40}{600} = 0,0667.$$

7. Коэффициент

$$\alpha_{s1} = \frac{R_s A_{s1}}{R_b b h (0,5 - \delta_1)} = \frac{355 \cdot 402 \cdot 10^{-6}}{14,5 \cdot 0,4 \cdot 0,6 (0,5 - 0,0667)} = 0,0947.$$

$$8. \text{ Коэффициент } \alpha_{st} = \frac{R_s A_{st}}{R_b b h} = \frac{355 \cdot 201 \cdot 10^{-6}}{14,5 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 0,0205.$$

9. Из табл. 5.2 выписываем коэффициент полноты эпюры сжимающих напряжений –  $\omega=0,734$ ; граничную относительную высоту сжатой зоны бетона –  $\xi_R=0,563$ .

10. Относительная высота сжатой зоны равна  $\xi = \frac{x}{h} = \frac{\alpha_{n1} + \alpha_{s1}}{1 + 2\alpha_{s1} / \omega} = \frac{0,747 + 0,0946}{1 + 2 \cdot 0,0946 / 0,734} = 0,669 > \xi_R = 0,563$ , поэтому принимаем  $\xi = \xi_R = 0,563$ .

11. Относительная высота сжатой зоны с учётом коэффициента полноты эпюры сжимающих напряжений  $\xi_{1R} = \frac{\xi_R}{\omega} = \frac{0,563}{0,734} = 0,767$  ( $\xi_1 = \frac{\xi}{\omega}$ , при  $\xi \leq \xi_R$ ).

12. Относительный изгибающий момент

$$\begin{aligned} \alpha_{mR} &= 0,5\xi_R(1-\xi_R) + \alpha_{sl}(\xi_{1R} - \delta_1)(1-\xi_{1R} - \delta_1) - 0,05\alpha_{sl}\xi_{1R}^2 + \alpha_{st}(1-2\delta_1) = \\ &= 0,5 \cdot 0,563 \cdot (1-0,563) + 0,0946 \cdot (0,767 - 0,0667)(1-0,767 - 0,0667) - \\ &- 0,05 \cdot 0,0946 \cdot 0,767^2 + 0,0205 \cdot (1-2 \cdot 0,0667) = 0,149 \\ (\alpha_m &= 0,5\xi(1-\xi) + \alpha_{sl}(\xi_1 - \delta_1)(1-\xi_1 - \delta_1) - 0,05\alpha_{sl}\xi_1^2 + \alpha_{st}(1-2\delta_1) \text{ при} \\ \xi &\leq \xi_R). \end{aligned}$$

13. Относительная величина продольной силы при равномерном сжатии всего сечения  $\alpha_{na} = 1 + \frac{R_s A_{s,tot}}{R_b b h} = 1 + \frac{355 \cdot 1206}{14,5 \cdot 400 \cdot 600} = 1,123$ .

14. Коэффициент

$$\alpha_{nR} = \xi_R + \alpha_{sl}(2\xi_{1R} - 1) = 0,563 + 0,0946 \cdot (2 \cdot 0,767 - 1) = 0,614.$$

15. Предельный изгибающий момент с учётом продольной силы, приложенной в центре тяжести сечения

$$\begin{aligned} M_x^0 &= R_b b h^2 \alpha_{mR} \frac{\alpha_{na} - \alpha_{n1}}{\alpha_{na} - \alpha_{nR}} = 14,5 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 \cdot 0,149 \cdot \frac{1,123 - 0,747}{1,123 - 0,614} = \\ &= 229,6 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

$$(M_x^0 = R_b b h^2 \alpha_m, \text{ при } \xi \leq \xi_R).$$

Далее аналогичным образом определяется предельный изгибающий момент в перпендикулярном направлении (пп. 16-26).

16. Площадь сечения арматуры, расположенной у одной из граней, параллельных плоскости изгиба:  $A_{sl} = 0$ .

17. Площадь сечения арматуры, расположенной у одной из граней, перпендикулярных плоскости изгиба:  $A_{st} = \frac{A_{s,tot}}{2} - A_{sl} = \frac{1206}{2} - 0 = 603 \text{ мм}^2$ .

18. Коэффициент  $\delta_1 = \frac{a_2}{b} = \frac{40}{400} = 0,1$ .

19. Коэффициент  $\alpha_{sl} = \frac{R_s A_{sl}}{R_b b h (0,5 - \delta_1)} = 0$ .

20. Коэффициент  $\alpha_{st} = \frac{R_s A_{st}}{R_b b h} = \frac{355 \cdot 603 \cdot 10^{-6}}{14,5 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 0,0615$ .

21. Относительная высота сжатой зоны  $\xi = \frac{x}{h} = \frac{\alpha_{n1} + \alpha_{sl}}{1 + 2\alpha_{sl}/\omega} = \frac{0,747 + 0}{1 + 2 \cdot 0 / 0,734} = 0,747 > \xi_R = 0,563$ , поэтому принимаем  $\xi = \xi_R = 0,563$ .

22. Относительная высота сжатой зоны с учётом коэффициента полноты эпюры сжимающих напряжений  $\xi_{1R} = \frac{\xi_R}{\omega} = \frac{0,563}{0,734} = 0,767$

$$(\xi_1 = \frac{\xi}{\omega}, \text{ при } \xi \leq \xi_R).$$

23. Относительный изгибающий момент

$$\alpha_{mR} = 0,5\xi_R(1 - \xi_R) + \alpha_{sl}(\xi_{1R} - \delta_1)(1 - \xi_{1R} - \delta_1) - 0,05\alpha_{sl}\xi_{1R}^2 + \alpha_{st}(1 - 2\delta_1) = 0,5 \cdot 0,563 \cdot (1 - 0,563) + 0 - 0 + 0,0615 \cdot (1 - 2 \cdot 0,1) = 0,172$$

$$(\alpha_m = 0,5\xi(1 - \xi) + \alpha_{sl}(\xi_1 - \delta_1)(1 - \xi_1 - \delta_1) - 0,05\alpha_{sl}\xi_1^2 + \alpha_{st}(1 - 2\delta_1), \text{ при } \xi \leq \xi_R).$$

24. Коэффициент  $\alpha_{nR} = \xi_R + \alpha_{sl}(2\xi_{1R} - 1) = 0,563 + 0 = 0,563$ .

25. Предельный изгибающий момент с учётом продольной силы, приложенной в центре тяжести сечения

$$M_y^0 = R_b h b^2 \alpha_{mR} \frac{\alpha_{na} - \alpha_{n1}}{\alpha_{na} - \alpha_{nR}} = 14,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6 \cdot 0,4^2 \cdot 0,172 \cdot \frac{1,123 - 0,747}{1,123 - 0,563} = 160,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

26.  $M_y^0 = R_b h b^2 \alpha_m$  (при  $\xi \leq \xi_R$ ).

27. Откладываем в декартовой плоскости рис. 2,а точку с координатами  $\left( \frac{M_x}{M_x^0}; \frac{M_y}{M_y^0} \right) = \left( \frac{240}{229,6}; \frac{182,5}{160,9} \right) = (1,045; 1,134)$ . Видно, что точка

расположена над предельной кривой, следовательно несущая способность сечения необеспечена и необходимо рассмотреть иной вариант армирования (с большей площадью).

Таблица 5.2

**Значение коэффициентов  $\omega$  и  $\xi_R$**

Класс арматуры	Параметр	Класс бетона										
		B12,5	B15	B20	B25	B30	B35	B40	B45	B50	B55	B60
	$\omega$	0,790	0,782	0,758	0,734	0,714	0,694	0,674	0,650	0,630	0,610	0,586
A400	$\xi_R$	0,628	0,619	0,591	0,563	0,541	0,519	0,498	0,473	0,453	0,434	0,411
A300	$\xi_R$	0,660	0,650	0,623	0,593	0,573	0,551	0,530	0,505	0,485	0,465	0,442
A240	$\xi_R$	0,682	0,673	0,645	0,618	0,596	0,575	0,553	0,528	0,508	0,488	0,464

Аналогично для варианта T=30 получим точку  $\left( \frac{M_x}{M_x^0}; \frac{M_y}{M_y^0} \right) = (0,414; 0,426)$ . Откладывая её в координатной плоскости рис. 5.2а, убеждаемся, что имеется существенный запас по несущей способности.

Ясно, что искомый вариант армирования  $T_m$  лежит в интервале  $1 < T_m < 30$ . Определим, выполняется ли проверка для варианта  $T=16$ , номер которого примерно равен среднему арифметическому между значениями  $T=1$  и  $T=30$ . После выполнения необходимых расчётов устанавливаем, что условия прочности для этого варианта не выполняются: точка с координатами  $\left(\frac{M_x}{M_x^0}; \frac{M_y}{M_y^0}\right) = (0,619; 0,678)$  лежит над предельной кривой.

Так как при возрастании несущей способности, увеличивается и номер варианта, то искомый номер должен удовлетворять неравенству  $16 < T_m < 30$ .

Продолжая этот процесс, приходим к тому, что вариант  $T=20$  обеспечивает, а соседний вариант –  $T=19$  – не обеспечивает выполнения условий прочности. Таким образом,  $T_m=20$ ; внутренняя задача оптимизации решена. Сечение элемента армируем угловыми стержнями 4Ø32 А400 и боковыми промежуточными 2Ø20 А400.

Совершенно аналогично можно поступать и в других случаях, когда по СНиП нельзя непосредственно найти минимальные площади сечения арматуры, удовлетворяющие необходимым условиям.

Таблица 5.3

**Варианты заданий к задаче № 5**

Вариант	$b$ , мм	$h$ , мм	$B$	$A$	$N$ , кН	$M_x$ , кН·м	$M_y$ , кН·м
1	300	500	B15	A400	1500	150	100
2	310	510	B20	A300	1600	160	110
3	320	520	B25	A240	1700	170	120
4	330	530	B30	A400	1800	180	130
5	340	540	B35	A300	1900	190	140
6	350	550	B40	A240	2000	200	150
7	360	560	B15	A400	2100	210	160
8	370	570	B20	A300	2200	220	170
9	380	580	B25	A240	2300	230	180
10	390	590	B30	A400	2400	240	190
11	400	600	B35	A300	2500	250	200
12	300	500	B40	A240	1900	190	140
13	310	510	B15	A400	2000	200	150
14	320	520	B20	A300	2100	210	160
15	330	530	B25	A240	2200	220	170
16	340	540	B30	A400	2300	230	180
17	380	580	B25	A400	2100	150	100
18	390	590	B30	A300	2200	160	110
19	400	600	B35	A240	2300	170	120
20	300	500	B40	A400	2400	180	130
21	310	510	B15	A300	2500	190	140
22	320	520	B20	A300	2100	210	160
23	330	530	B25	A240	2200	220	170
24	340	540	B30	A400	2300	230	180
25	380	580	B35	A300	2400	240	190

## 6. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Компания, занимающаяся ремонтом автомобильных дорог, в следующем месяце будет проводить ремонтные работы на пяти участках автодорог. Песок на участки ремонтных работ может доставляться из трех карьеров, месячные объемы предложений по карьерам известны. Из планов производства ремонтных работ известны месячные объемы потребностей по участкам работ. Имеются экономические оценки транспортных затрат (в у.е.) на перевозку 1 тонны песка с карьеров на ремонтные участки.

Числовые данные для решения содержатся ниже в матрице планирования (табл. 6.1). Требуется предложить план перевозок песка на участки ремонта автодорог, который обеспечивает минимальные совокупные транспортные издержки.

Таблица 6.1

**Матрица планирования**

Карьеры	Участки дорог					Предложение $a_i$ , у.е.
	$B_1$ ( $j=1$ )	$B_2$ ( $j=2$ )	$B_3$ ( $j=3$ )	$B_4$ ( $j=4$ )	$B_5$ ( $j=5$ )	
$A_1$ ( $i=1$ )	4	2	3	4	1	60
$A_2$ ( $i=2$ )	2	4	3	5	6	90
$A_3$ ( $i=3$ )	6	5	4	6	2	140
Потребности $b_j$ , у.е.	40	30	90	80	50	<b>Баланс: 290/290</b>

В табл. 6.1  $i$  – номер карьера ( $i=1,2,3$ );  $j$  – номер участка дороги, подлежащего ремонту ( $j=1,2,3,4,5$ );  $m=3$  – количество карьеров;  $n=5$  – количество участков дорог;  $A_i$  – маркировка  $i$ -го карьера;  $B_j$  – маркировка  $j$ -го участка;  $c_{ij}$  – величина транспортных затрат (в у.е.) на перевозку 1 тонны песка с  $i$ -го карьера на  $j$ -й участок дороги;  $a_i$  – месячный объем предложений поставки песка с  $i$ -го карьера;  $b_j$  – месячные потребности в песке на  $j$ -ом участке дороги.

### Решение

Суммарные объемы предложений по карьерам равны суммарным объемам потребностей по участкам работ, т.е. выполняется условие общего баланса  $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j = 290$ . Следовательно, данная задача закрытого типа.

Построим начальный базисный план **Методом минимальной стоимости** (табл. 6.2). Начинаем рассматривать первую строку, т.е. распределяем месячный объем предложений поставки песка с 1-го карьера на 5 участков. Назначение перевозок начинаем с клетки (1;5), имеющей минимальную стоимость перевозки (1 у.е.), т.е. с 5-го участка дороги (*примечание*: если по заданию в данной строке присутствует несколько участков

дорог с одинаковой минимальной величиной транспортных затрат, то начинать рассмотрение можно с любого из участков). Объем предложений с первого карьера  $a_1 = 60$  у.е. полностью удовлетворяет потребности в песке на этом участке –  $b_5 = 50$  у.е. В клетку (1,5) записываем объем поставок песка на пятый участок с первого карьера:  $x_{15} = \min(a_1; b_5) = \min(60; 50) = 50$ , тогда уточнённая потребность на этом участке равна нулю:  $b'_5 = b_5 - x_{15} = 50 - 50 = 0$ . На оставшиеся 4 участка с первого карьера может быть поставлено  $a'_1 = a_1 - x_{15} = 60 - 50 = 10$  у.е.

Следующая поставка осуществляется с первого карьера на второй участок (поскольку из участков 1-4 именно на нём величина транспортных затрат минимальна –  $c_{12} = 2$ ). По аналогии с предыдущим в клетку (1,2) назначаем перевозку  $x_{12} = \min(a'_1; b_2) = \min(10; 30) = 10$ . Уточнённая потребность на этом участке равна  $b'_2 = b_2 - x_{12} = 30 - 10 = 20$  у.е., которая вместе с потребностями участков 1,3 и 4 будут удовлетворены другими карьерами – 2 и 3, поскольку возможности первого карьера оказались полностью изчерпаны. Поэтому переходим к рассмотрению второй строки – распределению поставок со второго карьера. По аналогии с предыдущим будем иметь:

$$\min c_{2j} = c_{21} = 2 \quad (j=1 \dots 4); \quad x_{21} = \min(a_2; b_1) = \min(90; 40) = 40 \text{ у.е.};$$

$$a'_2 = a_2 - x_{21} = 90 - 40 = 50 \text{ у.е.}; \quad b'_1 = b_1 - x_{21} = 40 - 40 = 0;$$

$$\min c_{2j} = c_{23} = 3 \quad (j=2 \dots 4); \quad x_{23} = \min(a'_2; b_3) = \min(50; 90) = 50 \text{ у.е.};$$

$$a''_2 = a'_2 - x_{23} = 50 - 50 = 0; \quad b'_3 = b_3 - x_{23} = 90 - 50 = 40.$$

Для третьей строки – распределения поставок с третьего карьера:

$$\min c_{3j} = c_{33} = 4 \quad (j=2 \dots 4); \quad x_{33} = \min(a_3; b'_3) = \min(140; 40) = 40 \text{ у.е.};$$

$$a'_3 = a_3 - x_{33} = 140 - 40 = 100 \text{ у.е.}; \quad b''_3 = b'_3 - x_{33} = 40 - 40 = 0;$$

$$\min c_{3j} = c_{32} = 5 \quad (j=2, 4); \quad x_{32} = \min(a'_3; b'_2) = \min(100; 20) = 20 \text{ у.е.};$$

$$a''_3 = a'_3 - x_{32} = 100 - 20 = 80 \text{ у.е.}; \quad b''_2 = b'_2 - x_{32} = 20 - 20 = 0;$$

$$\min c_{3j} = c_{34} = 6 \quad (j=4); \quad x_{34} = \min(a''_3; b_4) = \min(80; 80) = 80 \text{ у.е.};$$

$$a'''_3 = a''_3 - x_{34} = 80 - 80 = 0; \quad b'_4 = b_4 - x_{34} = 80 - 80 = 0.$$

Таблица 6.2

### Начальный базисный план

Предложение $a_i$ , у.е.	Потребности $b_j$ , у.е.				
	40	30	90	80	50
60	- 4	<b>10</b> 2	- 3	- 4	<b>50</b> 1
90	<b>40</b> 2	- 4	<b>50</b> 3	- 5	- 6
140	- 6	<b>20</b> 5	<b>40</b> 4	<b>80</b> 6	- 2



Отметим, что клетки табл. 6.2, в которые записаны отличные от нуля перевозки, называются **базисными**, а остальные (пустые) – **свободными**.

Построенный начальный план перевозок является невырожденным, так как число назначенных перевозок  $x_{ij}$  равно 7, что не меньше величины  $m+n-1=3+5-1=7$ .

*Примечания*

1. План называется **вырожденным**, если количество базисных клеток в нем меньше, чем  $m+n-1$ . Если во время решения задачи получился вырожденный план, то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток нулевую перевозку и превратив, тем самым, эти клетки в базисные (общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменятся). Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. План должен быть ациклическим!

2. План называется **ациклическим**, если его базисные клетки не содержат циклов. **Циклом** в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце.

3. Если план оказался вырожденным, т.е. если число перевозок получилось меньше  $m+n-1$ , то можно одну или несколько перевозок разделить на две или более в произвольном соотношении.

Определим полную стоимость перевозок по найденному опорному плану:

$$z_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot c_{ij} = 10 \cdot 2 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 40 \cdot 4 + 80 \cdot 6 = 1040 \text{ у.е.}$$

Определим оптимальность полученного плана. С помощью **Метода потенциалов** вычислим потенциалы строк  $u_i$  и столбцов  $v_j$  по стоимости перевозок в загруженных клетках. Если известен потенциал строки  $u_i$ , то потенциал столбца определяется формулой  $v_j=c_{ij}-u_i$ ; если известен  $v_j$ , то  $u_i=c_{ij}-v_j$ . Положим, например,  $u_1=0$  (*примечание*: можно задаться не только строковым потенциалом, но и столбцовым – исходя из удобства решения задачи). Тогда будут вычислены и остальные потенциалы строк и столбцов (табл. 6.3).

Таблица 6.3

**Вычисление потенциалов для базисного плана**

Строчковой потенциал $u_i$	Столбцевой потенциал $v_j$				
	$v_1=0$	$v_2=2$	$v_3=1$	$v_4=3$	$v_5=1$
$u_1=0$	↑ - 4	↑ <b>10</b>	↑ - 3	↑ - 4	↑ <b>50</b>
$u_2=3$	← <b>40</b>	- 2	← <b>50</b>	- 5	- 6
$u_3=3$	← - 6	← <b>20</b>	← <b>40</b>	← <b>80</b>	- 2

В табл. 6.3 стрелками показаны пути вычисления потенциалов через друг друга (построение этих путей возможно только, если при повороте они проходят через базисные клетки с заполненной поставкой).

Ниже вычисляются потенциалы строк и столбцов базисного плана:

$$u_1=0; v_2=c_{12}-u_1=2-0=2; v_5=c_{15}-u_1=1-0=1; u_3=c_{32}-v_2=5-2=3;$$

$$v_3=c_{34}-u_3=4-3=1; v_4=c_{35}-u_3=6-3=3; u_2=c_{23}-v_3=3-1=2; v_1=c_{21}-u_2=2-2=0.$$

Для незагруженных свободных клеток вычислим величины превышения стоимости по формуле  $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$  (табл. 6.4):

$$\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 4 - 0 - 0 = 4; \Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 3 - 0 - 1 = 2;$$

$$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 4 - 0 - 3 = 1; \Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 4 - 3 - 2 = -1;$$

$$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 5 - 3 - 3 = -1; \Delta_{25} = c_{25} - u_2 - v_5 = 6 - 3 - 1 = 2;$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 6 - 3 - 0 = 3; \Delta_{35} = c_{35} - u_3 - v_5 = 2 - 3 - 1 = -2.$$

Таблица 6.4

**Превышения стоимости для незагруженных клеток  
(в скобках)**

Строковой потенциал $u_i$	Столбцевой потенциал $v_j$				
	$v_1=0$	$v_2=2$	$v_3=1$	$v_4=3$	$v_5=1$
$u_1=0$	(+4) <sup>4</sup>	<b>10</b> <sup>2</sup>	(+2) <sup>3</sup>	(+1) <sup>4</sup>	<b>50</b> <sup>1</sup>
$u_2=3$	<b>40</b> <sup>2</sup>	(-1) <sup>4</sup>	<b>50</b> <sup>3</sup>	(-1) <sup>5</sup>	(+2) <sup>6</sup>
$u_3=3$	(+3) <sup>6</sup>	<b>20</b> <sup>5</sup>	<b>40</b> <sup>4</sup>	<b>80</b> <sup>6</sup>	(-2) <sup>2</sup>

Полученный план не оптимален, так как среди оценок  $\Delta_{ij}$  имеются отрицательные значения. Его следует улучшить путём перераспределения поставок.

Найдем ячейку – потенциальную – с наибольшей по абсолютной величине отрицательной разностью  $\Delta_{ij}$  и построим цикл, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными. Такой цикл всегда существует и он единственен.

Потенциальной ячейкой в табл. 6.4 является клетка (3,5). От клетки (3,5) строим цикл – замкнутый контур, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными: (3,5), (1,5), (1,2), (3,2). Начиная с потенциальной клетки (3,5) разметим вершины контура попеременно знаками «+» и минус «-», обходя замкнутый контур в любом направлении. Из клеток, помечанных знаком «-», выбираем наименьшее значение объема перевозки  $\theta = \min(x_{15}; x_{32}) = \min(50; 20) = 20$  у.е. Сформируем новый улучшенный план (табл. 6.5).

Для этого значение  $\theta = 20 \text{ у.е.}$  вписываем в свободную ячейку со знаком «+». Затем последовательно обходим все ячейки цикла, поочередно вычитая и прибавляя к ним минимальное значение (в соответствии со знаками, которыми эти ячейки помечены: где минус – вычитаем, где плюс – прибавляем):

$$x'_{35} = x_{35} + \theta = 0 + 20 = 20 \text{ у.е.}; \quad x'_{15} = x_{15} - \theta = 50 - 20 = 30 \text{ у.е.};$$

$$x'_{12} = x_{12} + \theta = 10 + 20 = 30 \text{ у.е.}; \quad x'_{32} = x_{32} - \theta = 20 - 20 = 0.$$

Таблица 6.5

### Улучшенный план № 1

Предложение $a_i$ , у.е.	Потребности $b_j$ , у.е.				
	40	30	90	80	50
60	- 4	<b>30</b> 2	- 3	- 4	<b>30</b> 1
90	<b>40</b> 2	- 4	<b>50</b> 3	- 5	- 6
140	- 6	- 5	<b>40</b> 4	<b>80</b> 6	<b>20</b> 2

Определим полную стоимость перевозок по найденному новому плану:

$$z_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot c_{ij} = 30 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 80 \cdot 6 + 20 \cdot 2 = 1000 \text{ у.е.}$$

Ниже вычисляются потенциалы строк и столбцов улучшенного плана № 1 (также вначале приняли  $u_1=0$ ):

$$u_1=0; \quad v_2=c_{12}-u_1=2-0=2; \quad v_5=c_{15}-u_1=1-0=1; \quad u_3=c_{35}-v_5=2-1=1;$$

$$v_3=c_{34}-u_3=4-1=3; \quad v_4=c_{35}-u_3=6-1=5; \quad u_2=c_{23}-v_3=3-3=0; \quad v_1=c_{21}-u_2=2-0=2.$$

В табл. 6.6 представлена процедура вычисления потенциалов по аналогии с табл. 6.3.

Для незагруженных свободных клеток вычислим величины превышения стоимости (табл. 6.7):

$$\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 4 - 0 - 2 = 2; \quad \Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 3 - 0 - 3 = 0;$$

$$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 4 - 0 - 5 = -1; \quad \Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 4 - 0 - 2 = 2;$$

$$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 5 - 0 - 5 = 0; \quad \Delta_{25} = c_{25} - u_2 - v_5 = 6 - 0 - 1 = 5;$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 6 - 1 - 2 = 3; \quad \Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 5 - 1 - 2 = 2.$$

Таблица 6.6

### Вычисление потенциалов для улучшенного плана № 1

Строчковой потенциал $u_i$	Столбцевой потенциал $v_j$				
	$v_1=2$	$v_2=2$	$v_3=3$	$v_4=5$	$v_5=1$
$u_1=0$	↑ - 4	↑ <b>30</b> 2	↑ - 3	↑ - 4	↑ <b>30</b> 1
$u_2=0$	← <b>40</b> 2	- 4	← <b>50</b> 3	- 5	- 6
$u_3=1$	← - 6	- 5	← <b>40</b> 4	← <b>80</b> 6	← <b>20</b> 2

Таблица 6.7

**Превышения стоимости для незагруженных клеток  
(в скобках)**

Строковой потенциал $u_i$	Столбцевой потенциал $v_j$				
	$v_1=2$	$v_2=2$	$v_3=3$	$v_4=5$	$v_5=1$
$u_1=0$	(+2) <sup>4</sup>	<b>30</b> <sup>2</sup>	(+0) <sup>3</sup>	(-1) <sup>4</sup>	<b>30</b> <sup>1</sup>
$u_2=0$	<b>40</b> <sup>2</sup>	(+2) <sup>4</sup>	<b>50</b> <sup>3</sup>	(+0) <sup>5</sup>	(+5) <sup>6</sup>
$u_3=1$	(+3) <sup>6</sup>	(+2) <sup>5</sup>	<b>40</b> <sup>4</sup>	<b>80</b> <sup>6</sup>	<b>30</b> <sup>2</sup>

Полученный план не оптимален, так как среди оценок  $\Delta_{ij}$  имеются отрицательные значения. Его следует улучшить путём перераспределения поставок.

Потенциальной ячейкой – с наибольшей по абсолютной величине отрицательной разностью  $\Delta_{ij}$  – в табл. 6.7 является клетка (1,4). От клетки (1,4) строим цикл – замкнутый контур, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными: (1,4), (3,4), (3,5), (1,5). Начиная с потенциальной клетки (1,4) разметим вершины контура попеременно знаками «+» и минус «-», обходя замкнутый контур по часовой стрелке. Из клеток, помечанных знаком «-», выбираем наименьшее значение объёма перевозки  $\theta = \min(x_{35}; x_{51}) = \min(80; 30) = 30 \text{ у.е.}$  Сформируем новый улучшенный план (табл. 6.8).

Для этого значение  $\theta = 30 \text{ у.е.}$  вписываем в свободную ячейку со знаком «+». Затем последовательно обходим все ячейки цикла, поочередно вычитая и прибавляя к ним минимальное значение (в соответствии со знаками, которыми эти ячейки помечены: где минус – вычитаем, где плюс – прибавляем):

$$x'_{14} = x_{14} + \theta = 0 + 30 = 30 \text{ у.е.}; \quad x'_{34} = x_{34} - \theta = 80 - 30 = 50 \text{ у.е.};$$

$$x'_{35} = x_{35} + \theta = 20 + 30 = 50 \text{ у.е.}; \quad x'_{15} = x_{15} - \theta = 30 - 30 = 0.$$

Таблица 6.8

**Улучшенный план № 2**

Предложение $a_i$ , у.е.	Потребности $b_j$ , у.е.				
	40	30	90	80	50
60	- <sup>4</sup>	<b>30</b> <sup>2</sup>	- <sup>3</sup>	<b>30</b> <sup>4</sup>	- <sup>1</sup>
90	<b>40</b> <sup>2</sup>	- <sup>4</sup>	<b>50</b> <sup>3</sup>	- <sup>5</sup>	- <sup>6</sup>
140	- <sup>6</sup>	- <sup>5</sup>	<b>40</b> <sup>4</sup>	<b>50</b> <sup>6</sup>	<b>50</b> <sup>2</sup>

Определим полную стоимость перевозок по найденному новому плану:

$$z_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij} = 30 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 40 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 50 \cdot 6 + 50 \cdot 2 = 970 \text{ у.е.}$$

Ниже вычисляются потенциалы строк и столбцов улучшенного плана № 2 (как и прежде вначале приняли  $u_1=0$ ):

$$u_1=0; v_2=c_{12}-u_1=2-0=2; v_4=c_{14}-u_1=4-0=4; u_3=c_{34}-v_4=6-4=2;$$

$$v_3=c_{33}-u_3=4-2=2; v_5=c_{35}-u_3=2-2=0; u_2=c_{23}-v_3=3-2=1; v_1=c_{21}-u_2=2-1=1.$$

В табл. 6.9 представлена процедура вычисления потенциалов по аналогии с табл. 6.3 и 6.6.

Таблица 6.9

**Вычисление потенциалов для улучшенного плана № 2**

Строковой потенциал $u_i$	Столбцевой потенциал $v_j$				
	$v_1=1$	$v_2=2$	$v_3=2$	$v_4=4$	$v_5=0$
$u_1=0$	↑ - 4	↑ 30 2	↑ - 3	↑ 30 4	↑ - 1
$u_2=1$	← 40 2	- 4	← 50 3	- 5	- 6
$u_3=2$	← - 6	- 5	← 40 4	← 50 6	← 50 2

Для незагруженных свободных клеток вычислим величины превышения стоимости (табл. 6.10):

$$\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 4 - 0 - 2 = 2; \Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 3 - 0 - 2 = 1;$$

$$\Delta_{15} = c_{15} - u_1 - v_5 = 1 - 0 - 0 = 1; \Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 4 - 1 - 2 = 1;$$

$$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 5 - 1 - 4 = 0; \Delta_{25} = c_{25} - u_2 - v_5 = 6 - 1 - 0 = 5;$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 6 - 2 - 1 = 3; \Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 5 - 5 - 2 = 1.$$

Характеристики свободных клеток неотрицательны, следовательно план является оптимальным.

Таблица 6.10

**Превышения стоимости для незагруженных клеток (в скобках)**

Строковой потенциал $u_i$	Столбцевой потенциал $v_j$				
	$v_1=2$	$v_2=2$	$v_3=3$	$v_4=5$	$v_5=1$
$u_1=0$	(+3) 4	30 2	(+1) 3	30 4	(+1) 1
$u_2=0$	40 2	(+1) 4	50 3	(+0) 5	(+5) 6
$u_3=1$	(+3) 6	(+1) 5	40 4	50 6	50 2

## Варианты заданий к задаче № 6

## Вариант 1

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	3	6	2	5	55
A <sub>2</sub>	4	2	5	4	4	70
A <sub>3</sub>	5	2	3	2	3	105
Потребности	30	20	70	70	40	<b>230/230</b>

## Вариант 2

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	1	2	2	3	40
A <sub>2</sub>	3	2	6	2	3	50
A <sub>3</sub>	2	5	4	5	7	40
Потребности	20	40	30	20	20	<b>130/130</b>

## Вариант 3

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	6	4	5	5	5	70
A <sub>2</sub>	2	5	1	3	4	80
A <sub>3</sub>	3	5	4	5	4	90
Потребности	50	40	40	60	50	<b>240/240</b>

## Вариант 4

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	4	2	1	2	3	50
A <sub>2</sub>	1	4	3	3	2	60
A <sub>3</sub>	1	2	4	2	1	70
Потребности	40	30	30	40	40	<b>180/180</b>

## Вариант 5

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	1	5	20
A <sub>2</sub>	2	3	1	2	1	50
A <sub>3</sub>	3	2	4	1	1	30
Потребности	20	20	20	20	20	100

## Вариант 6

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	5	2	1	2	1	30
A <sub>2</sub>	2	1	2	1	4	50
A <sub>3</sub>	1	5	3	6	1	60
Потребности	30	30	30	30	20	140

### Вариант 7

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	2	3	1	2	2	55
A <sub>2</sub>	1	3	2	1	2	70
A <sub>3</sub>	4	2	6	6	1	105
Потребности	30	20	70	70	40	<b>230/230</b>

### Вариант 8

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	5	4	4	4	5	40
A <sub>2</sub>	2	5	1	5	2	50
A <sub>3</sub>	1	2	5	4	2	40
Потребности	20	40	30	20	20	<b>130/130</b>

### Вариант 9

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	4	5	70
A <sub>2</sub>	5	4	3	2	1	80
A <sub>3</sub>	1	4	2	5	3	90
Потребности	50	40	40	60	50	<b>240/240</b>

### Вариант 10

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	1	2	1	50
A <sub>2</sub>	1	2	3	1	1	60
A <sub>3</sub>	2	3	3	2	1	70
Потребности	40	30	30	40	40	<b>180/180</b>

### Вариант 11

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	2	1	2	1	1	20
A <sub>2</sub>	3	2	3	1	2	50
A <sub>3</sub>	2	1	2	1	4	30
Потребности	20	20	20	20	20	100

### Вариант 12

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	5	5	2	1	1	30
A <sub>2</sub>	1	2	2	4	1	50
A <sub>3</sub>	2	1	1	2	4	60
Потребности	30	30	30	30	20	140

### Вариант 13

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	4	5	55
A <sub>2</sub>	5	4	3	2	1	70
A <sub>3</sub>	1	1	2	2	1	105
Потребности	30	20	70	70	40	<b>230/230</b>

### Вариант 14

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	2	1	40
A <sub>2</sub>	1	2	3	4	5	50
A <sub>3</sub>	5	1	2	4	3	40
Потребности	20	40	30	20	20	<b>130/130</b>

### Вариант 15

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	2	1	70
A <sub>2</sub>	1	2	3	4	5	80
A <sub>3</sub>	5	1	2	4	3	90
Потребности	50	40	40	60	50	<b>240/240</b>

### Вариант 16

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	4	5	50
A <sub>2</sub>	5	4	3	2	1	60
A <sub>3</sub>	1	1	2	2	1	70
Потребности	40	30	30	40	40	<b>180/180</b>

### Вариант 17

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	2	1	20
A <sub>2</sub>	1	2	3	4	5	50
A <sub>3</sub>	5	1	2	4	3	30
Потребности	20	20	20	20	20	100

### Вариант 18

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	2	1	30
A <sub>2</sub>	1	2	3	4	5	50
A <sub>3</sub>	5	1	2	4	3	60
Потребности	30	30	30	30	20	140



### Вариант 19

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	4	5	55
A <sub>2</sub>	5	4	3	2	1	70
A <sub>3</sub>	1	1	2	2	1	105
Потребности	30	20	70	70	40	<b>230/230</b>

### Вариант 20

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	2	1	40
A <sub>2</sub>	1	2	3	4	5	50
A <sub>3</sub>	5	1	2	4	3	40
Потребности	20	40	30	20	20	<b>130/130</b>

### Вариант 21

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	2	1	70
A <sub>2</sub>	1	2	3	4	5	80
A <sub>3</sub>	5	1	2	4	3	90
Потребности	50	40	40	60	50	<b>240/240</b>

### Вариант 22

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	4	5	50
A <sub>2</sub>	5	4	3	2	1	60
A <sub>3</sub>	1	1	2	2	1	70
Потребности	40	30	30	40	40	<b>180/180</b>

### Вариант 23

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	2	1	20
A <sub>2</sub>	1	2	3	4	5	50
A <sub>3</sub>	5	1	2	4	3	30
Потребности	20	20	20	20	20	100

### Вариант 24

Карьеры	Участки дорог					Предложение
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	1	2	3	2	1	30
A <sub>2</sub>	1	2	3	4	5	50
A <sub>3</sub>	5	1	2	4	3	60
Потребности	30	30	30	30	20	140

## 7. Определение оптимального сечения центрально растянутого стального элемента

Определить оптимальное сечение центрально-растянутой затяжки стальной арки при следующих данных: пролёт арки  $l=24$  м, продольное усилие в затяжке  $N=90$  кН, материал затяжки – канат из высокопрочной проволоки (К-7, К-19), коэффициент условий работы  $\gamma_c=0,95$ ; сечение постоянно по длине элемента (поэтому осевая жёсткость  $EA=const$ ). Узел прикрепления подвески к затяжке увеличивает её массу на 0,5% (рис. 7.1). Приведем дополнительные данные к примеру в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Дополнительные исходные данные

Показатель	Канаты				
	К-7				К-9
$d$ , мм	6	9	12	15	14
$A$ , см <sup>2</sup>	0,227	0,510	0,906	1,416	1,287
$R_s$ , МПа	1210	1145	1110	1080	1175
$E$ , МПа	$1,8 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$
$\rho$ , кг/м	0,173	0,402	0,714	1,116	1,020

**Первый этап** решения задачи – составление математического описания задачи.

**1 шаг** – определить границы элемента. Границы элемента представлены на рис. 7.1.

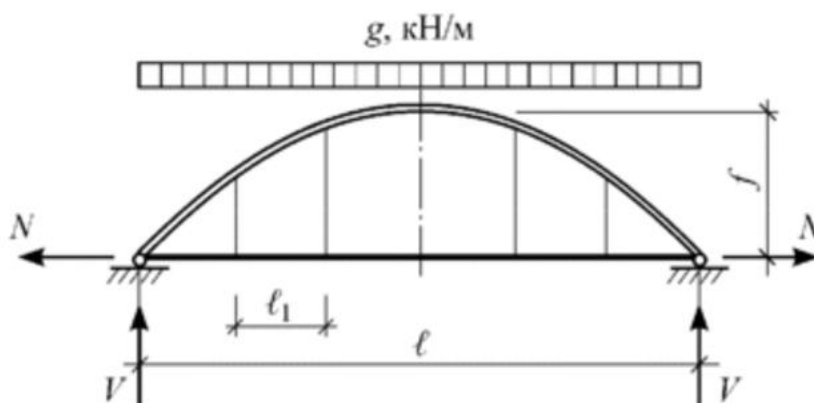


Рис. 7.1. Расчётная схема центрально-растянутого элемента (затяжки)

**2 шаг** – выбрать критерий оптимальности. За критерий оптимальности принимаем *массу* ( $M$ ) центрально-растянутого элемента.

**3 шаг** – определить общее число независимых параметров, влияющих на величину критерия оптимальности, провести их ранжирование по степени влияния на величину критерия оптимальности.

Масса элемента определяется произведением длины элемента, площади сечения и удельного веса; также необходимо учесть узлы крепления подвесок (их количество  $n$  определяется предельной гибкостью затяжки, о чём будет сказано ниже):

$$M = Al\rho\left(1 + \frac{0,5n}{100}\right). \quad (7.1)$$

В выражении (7.1) длина элемента  $l$  и удельный вес  $\rho$  – величины постоянные, т.е.  $l = 24$  м (по условию задачи),  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup> – *const*. Поэтому на критерий оптимальности влияет только один управляемый параметр – площадь поперечного сечения элемента  $A$ .

**4 шаг** – составить уравнение целевой функции.

Для данной задачи, учитывая выражение (7.1), можно записать уравнение целевой функции:

$$F = M = Al\rho(1 + 0,005n) \rightarrow \min. \quad (7.2)$$

**5 шаг** – составить неравенства-ограничения. Для растянутого элемента записываются два ограничения-неравенства:

– из условия прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq R_s \gamma_c; \quad (7.3)$$

– из условия жёсткости

$$\lambda = \frac{l_{cr}}{i_{\min}} \leq [\lambda], \quad (7.4)$$

где  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции сечения;  $l_{cr}$  – расчётная длина элемента;  $[\lambda] = 400$ .

**6 шаг** – составление уравнений состояния. Поскольку задача является линейной, статически определимой, то надобности в этих уравнениях нет.

**Второй этап** – решение математической задачи.

**7 шаг** – провести анализ целевой функции и неравенств ограничений. Целевая функция (7.2) представляет собой уравнение с одним неизвестным ( $A$ ). Условие прочности (7.3) представлено неравенством с одним неизвестным ( $A$ ). Условие жёсткости (7.4) представлено неравенством с одним неизвестным ( $i_{\min}$ ). Задача относится к линейному программированию.

**8 шаг** – выбрать метод решения задачи.

Решение линейного уравнения с одним неизвестным. Из условия прочности (7.3) и жёсткости (7.4) определяем требуемые величины.

В первом приближении примем армирование канатами с минимальным расчётным сопротивлением – Ø15 К7 с  $R_s=1080$  МПа.

$$A_{\min} \geq \frac{N}{R_s \gamma_c} = \frac{90}{108 \cdot 0,95} = 0,877 \text{ см}^2. \quad (7.5)$$

Диаметр каната  $d = \sqrt{\frac{4A_{\min}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,877}{3,14}} = 1,057 \text{ см}$ , минимальный  
радиус инерции для круга  $i_{\min} = \frac{d}{4} = \frac{1,057}{4} = 0,264 \text{ см}$ .

Минимальный шаг затяжек из условия жёсткости

$$l_1 = l_{cr} \leq [\lambda] i_{\min} = 400 \cdot 0,264 = 106 \text{ см}. \quad (7.6)$$

Количество узлов прикрепления подвесок

$$n = \frac{l}{l_1} = \frac{2400}{106} = 22,6 = 23 \text{ шт}. \quad (7.7)$$

Построим область допустимых решений (ОДР) для растянутого элемента. Выберем прямоугольную систему координат с осями  $A$  и  $l_1$ . На оси  $A$  отложим значением  $A_{\min}$  (рис. 7.2). Так как по условию ограничения-неравенства (7.3) нельзя назначать площадь стержня меньше  $0,877 \text{ см}^2$ , то ограничиваем ОДР слева. На оси  $l_1$  отложим максимальный шаг подвесок. Так как по условию ограничения-неравенства (7.4) нельзя назначить шаг подвесок больше  $106 \text{ см}$ , то ограничиваем ОДР снизу.

Рассмотрим различные варианты сечений затяжки из канатов, сортамент которых приведён выше. Всего вариантов 3:

- Ø12 К-7 с  $R_s=1110$  МПа,  $A=0,906 \text{ см}^2 > A_{\min}$ ;
- Ø15 К-7 с  $R_s=1080$  МПа,  $A=1,416 \text{ см}^2 > A_{\min}$ ;
- Ø14 К-19 с  $R_s=1175$  МПа,  $A=1,287 \text{ см}^2 > A_{\min}$ .

Результаты расчётов приведены в табл. 5.1.

Отложим точки  $M_1(0,906;120)$ ,  $M_2(1,416;150)$  и  $M_3(1,287;140)$ . Ближайшая точка к оптимальному значению параметров  $(0,877;106)$ , является точка  $M_1$ , но так как помимо каната затяжки её конструктивный вес определяют ещё и узлы крепления подвесок, то более точную оценку оптимальности затяжки даст условие (7.2).

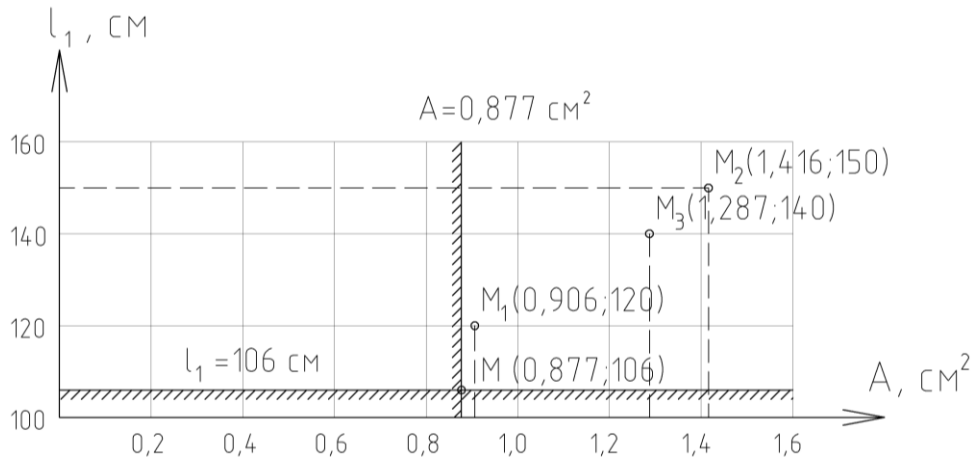


Рис. 7.2. Графическое положение экстремума:  $M$  – положение математического экстремума;  $M_1$  – положение фактического экстремума

Результаты расчётов приведём в табл. 5.1. Например, для  $\varnothing 12$  К-7:

$$i_{\min} = \frac{1,2}{4} = 0,3 \text{ см}; \quad l_1 = 400 \cdot 0,3 = 120 \text{ см}; \quad n = \frac{2400}{120} = 20 \text{ шт.};$$

$$F = 90,6 \cdot 10^{-6} \cdot 24 \cdot 7850 (1 + 0,005 \cdot 20) = 18,78 \text{ кг}.$$

Таблица 7.2

### Результаты решения задачи оптимизации

Тип каната	Диаметр $d$ , мм	Фактическая площадь, $A_{\phi}$ , см <sup>2</sup>	Радиус инерции $i_{\min}$ , см	Шаг подвесок $l_1$ , см	Количество узлов крепления $n$ , шт	Вес затяжки $F$ , кг	Минимальный вес затяжки $F_{\min}$ , кг
К-7	12	0,906	0,3	120	20	18,78	<b>18,78</b>
К-7	15	1,416	0,375	150	16	28,81	
К-19	14	1,287	0,35	140	17	26,31	

**Вывод:** для рассматриваемого центрально-растянутого элемента оптимальным сечением из условия его минимальной массы будет сечение из каната К-7 диаметром  $d=12$  мм (точка  $M_1$  с координатами  $A=0,906 \text{ см}^2$ ,  $l_1=120$ ), масса затяжки составляет  $F_{\min}=18,78$  кг.

Таблица 7.3

**Варианты заданий к задаче № 7**

№ варианта	Усилие N, кН	Длина $l$ , м	Коэффициент $\gamma_c$
1	50	12	1,0
2	55	13	0,9
3	60	14	0,95
4	65	15	0,9
5	70	16	1,0
6	75	17	0,95
7	80	18	0,9
8	85	19	1,0
9	90	20	0,9
10	95	21	0,95
11	100	22	0,9
12	95	23	1,0
13	90	22	0,95
14	85	21	0,9
15	80	20	0,9
16	50	17	1,0
17	55	18	0,9
18	60	19	0,95
19	65	20	0,9
20	70	21	1,0
21	75	22	0,95
22	80	23	0,9
23	85	22	1,0
24	90	21	0,9
25	95	20	0,95

## 8. Определение оптимального сечения изгибаемого элемента из клеёной древесины

Определить оптимальное сечение изгибаемого элемента прямоугольного сечения  $b \times h$  из клееной древесины при следующих данных: пролёт  $l=6$  м; равномерно распределённая расчётная нагрузка  $q=5$  кН/м (осреднённое значение коэффициента надёжности по нагрузке  $\gamma_{fm}=1,23$ ); коэффициент условия работы  $\gamma_d=0,8$ ; сечение постоянно по длине элемента, т.е.  $EI=\text{const}$ ; расчётное сопротивление клеёной древесины  $R_u=13$  МПа; модуль деформаций древесины  $E=10000$  МПа.

**Первый этап решения задачи** – составление математического описания.

**1 шаг** – определить границы элемента. Для этого сформирована расчётная схема элемента (модель объекта), которая представлена на рис. 8.1 и описывается следующими параметрами:

- геометрическими:  $b$ ,  $h$ ,  $l$ , при этом сечение балки составное – из склеенных между собой досок толщиной  $t$ ;
- физическими:  $E$ ,  $R_u$ ;
- параметрами граничных условий: а) кинематических – на рис. 8.1 показаны шарнирные закрепления на левой и правой опорах балки; б) силовых – там же приведена схема приложения нагрузки  $q$  и её величина.

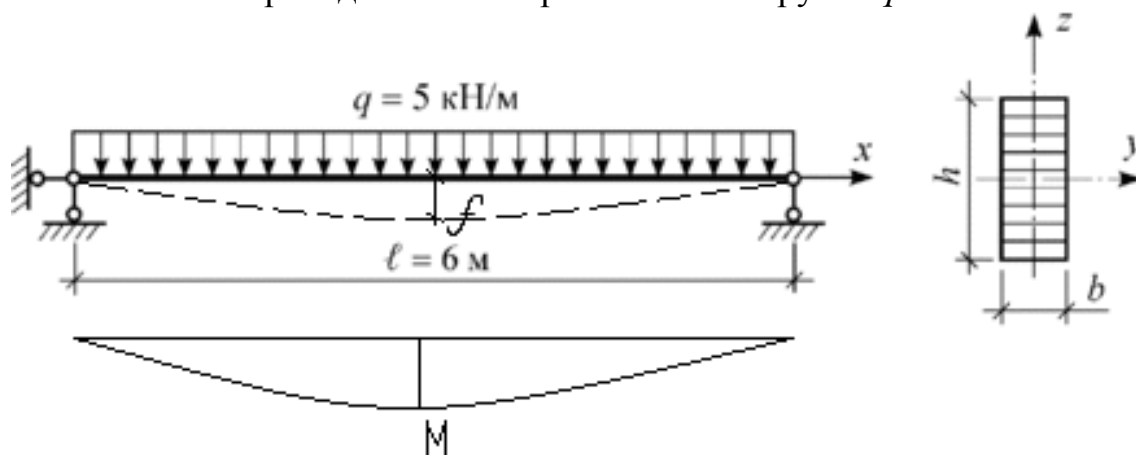


Рис. 8.1. Расчётная схема балки

**2 шаг** – выбрать критерий оптимальности. За критерий оптимальности принимаем объём древесины изгибаемого элемента (для конструкции из однородного материала этот критерий более удобен, чем вес конструкции или стоимость).

**3 шаг** – определить общее число независимых параметров, влияющих на величину критерия оптимальности, провести их ранжирование на эту величину. Объём элемента определяется по известной формуле:

$$V = b \cdot h \cdot l. \quad (8.1)$$

В выражении (8.1) длина элемента – величина постоянная, т.е.  $l=6$  м – *const* (по условию задачи) является неуправляемым или иначе свободным параметром. Поэтому на критерий оптимальности влияют два управляемых параметра:  $x_1 \rightarrow h$  и  $x_2 \rightarrow b$  – высота и ширина поперечного сечения элемента.

**4 шаг** – составить уравнение целевой функции. Используя выражение (8.1) запишем:

$$F = V = b \cdot h \cdot l = 6bh \rightarrow \min. \quad (8.2)$$

**5 шаг** – составить неравенства-ограничения. Из курса сопротивления материалов известно, что плоскому изгибу наилучшим образом сопротивляются сечения балок, которые вытянуты вдоль плоскости изгиба. Это так, поскольку при определении прочности и жёсткости балки, соответственно, для момента сопротивления  $W=bh^2/6$  и момента инерции  $I=bh^3/12$ , высота сечения  $h$  стоит во второй и третьей степени и её влияние поэтому более ощутимо, чем у ширины сечения  $b$ , стоящей в первой степени. Поэтому если увеличение  $h$  балки не ограничено требованиями высоты перекрытия, то высота сечения балки минимального объёма стремиться к бесконечности. Однако рост  $h$  сдерживается соображениями устойчивости плоской формы изгиба: чем меньше ширина сечения балки  $b$ , тем меньше критическая нагрузка потери устойчивости. Следовательно, оптимальной по объёму будет такая балка, у которой запасы прочности, жёсткости и устойчивости равны.

Помимо расчётных (теоретических) ограничений для реальных балок существуют также конструктивные требования (ограничения). Так, балки из досок, склеенных плашмя, имеют ширину сечения не более 170 мм, что позволяет изготавливать их из цельных по ширине досок. При этом нормы рекомендуют принимать ширину сечения не менее  $b \geq h/6$ , а высоту находить в пределах  $h \approx (1/10-1/12)l$ . Кроме того, балки склеивают из досок толщиной  $t$  не более 50 мм.

Таким образом, для рассматриваемого изгибаемого элемента (рис. 8.1) запишем следующие ограничения-неравенства:

– из условия прочности

$$\sigma = \frac{M}{W} \leq R_u \gamma_d; \quad (8.3)$$

– из условия устойчивости плоской формы изгиба

$$\sigma_{кр} = \frac{M}{W} \leq R_u \gamma_d \varphi_d; \quad (8.4)$$

– из условия деформативности

$$f = \frac{5ql^4}{384EI} \leq [f]; \quad (8.5)$$

– из конструктивных требований



$$b \leq 170 \text{ мм}, b \geq \frac{h}{6}, h \leq 1/10 l \approx 600 \text{ мм}; t \leq 50 \text{ мм}, \quad (8.6)$$

где  $f$  – прогиб в опасном сечении;  $[f]=l/300$  – предельный прогиб;  $\varphi_d$  – коэффициент поперечной устойчивости балки.

**6 шаг** – составление уравнений состояния. Поскольку задача является линейной, статически определимой, то надобности в этих уравнениях нет.

**Второй этап** – решение математической задачи.

**7 шаг** – провести анализ целевой функции и неравенств-ограничений.

Целевая функция (8.2) представляет собой уравнение с двумя неизвестными ( $b, h$ ), характеризующими размеры поперечного сечения балки.

Для удобства анализа неравенств-ограничений (8.3-8.5) перепишем их в следующем виде:

– из условия прочности

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{ql^2}{8} \frac{6}{bh^2} \leq R_u \gamma_d \quad \text{или} \quad \frac{3ql^2}{4bh^2} \leq R_u \gamma_d, \quad (8.7)$$

где  $M = \frac{ql^2}{8}$  – величина максимального изгибающего момента в середине пролёта балки;

– из условия устойчивости плоской формы изгиба

$$\sigma_{кр} = \frac{3ql^2}{4bh^2} \leq R_u \gamma_d \frac{160b^2}{hl} \quad \text{или} \quad \frac{3ql^3}{640b^3h} \leq R_u \gamma_d, \quad (8.8)$$

где  $\varphi_d = \frac{160b^2}{hl}$  – коэффициент поперечной устойчивости для однопролётной балки, загруженной равномерно распределённой нагрузкой;

– из условия деформативности

$$f = \frac{5q_n l^4}{384EI} = \frac{5q_n l^4 12}{384Eb h^3} \leq \frac{l}{300} \quad \text{или} \quad \frac{750 \frac{q}{\gamma_{fm}} l^3}{16Eb h^3} \leq 1, \quad (8.9)$$

где  $q_n = \frac{q}{\gamma_{fm}}$  – нормативная погонная нагрузка;  $\gamma_{fm} = 1,23$  – средний

коэффициент надёжности по нагрузке;

– из конструктивных требований

$$h = nb \leq 600 \text{ мм}, n = 1; 1,5; 2; 3; 4; 6; b \leq 170 \text{ мм}; t \leq 50 \text{ мм}, \quad (8.10)$$

где  $n$  – число кратности, дискретные значения которого приняты произвольно по конструктивным соображениям.

То есть ограничения (8.7)-(8.10) представляют собой неравенства с двумя неизвестными  $h$  и  $b$ , характеризующими размеры поперечного сечения балки.

Таким образом, на основании математического описания задачи (8.2), (8.7)-(8.10) она относится к задачам линейного программирования с двумя неизвестными  $h$  и  $b$ . Однако если учесть первое из ограничений (8.10), то можно существенно сузить область допустимых решений задачи с двумя переменными (вторая из которых может принимать конечное число дискретных значений):

$$F = V = \frac{6h^2}{n} \rightarrow \min, n=1; 1,5; 2; 3; 4; 6. \quad (8.11)$$

Тогда ограничения (8.7)-(8.9) можно представить в следующем виде:

– из условия прочности

$$\frac{3ql^2}{4\frac{h}{n}h^2} \leq R_u\gamma_d \text{ или } h \geq \sqrt[3]{\frac{3ql^2n}{4R_u\gamma_d}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5 \cdot 6^2 n}{4 \cdot 13000 \cdot 0,8}} = 0,235\sqrt[3]{n}; \quad (8.12)$$

– из условия устойчивости плоской формы изгиба

$$\frac{3ql^3}{640\frac{h}{n^3}h} \leq R_u\gamma_d \text{ или}$$

$$h \geq \sqrt[4]{\frac{3ql^3n^3}{640R_u\gamma_d}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 5 \cdot 6^3 n^3}{640 \cdot 13000 \cdot 0,8}} = 0,148\sqrt[4]{n^3}; \quad (8.13)$$

– из условия деформативности

$$\frac{375ql^3}{16E\frac{h}{n}h^3} \leq 1 \text{ или}$$

$$h \geq \sqrt[4]{\frac{750\frac{q}{\gamma_{fm}}l^3n}{16E}} = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot \frac{5}{1,23} \cdot 6^3 n}{16 \cdot 10^7}} = 0,253\sqrt[4]{n}. \quad (8.14)$$

**Внимание:** в формуле (8.14) для модуля  $E$  следует перевести единицы измерения из МПа в кН/м<sup>2</sup>, т.е. умножьте эту величину на 10<sup>3</sup>!

**8 шаг** – выбрать метод решения задачи. Имеем решение нелинейного уравнения с двумя неизвестными (8.11).

Построим область допустимых решений (ОДР) для клеёной балки. Выберем прямоугольную систему координат с осями  $n$  и  $h$ . Из условия прочности (8.7), поперечной устойчивости (8.8) и деформативности (8.9) определим высоту сечения балки при различных  $n=1; 1,5; 2; 3; 4; 6$ .

– из условия прочности

$$\begin{aligned} \text{при } n=1: h &= 0,235\sqrt[3]{1} = 0,235\text{ м}; \\ \text{при } n=1,5: h &= 0,235\sqrt[3]{1,5} = 0,269\text{ м}; \\ \text{при } n=2: h &= 0,235\sqrt[3]{2} = 0,296\text{ м}; \end{aligned}$$

- при  $n=3$ :  $h = 0,235\sqrt[3]{3} = 0,339\text{ м}$ ;  
при  $n=4$ :  $h = 0,235\sqrt[3]{4} = 0,373\text{ м}$ ;  
при  $n=6$ :  $h = 0,235\sqrt[3]{6} = 0,427\text{ м}$ ;  
– из условия устойчивости плоской формы изгиба  
при  $n=1$ :  $h = 0,148\sqrt[4]{1^3} = 0,148\text{ м}$ ;  
при  $n=1,5$ :  $h = 0,148\sqrt[4]{1,5^3} = 0,201\text{ м}$ ;  
при  $n=2$ :  $h = 0,148\sqrt[4]{2^3} = 0,250\text{ м}$ ;  
при  $n=3$ :  $h = 0,148\sqrt[4]{3^3} = 0,339\text{ м}$ ;  
при  $n=4$ :  $h = 0,148\sqrt[4]{4^3} = 0,420\text{ м}$ ;  
при  $n=6$ :  $h = 0,148\sqrt[4]{6^3} = 0,569\text{ м}$ ;  
– из условия деформативности  
при  $n=1$ :  $h = 0,253\sqrt[4]{1} = 0,253\text{ м}$ ;  
при  $n=1,5$ :  $h = 0,253\sqrt[4]{1,5} = 0,280\text{ м}$ ;  
при  $n=2$ :  $h = 0,253\sqrt[4]{2} = 0,301\text{ м}$ ;  
при  $n=3$ :  $h = 0,253\sqrt[4]{3} = 0,333\text{ м}$ ;  
при  $n=4$ :  $h = 0,253\sqrt[4]{4} = 0,358\text{ м}$ ;  
при  $n=6$ :  $h = 0,253\sqrt[4]{6} = 0,396\text{ м}$ .

Полученные данные являются теоретическими значениями высоты сечения балки  $h_{теор}$ , представим их в табличном виде.

Таблица 8.1

$n=h/b$	Теоретическое значение высоты сечения $h_{теор}$ из условия, м		
	прочности (8.12)	устойчивости (8.13)	деформативности (8.14)
1	0,235	0,149	<b>0,253</b>
1,5	0,269	0,201	<b>0,280</b>
2	0,296	0,250	<b>0,301</b>
3	0,339	<b>0,339</b>	0,333
4	0,373	<b>0,420</b>	0,358
6	0,427	<b>0,569</b>	0,396

*Примечание:* жирным шрифтом выделены границы ОДР: нижняя  $n=1$ ; верхняя  $n=6$ ; левая  $h=0,253$  м;  $h=0,280$  м;  $h=0,301$  м;  $h=0,339$  м;  $h=0,420$  м;  $h=0,569$  м.

По полученным данным построим графики и установим область допустимых решений (рис. 8.2).

Границами области допустимых решений являются: нижняя  $n=1$ ; верхняя  $n=6$ ; левая – кривые теоретических значений высоты сечения  $h_{теор}$ , полученных из условий поперечной устойчивости (8.13) при  $n=4$ ; 6 и деформативности (8.14) при  $n=1, 1,5, 2, 3$ .

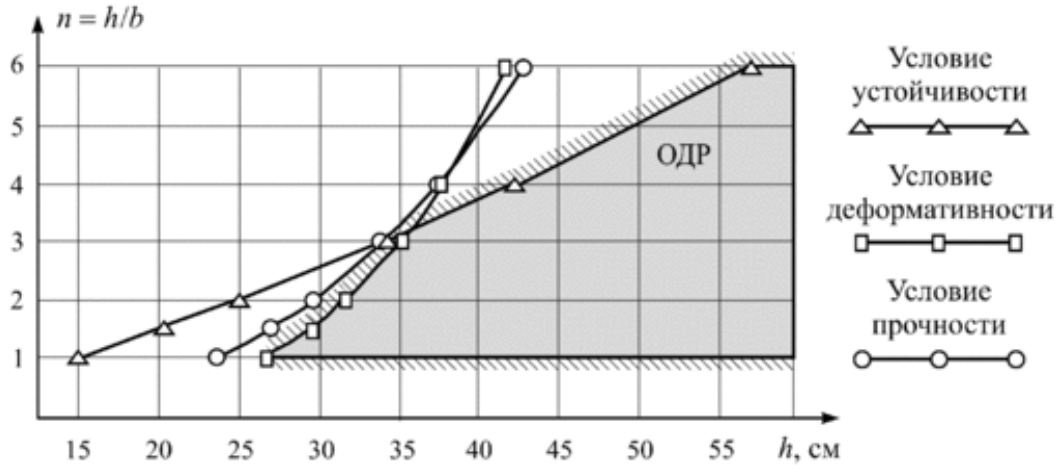


Рис. 8.2. Построение области допустимых решений

Для вычисления оптимальной по объёму балки определим фактические размеры сечения из условия технологии изготовления балок из досок, склеенных плашмя. Балки склеивают из досок толщиной не более  $t=50$  мм.

Доски перед склеиванием обрабатываются (фрезеруются) по пластам на величину  $\Delta t=2,5-3,5$  мм, а после склеивания кромки балок фрезеруют в среднем на величину  $\Delta b=5$  мм.

Тогда фактические размеры поперечного сечения балок будут равны:

$$h_{факт} = m(t - \Delta t) = \text{ceil}\left(\frac{h_{теор}}{t - \Delta t}\right)(t - \Delta t) = \text{ceil}\left(\frac{h_{теор}}{0,05 - 0,005}\right) \cdot (0,05 - 0,005) = 0,045 \cdot \text{ceil}\left(\frac{h_{теор}}{0,045}\right) \quad (8.15)$$

$$b_{факт} = \frac{\text{ceil}\left[100(b_{теор} - \Delta b)\right]}{100} = \frac{\text{ceil}\left[100\left(\frac{h_{теор}}{n} - 0,005\right)\right]}{100} \quad (8.16)$$

где  $m$  – количество досок в сечении;  $\text{ceil}(\dots)$  – математический оператор округления числа до целого в большую сторону;  $h_{теор}$  – высота балки, определённая теоретически (табл. 8.1).

Например, при  $n=h/b=2$ :

$$h_{факт} = 0,045 \cdot \text{ceil}\left(\frac{0,301}{0,045}\right) = 0,045 \cdot \text{ceil}(6,688) = 0,045 \cdot 7 = 0,315 \text{ м},$$

$$b_{\text{факт}} = \frac{\text{ceil} \left[ 100 \left( \frac{0,301}{2} - 0,005 \right) \right]}{100} = \frac{\text{ceil}(14,55)}{100} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ м}.$$

Все значения  $h_{\text{факт}}, b_{\text{факт}}$ , вычисленные по формулам (8.15) и (8.16), а также объём балки – по формуле (8.2) – сведём в табл. 8.2.

Таблица 8.2

### Расход древесины на балку

$n=h/b$	$h_{\text{теор}}, \text{ м}$	$h_{\text{факт}}, \text{ м}$	$b_{\text{факт}}, \text{ м}$	$V, \text{ м}^3$
1	0,253	270	250	0,405
1,5	0,280	315	190	0,359
2	0,301	315	150	0,284
<b>3</b>	<b>0,339</b>	<b>360</b>	<b>110</b>	<b>0,238</b>
4	0,420	450	110	0,297
6	0,569	585	90	0,316

**Вывод:** для рассматриваемого клеёного изгибаемого элемента прямоугольного сечения оптимальными размерами сечения из условия минимального объёма (табл. 8.2) будет сечение  $360 \times 110$  мм ( $h_{\text{факт}}=360 \leq 600$  мм,  $b_{\text{факт}}=110 \leq 170$  мм), склеенное из 8 досок толщиной 45 мм и шириной 110 мм. Расход древесины составляет  $F = V = 0,238 \text{ м}^3$ .

Таблица 8.3

### Варианты заданий к задаче № 8

№ варианта	Пролёт $l, \text{ м}$	Нагрузка $q, \text{ кН/и}$	Прочность $R_{\text{и}}, \text{ МПа}$	Модуль деформаций $E, \text{ МПа}$	Предельный прогиб $[f]$	Коэф. надёжности $\gamma_{fn}$
1	4	4	13	$1,1 \cdot 10^4$	1/150	1,15
2	5	5	11	$1,2 \cdot 10^4$	1/175	1,16
3	6	6	13	$0,9 \cdot 10^4$	1/200	1,17
4	7	3	13	$1,0 \cdot 10^4$	1/225	1,18
5	8	4	13	$1,1 \cdot 10^4$	1/250	1,19
6	7	5	12	$1,2 \cdot 10^4$	1/225	1,20
7	6	6	12	$1,3 \cdot 10^4$	1/300	1,21
8	5	3	13	$0,8 \cdot 10^4$	1/175	1,22
9	4	4	12	$1,0 \cdot 10^4$	1/150	1,23
10	5	5	13	$1,1 \cdot 10^4$	1/275	1,24
11	4	6	11	$1,1 \cdot 10^4$	1/220	1,25
12	5	3	13	$1,1 \cdot 10^4$	1/300	1,26
13	6	4	13	$1,2 \cdot 10^4$	1/250	1,27
14	7	5	12	$0,9 \cdot 10^4$	1/250	1,28
15	5	3	13	$1,0 \cdot 10^4$	1/275	1,29

## 9. Определение максимальной площади помещения гаража, отапливаемой регистрами заданной конструкции. Применение критериев подобия в задачах гидродинамики и теплотехники

Для отопления гаража используют регистр, составленный из 4-х труб, по которым протекает горячая вода – рис. 9.1.

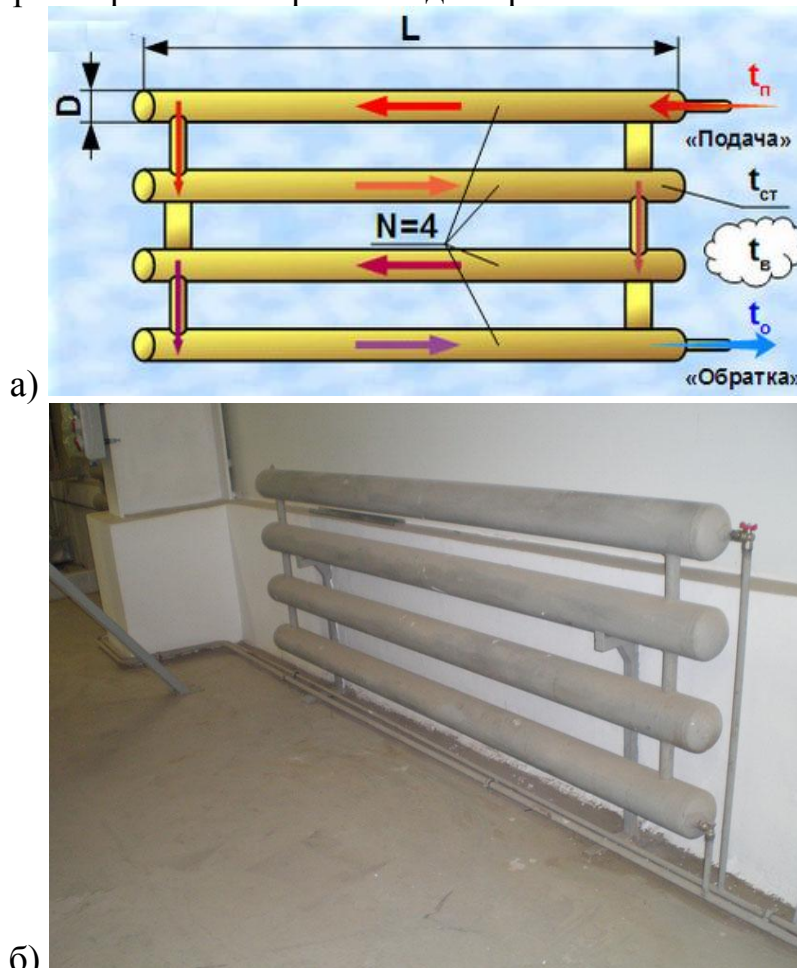


Рис. 9.1. Регистр отопления гаража:  
а – принципиальная схема; б – общий вид

*Примечание.* Изготавливать регистры отопления из гладких труб сейчас экономически невыгодно. Если 30-50 лет назад их широко применяли из-за дефицита качественных дешевых и эффективных приборов отопления, то применение регистров сегодня – это скорее инерционная привычка теплотехников. Стоимость системы отопления с применением, например, конвекторов на 20-30% ниже стоимости системы, где применены регистры отопления из труб. Тем не менее, вопрос теплоотдачи стальных труб остается актуальным, если ими выполняется разводка, а также при выполнении сравнительных расчетов различных вариантов систем и при

ремонтах действующих систем, в которых применены регистры отопления из гладких труб.

При этом тепло, передаваемое регистрами воздуху помещения, должно компенсировать теплопотери помещения и приближённо это соответствует тому, что на каждые 10 м<sup>2</sup> площади помещения (с высотой потолка 3 м) нужно устанавливать отопительные приборы тепловой мощностью не менее 1 кВт. На практике, этот показатель увеличивают еще на 15%, т.е. полученную мощность радиаторов умножают на коэффициент 1,15.

**Задание 1.** Требуется рассчитать максимальную площадь помещения гаража  $A_{от}$ , которую способен отапливать регистры, если наружный диаметр труб равен  $D=159$  мм, а длина каждой –  $l=1,5$  м. Расстояние между трубами составляет  $1,5d_n$ . Температура воды на «подаче» –  $t_n=80^{\circ}\text{C}$ , температура воды на «обратке» –  $t_{об}=60^{\circ}\text{C}$ . При этом температура воздуха в гараже должна составлять  $t_b=16^{\circ}\text{C}$ . Вид наружной поверхности труб также задан – краска бронзовая.

**Задание 2.** Пользуясь расчётной программой в Excel, построить график зависимости  $A_{от}$  от  $t_b$  при  $t_b=8...25^{\circ}\text{C}$  (рассмотреть не менее 5 точек). Проанализировать полученный результат.

**Задание 3.** Также пользуясь программой, построить зависимость  $A_{от}$  от  $D$ . Принять следующие значения диаметра труб: 60, 89, 108, 140, 159 мм (сортамент труб по ГОСТ 10704-91).

### Решение

#### Решение задачи 1

Постоянная Стефана-Больцмана  $C_0=56,69 \cdot 10^{-9}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>).

Определяем степень черноты тела по табл. 9.1:  $\varepsilon=0,51$ .

Таблица 9.1

### Приведённая степень черноты излучаемой поверхности

Материалы	Степень черноты тела
При теоретическом расчете	0,81
Краска алюминиевая	0,28
Краска алюминиевая старая	0,475
Краска бронзовая	0,51
Краска защитно-зеленая	0,9
Краски матовые разных цветов	0,94
Краски эмалевые, лаки разных цветов	0,92
Лак белый	0,65
Лак черный матовый	0,97
Муар серый, черный	0,885
Сталь листовая сильно окисленная	0,81
Сталь разных сортов после окисления	0,89

Средняя температура стенок труб равна  $t_{cm} = \frac{t_n + t_{об}}{2} = \frac{80 + 60}{2} = 70^\circ C$ , при этом расчётный перепад температуры  $t_n - t_{об}$  обычно составляет 15-20<sup>0</sup> (для рассматриваемого примера  $80 - 60 = 20^0$ ).

Температурный напор  $\Delta T = t_{cm} - t_g = 70 - 16 = 54^\circ C$ .

Коэффициент объёмного расширения воздуха

$$\beta = \frac{1}{(t_g + 273)} = 3,46 \cdot 10^{-3} \frac{1}{K}$$

Кинематическая вязкость воздуха

$$\nu = 0,1192 \cdot 10^{-9} t_g^2 + 86,895 \cdot 10^{-9} t_g + 13,306 \cdot 10^{-6} = 0,1192 \cdot 10^{-9} \cdot 16^2 + 86,895 \cdot 10^{-9} \cdot 16 + 13,306 \cdot 10^{-6} = 14,73 \cdot 10^{-6}$$

Критерий Прандтля (по эмпирической приближённой формуле):

$$Pr = 0,73 \cdot 10^{-6} t_g^2 - 0,28085 \cdot 10^{-3} t_g + 0,70934 = 0,73 \cdot 10^{-6} \cdot 16^2 - 0,28085 \cdot 10^{-3} \cdot 16 + 0,70934 = 0,705$$

*Примечание.* Критерий Прандтля – один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах, учитывает влияние физических свойств теплоносителя (плотности, вязкости) на теплоотдачу. Представляет собой отношение скорости диффузии к теплопроводности:

$$Pr = \frac{\eta}{\rho \alpha}, \text{ где } \eta - \text{ динамическая вязкость, } \rho - \text{ плотность, } \alpha -$$

температуропроводность. Для газов Pr практически не зависит от температуры ( $Pr \leq 1$ ), для неметаллических жидкостей изменяется с изменением температуры тем значительнее, чем больше вязкость жидкости. Вязкость (внутреннее трение) – одно из явлений переноса, свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой. В результате работа, затрачиваемая на это перемещение, рассеивается в виде тепла.

Коэффициент теплопроводности воздуха

$$\lambda = -22,042 \cdot 10^{-9} t_g^2 + 79,3717 \cdot 10^{-6} t_g + 0,0243834 = -22,042 \cdot 10^{-9} \cdot 16^2 + 79,3717 \cdot 10^{-6} \cdot 16 + 0,0243834 = 0,0256477 \frac{Вт}{м \cdot К}$$

Площадь теплоотдающих поверхностей труб регистра  $A = \pi D N = 3,14 \cdot 0,159 \cdot 1,5 \cdot 4 = 2,997 м^2$  (где N=4 – количество труб).

Тепловой поток излучения с поверхностями труб регистра отопления

$$Q_u = C_0 \varepsilon A \left[ (t_{cm} + 273)^4 - (t_g + 273)^4 \right] \cdot k^{N-1} = 56,69 \cdot 10^{-9} \cdot 0,51 \cdot 2,997 \cdot \left[ (70 + 273)^4 - (16 + 273)^4 \right] \cdot 0,93^{4-1} = 478,505 Вт$$



где  $k=0,93$  – понижающий коэффициент эффективности дополнительной трубы в системе регистров отопления.

Коэффициент теплоотдачи при излучении

$$\alpha_u = \frac{Q_u}{\Delta T A} = \frac{478,505}{54 \cdot 2,997} = 2,957 \frac{Вт}{м^2 К}.$$

Критерий Грасгофа

$$Gr = \frac{g \beta D^3 \Delta T}{\nu^2} = \frac{9,81 \cdot 3,46 \cdot 10^{-3} \cdot 0,159^3 \cdot 54}{(14,73 \cdot 10^{-6})^2} = 33,957 \cdot 10^6.$$

*Примечание.* Критерий Грасгофа определяет процесс подобия теплообмена при конвекции в поле тяжести (гравитации, ускорения) и является мерой соотношения архимедовой выталкивающей силы, вызванной неравномерным распределением плотности жидкости, газа в неоднородном поле температур, и силами вязкости.

Критерий Нуссельта Nu находим

$$Nu = 0,5 (Gr Pr)^{0,25} = 0,5 (33,957 \cdot 10^6 \cdot 0,705)^{0,25} = 34,976.$$

*Примечание.* Критерий Нуссельта характеризует соотношение между интенсивностью теплообмена за счёт конвекции и интенсивностью теплообмена за счёт теплопроводности (в условиях неподвижной среды).

Коэффициент теплоотдачи при конвекции

$$\alpha_k = \frac{Nu \lambda}{D} k^{N-1} = \frac{34,976 \cdot 0,0256477}{0,159} 0,93^{4-1} = 4,538 \frac{Вт}{м^2 К}.$$

Конвективная составляющая теплового потока

$$Q_k = \alpha_k A \Delta T = 4,538 \cdot 2,997 \cdot 54 = 734,421 Вт.$$

Полная мощность теплового потока регистра отопления

$$Q = Q_u + Q_k = 478,505 + 734,421 = 1212,926 Вт.$$

Коэффициент теплоотдачи от поверхностей регистра отопления воздуху  $\alpha = \alpha_u + \alpha_k = 2,957 + 4,538 = 7,495 \frac{Вт}{м^2 К}.$

Максимальная площадь помещения гаража, которую способен отапливать регистры  $A_{om} = \frac{0,01 Q}{1,15} = 10,6 м^2.$

*Решение задачи 2*

Пользуясь расчётной программой в Excel, найдём значения  $A_{от}$  при различных  $t_b$ . Результаты представим в табличном виде.

Таблица 9.2

**К построению зависимости  $A_{от}$  от  $t_b$**

Параметр	Значение параметра				
$t_b, ^\circ C$	8	10	16	20	25
$A_{от}, м^2$	12,3	11,8	10,6	9,7	8,7

По найденным точкам строим график – рис. 9.2.

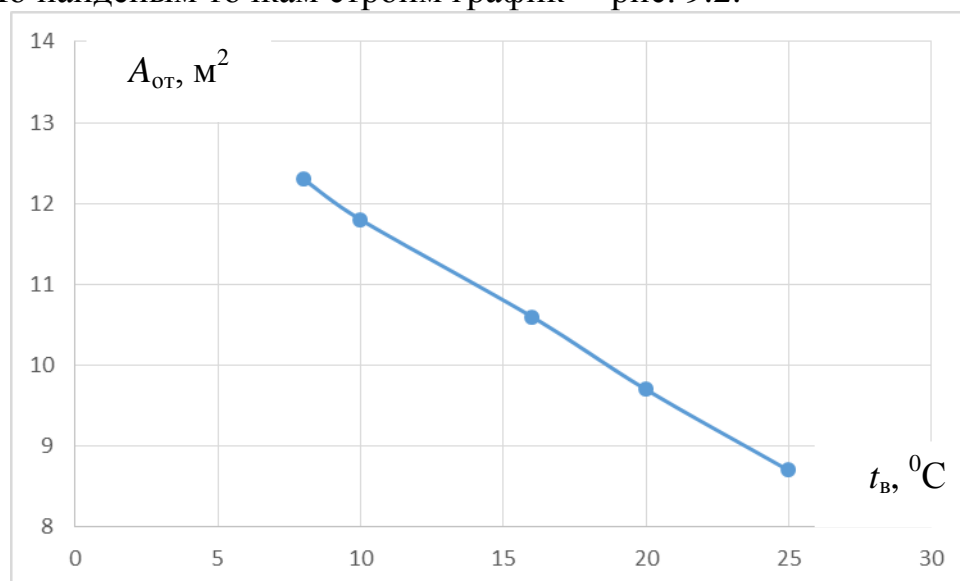


Рис. 9.2. График зависимости  $A_{от}$  от  $t_{в}$

**Вывод.** График зависимости  $A_{от}$  от  $t_{в}$  является линейным, с незначительным углом наклона: в диапазоне нормативных температур внутреннего воздуха  $t_{в}=16...20\text{ }^\circ\text{C}$  максимальная отапливаемая площадь меняется незначительно – в пределах  $(11,8/10,6-1)\cdot 100\%=11,3\%$  (при изменении в пределах всего интервала температур значения  $A_{от}$  отличаются на границах этого интервала на  $(12,3/8,7-1)\cdot 100\%=41,4\%$ ). При этом увеличение температуры внутри помещений гаража приводит к снижению площади, которую способны отапливать регистры.

*Решение задачи 3*

Пользуясь расчётной программой в Excel, найдём значения  $A_{от}$  при различных  $D$ . Результаты представим в табличном виде.

Таблица 9.3

**К построению зависимости  $A_{от}$  от  $D$**

Параметр	Значение параметра				
$D, \text{мм}$	60	89	108	140	159
$A_{от}, \text{м}^2$	4,6	6,5	7,6	9,5	10,6

По найденным точкам строим график – рис. 9.3.

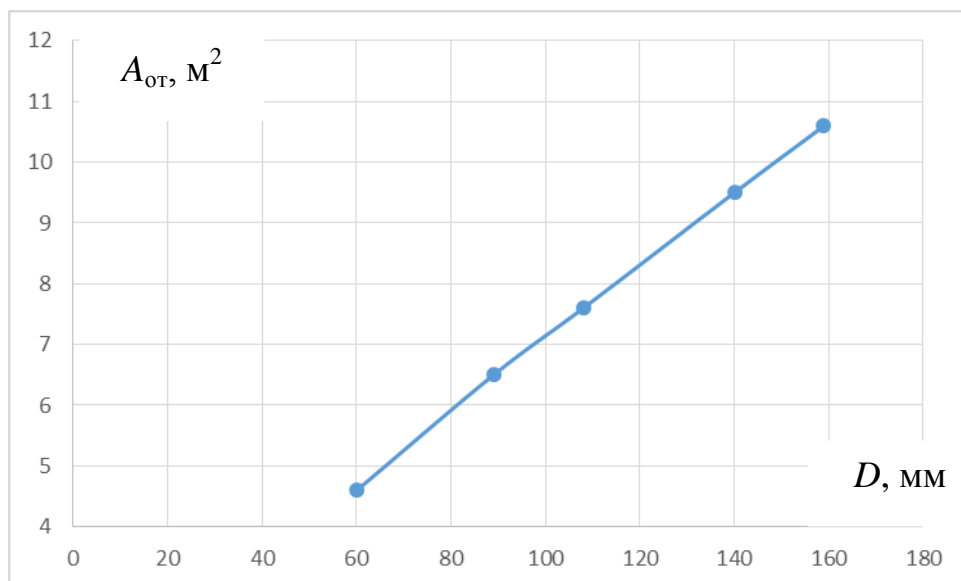


Рис. 9.3. График зависимости  $A_{от}$  от  $D$

**Вывод.** График зависимости  $A_{от}$  от  $D$  является также линейным, но со значительным углом наклона: в рассматриваемом диапазоне диаметров труб максимальная отапливаемая площадь меняется значительно – в 2,3 раза. При этом увеличение диаметров труб приводит к увеличению площади, которую способны отапливать регистры.

Таблица 9.4

**Варианты заданий к задаче № 9**

№	$D$ , мм	$l$ , м	$t_{в}$ , °C	$t_{п}$ , °C	$t_{об}$ , °C	Тип поверхности
1	60	2,5	20	90	70	Краска алюминиевая
2	89	2,0	19	85	65	Краска алюминиевая старая
3	108	1,75	18	80	60	Краска бронзовая
4	140	1,5	17	75	55	Краска защитно-зеленая
5	159	1,0	18	70	50	Краски матовые разных цветов
6	60	1,75	19	65	55	Краски эмалевые
7	89	2,0	16	60	40	Лак белый
8	108	1,5	21	55	35	Лак черный матовый
9	140	1,1	20	50	30	Муар серый, черный
10	159	1,25	18	90	70	Сталь листовая сильно окисленная
11	60	2,0	18	85	65	Сталь разных сортов после окисления
12	89	1,25	17	80	60	Краска бронзовая
13	108	1,3	16	75	55	Краска защитно-зеленая
14	140	1,2	19	70	50	Краски матовые разных цветов
15	159	1,1	20	75	55	Краски эмалевые, лаки разных цветов

## 10. Проектирование солнечного коллектора для системы отопления и горячего водоснабжения жилого дома

Солнечная энергия может использоваться активно или пассивно. При пассивном использовании этой энергии солнечное излучение, поступающее через окна и витражи, непосредственно идёт на нагрев внутренних поверхностей дома, т.е. без применения вспомогательных технических средств.

Для активного использования солнечной энергии существуют различные технологии. Например, для водяного отопления дома или подогрева воды можно использовать солнечные коллекторы (от лат. *collegere* = собирать).

Основным показателем для преобразования солнечной энергии в тепловую является уровень инсоляции, который зависит от района строительства, времени года, расположения и площади поглощающей поверхности.

### СПРАВКА

Солнце – гигантский термоядерный реактор, в глубинах которого протекают процессы синтеза гелия из водорода. Температура внутренних слоёв Солнца достигает  $15.000.000^{\circ}\text{C}$ , а поверхностных – снижается до  $5.500^{\circ}\text{C}$ .

Диаметр светила –  $1.392.000$  км, а, например, Земли –  $12.742$  км (в 109 раз меньше).

Интенсивность излучения на поверхности Солнца составляет  $63.000.000$  Вт/м<sup>2</sup>.

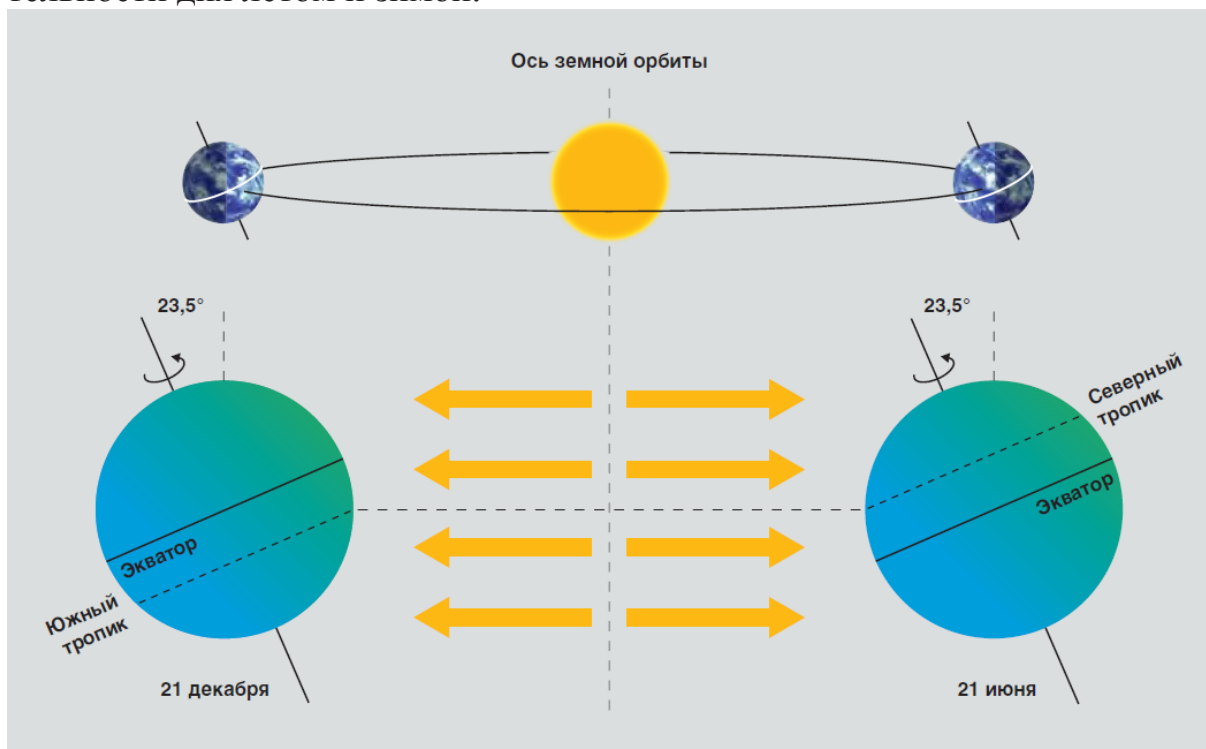
Средняя интенсивность солнечного излучения на поверхности атмосферы Земли достигает  $S_0=1.367$  Вт/м<sup>2</sup>. То есть на расстоянии от Солнца до Земли в  $149.600.000$  км интенсивность излучения снижается более чем в 46.000 раз (спрашивается: что поглощает солнечную энергию, если по представлению некоторых обывателей между Землёй и Солнцем царит пустота? Как насчёт вакуума – особого состояния материи в невозбужденном виде?).

Величина  $S_0$  называется солнечной постоянной – оно определено Всемирной метеорологической организацией (ВМО) и Организацией Объединённых Наций (ООН).

Фактическая интенсивность излучения колеблется в пределах  $\pm 3,5\%$  вследствие того, что орбита вращения Земли вокруг Солнца имеет эллиптическую форму, расстояние от Земли до Солнца непостоянно и составляет от 147 до 152 млн км. Кроме того, изменяется и солнечная активность.

**Влияние географической широты местности и времени года.** Ось Земли, проходящая через Северный и Южный полюса, наклонена на  $23,5^{\circ}$

по отношению к оси ее орбиты вращения вокруг Солнца. С марта по сентябрь Солнце в большей степени освещает Северное полушарие, а с сентября по март – Южное, следствием чего является изменение продолжительности дня летом и зимой.



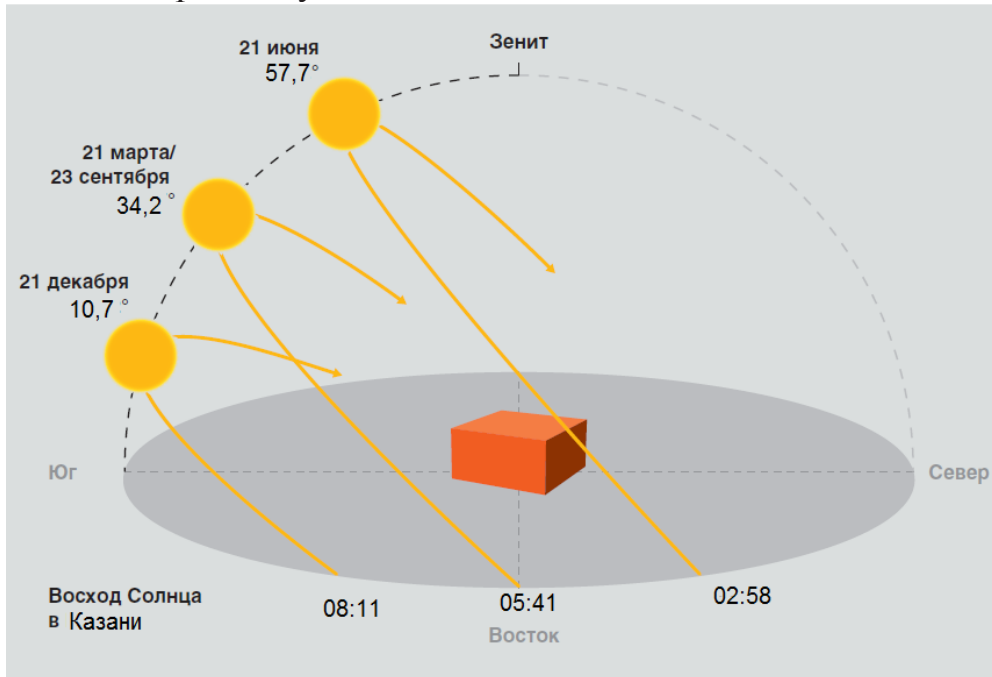
Продолжительность дня определяется также широтой местности, т.е. чем дальше на Север, тем длиннее (летом) или короче (зимой) дни. В Сочи ( $43,6^{\circ}$  с.ш.,  $39,7^{\circ}$  в.д.), например, 21 июня продолжительность дня составляет 15 часов 26 минут, а в Казани ( $55,8^{\circ}$  с.ш.,  $49,1^{\circ}$  в.д.) уже 17 часов 34 минуты, а в Архангельске ( $64,5^{\circ}$  с.ш.,  $40,5^{\circ}$  в.д.) – целых 21 час 31 минута. Зимой же все наоборот: 21 декабря продолжительность дня в Сочи составляет 8 часов 56 минут, в Казани – 7 часов 00 минут, а в Архангельске – 3 часа 53 минуты.



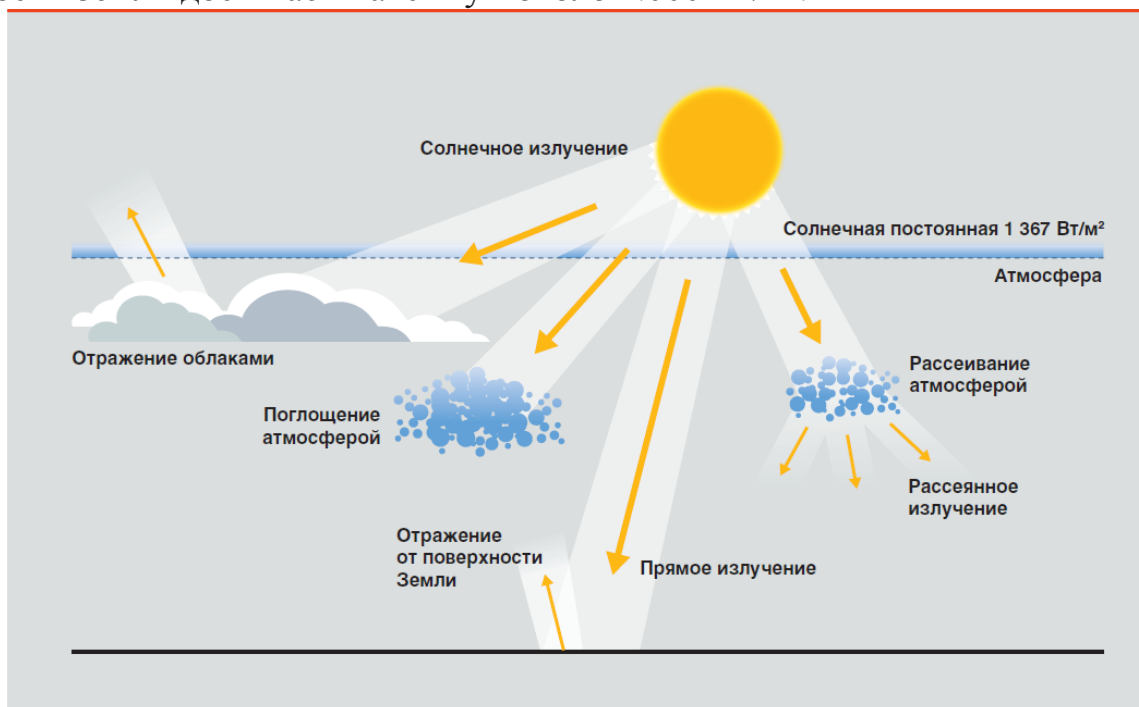
Максимальная и минимальная высота стояния Солнца, соответственно, 21 июня и 21 декабря определяется по формуле:

$$H_s = 90^\circ - \text{широта} \pm 23,5^\circ. \quad (8.1)$$

Например, город Казань имеет координаты  $55,8^\circ$  северной широты. С учетом угла наклона оси Земли  $23,5^\circ$  это означает, что 21 июня Солнце находится в полдень под углом  $H_s = 90 - 55,8 + 23,5 = 57,7^\circ$  к горизонту. В полдень 21 декабря этот угол составляет всего  $H_s = 90 - 55,8 - 23,5 = 10,7^\circ$ .



**Суммарное солнечное излучение.** Вследствие влияния атмосферы, из излучения интенсивностью  $1.367 \text{ Вт/м}^2$  (солнечная постоянная) поверхность Земли достигает максимум около  $1.000 \text{ Вт/м}^2$ .



Атмосфера по-разному действует на весь спектр излучения. Слой облаков отражает часть излучения, другая часть поглощается (от латинского *absorbere* = поглощать). Часть излучения рассеивается плотными слоями атмосферы или облаков, вследствие чего возникает рассеянное излучение. Значительная часть излучения достигает поверхности Земли.

Излучение, падающее на Землю, частично отражается, а частично поглощается поверхностью Земли. Вследствие поглощения поверхность Земли нагревается. Отражение прямого излучения также создает рассеянное излучение.

Сумма рассеянного и прямого излучения называется суммарным излучением. Доля рассеянного излучения в суммарном излучении составляет в среднем около 50% за год: летом несколько меньше, а зимой – больше.

**Интенсивность излучения.** Мощность излучения на определенной поверхности называется интенсивностью излучения. Таким образом, с физической точки зрения интенсивность излучения является мощностью на единицу площади и измеряется в ваттах на квадратный метр ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ). Интенсивность солнечного излучения сильно варьирует. От  $50 \text{ Вт}/\text{м}^2$  при затянутом облаками небе до  $1\,000 \text{ Вт}/\text{м}^2$  при безоблачном небе.

Для расчета количества солнечного излучения, фактически превращаемого в тепловую энергию, необходимо дополнительно учитывать длительность излучения. Суммарной энергией солнечного излучения называется мощность за определенный период времени, единицей измерения ее является ватт-час ( $\text{Вт}\cdot\text{ч}$ ). Суммарная энергия солнечного излучения определяется за определенный период времени (за день, месяц или год).

Максимальное дневное суммарное солнечное излучение в г. Казань составляет около  $6 \text{ кВт}\cdot\text{ч}/\text{м}^2$  летом. И даже в солнечный зимний день суммарное солнечное излучение может достигать значения  $1,4 \text{ кВт}\cdot\text{ч}/\text{м}^2$ .

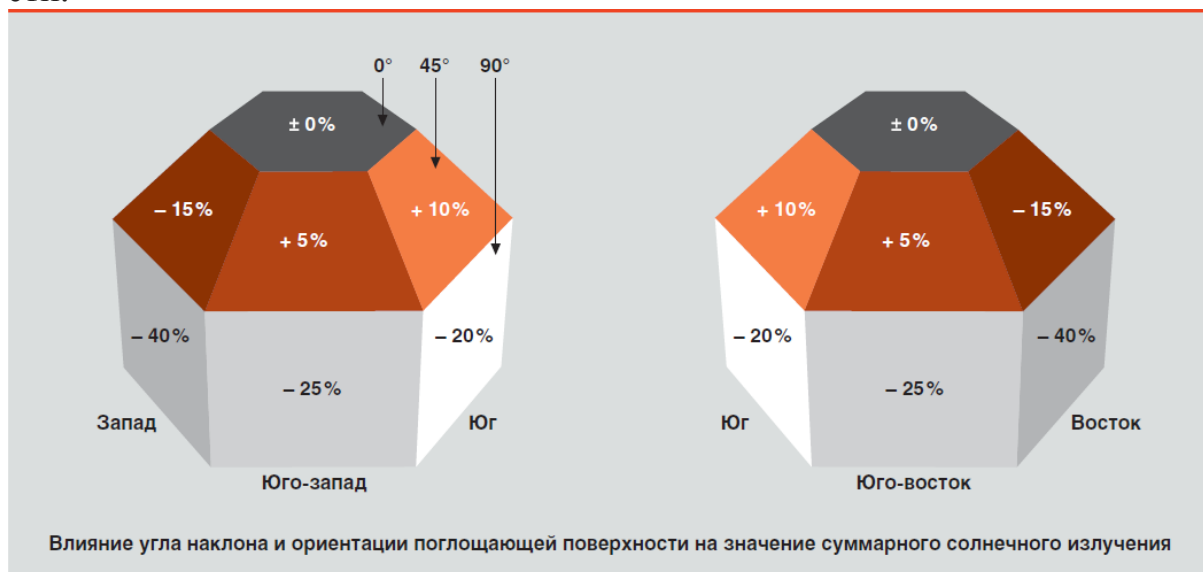
#### **Дневная сумма солнечной радиации (прямой и рассеянной) в г. Казань, $\text{кВт}\cdot\text{ч}/\text{м}^2$ , горизонтальная площадка**

Янв	Фев	Март	Апр	Май	Июнь	Июль	Авг	Сент	Окт	Нояб	Дек	За год
0,68	1,44	2,82	4,29	5,52	5,93	5,72	4,49	2,86	1,51	0,83	0,54	3,06

Для месячной суммы и годовой суммы солнечной радиации существуют подобные таблицы.

**Угол наклона поглощающей поверхности солнечного коллектора.** Приведенные в нормативной литературе значения суммарной энергии излучения относятся к горизонтальной поверхности. На их величину влияет угол наклона поглощающей поверхности коллектора. Наклон поглощающей поверхности изменяет угол падения солнечных лучей, интенсив-

ность облучения, а, следовательно, и количество поглощенной энергии. То есть суммарная годовая энергия солнечного излучения, отнесенная к единице поверхности, также зависит от угла наклона поглощающей поверхности.



Количество энергии максимально, когда солнечные лучи попадают на поверхность, перпендикулярную солнечным лучам. Поскольку обеспечить слежение за солнцем достаточно сложно, можно расположить поглощающую поверхность под углом. В Татарстане на поглощающую поверхность под углом  $40^\circ$  с ориентацией на юг попадает энергии в среднем примерно на 15 процентов больше, чем на горизонтальную поглощающую поверхность.

**Ориентация поглощающей поверхности.** Другим фактором, который необходимо учитывать при расчете количества поглощаемой солнечной энергии, является ориентация поглощающей поверхности. В северном полушарии оптимальной является ориентация поглощающей поверхности на юг. Отклонение поглощающей поверхности от южного направления называется азимутальным углом. Поверхность, ориентированная на юг, имеет азимутальный угол 0.

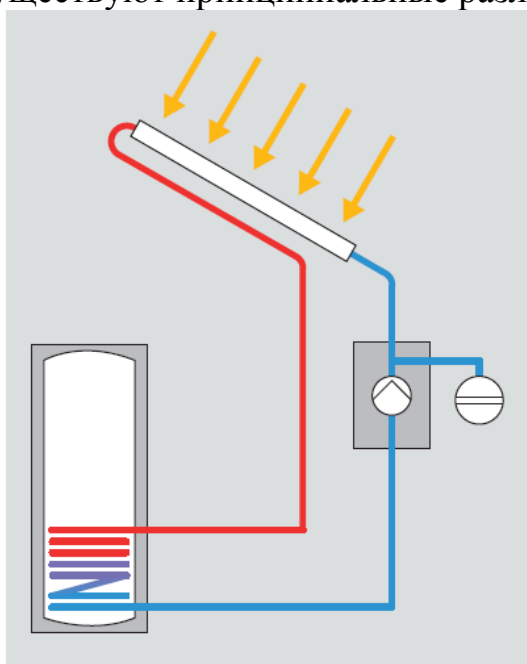
В гелиотехнике азимутальный угол указывается не так, как на компасе, здесь юг – это  $0^\circ$ , запад –  $+90^\circ$ , восток –  $-90^\circ$  и т.д.

На рисунке отображено влияние ориентации и угла наклона поглощающей поверхности на величину падающего излучения. В сравнении с горизонтальным положением мы получаем увеличение или уменьшение результатов. Между направлением на юго-восток и юго-запад и с углами наклона от  $25^\circ$  до  $70^\circ$  можно определить область, в которой производительность солнечной установки будет оптимальной. Значительные отклонения, например, в установках на вертикальных стенах, могут компенсироваться, соответственно, большей площадью коллектора.

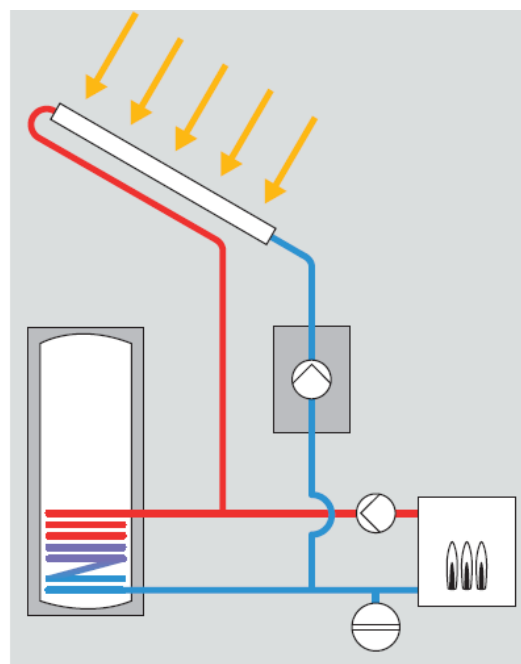


**Принцип работы солнечного коллектора.** В мире наибольшее распространение получили солнечные системы, состоящие из солнечного коллектора, регулятора, насоса и хорошо изолированного аккумулятора теплоты.

В коллекторе солнечное излучение попадает на поглощающий элемент с селективным покрытием (абсорбер). На нижней стороне абсорбера закреплены медные трубки, по которым циркулирует рабочая жидкость (теплоноситель). Абсорбер нагревается солнечными лучами и отдает теплоту теплоносителю в трубках. Регулятор и насос обеспечивают отвод теплоты по трубопроводам. Затем в баке-аккумуляторе теплота передается нагреваемой воде через теплообменник. По такому принципу работают все насосные солнечные системы такого типа. Однако в режимах их работы существуют принципиальные различия.



*Система с незамерзающим теплоносителем*



*Система с защитой от замерзания*

*Напорная система с незамерзающим теплоносителем.* В таких системах с незамерзающей рабочей жидкостью используется теплоноситель, состоящий, как правило, из смеси воды и антифриза (гликоля). Теплоноситель подается насосом в трубки абсорбера, где нагревается, чтобы затем отдать теплоту в теплообменнике бака-аккумулятора. Гликоль защищает установку от замерзания зимой. Кроме того, такая система обеспечивает антикоррозионную защиту, поскольку незамерзающие теплоносители содержат дополнительные антикоррозионные присадки. Закрытые напорные системы обязательно оснащены расширительным баком, который воспринимает тепловое расширение теплоносителя и дополнительно возникающий объем пара при закипании теплоносителя в коллекторе. Такие систе-

мы широко применяются в Центральной Европе, где их доля на рынке составляет около 95 процентов.

*Напорная система с защитой от замерзания.* Система с защитой от замерзания по своей конструкции аналогична описанной ранее системе с незамерзающим теплоносителем. Разница состоит в том, что теплоносителем в ней является чистая вода, без добавления антифриза. Чтобы вода не замерзала, зимой на коллектор подается теплота от котла через бак-аккумулятор. Для энергетической оценки таких систем необходимо из полученной летом энергии вычесть энергию, расходуемую зимой на обогрев коллектора. Расход энергии на обогрев коллектора зависит от температуры наружного воздуха и, как правило, составляет не менее десяти процентов производительности системы. Если такие установки подключены непосредственно к контуру котла (без гидравлического разделения контуров), то при проектировании и монтаже следует это учитывать (обработка теплоносителя, испытания под давлением и т.д.).

**Конструкция системы солнечного теплоснабжения.** В *плоских коллекторах* (90% рынка) абсорбер, как правило, защищен корпусом из высококачественной листовой стали или алюминия, а с фронтальной поверхности закрыт гелиостеклом с низким содержанием железа, которое обеспечивает долговременную защиту от неблагоприятных погодных условий. Антиотражающее покрытие стекла дополнительно уменьшает отражение. Тепловая изоляция корпуса снижает тепловые потери. Площадь 2-2,5 м<sup>2</sup>.

Преобразование солнечного излучения в тепловую энергию в абсорбере как в плоских, так и в *трубчатых коллекторах*, происходит, в принципе, идентично. Значительные отличия состоят в тепловой изоляции: в трубчатом коллекторе абсорбер, как в термосе, встроен в вакуумированную стеклянную трубку. Вакуум обладает хорошими теплоизоляционными свойствами, поэтому тепловые потери будут более низкими, чем в плоских коллекторах, особенно при высоких температурах, т.е. в условиях эксплуатации, которые ожидаются при замещении тепловой нагрузки на отопление или кондиционирование воздуха. Однако вакуумные коллекторы дороже.

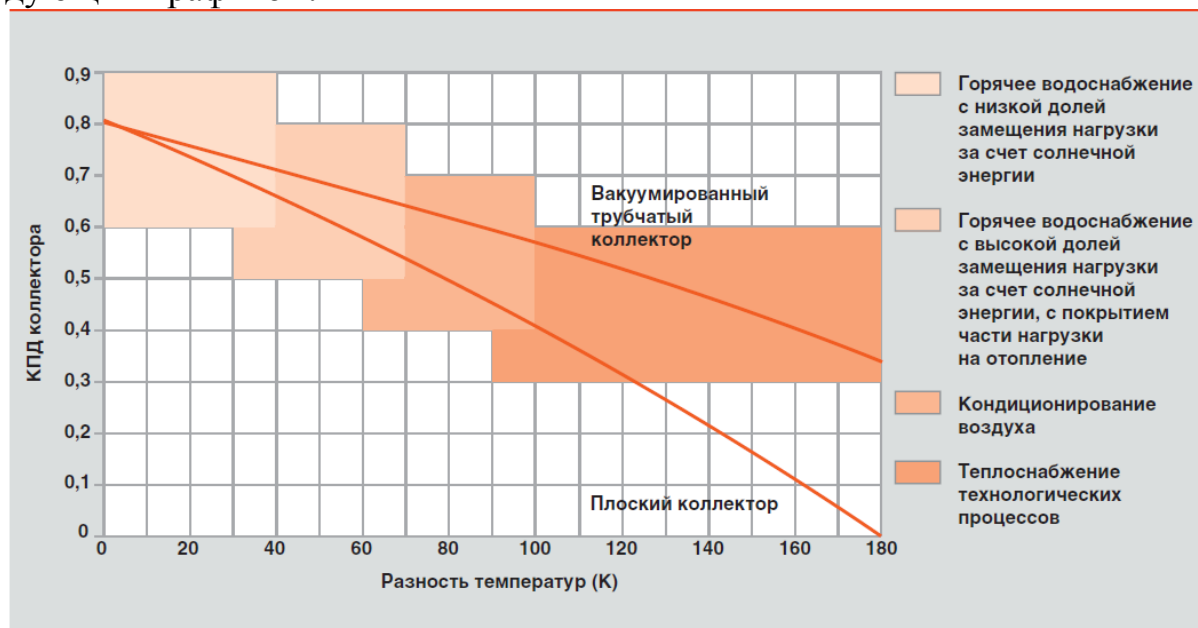


*Плоский коллектор*



*Вакуумный коллектор*

При выборе типа коллектора можно руководствоваться нижеследующим графиком:



Чем больше разность температур между коллектором и окружающей средой, тем больше преимущество вакуумированного трубчатого коллектора.

**Постановка задачи.** Запроектировать систему солнечного теплоснабжения (ССТ) для двухэтажного жилого дома с неотапливаемым чердаком и холодным подпольем. Определить оптимальную долю тепловой нагрузки, обеспечиваемой ССТ по минимуму приведенных затрат.

- место расположения – пригород г. Казань ( $55,8^{\circ}$  с.ш.,  $49,1^{\circ}$  в.д.);
- общая площадь дома по внутреннему периметру наружных стен  $S=140 \text{ м}^2$ ;

- отапливаемый объём  $V=350 \text{ м}^3$ ;

- коэффициент остекления фасада  $f_{of}=0,18$  (отношение площадей светопроемов к суммарной площади наружных ограждающих конструкций фасада здания, включая светопроемы: для обычных домов  $f=0,12-0,18$ , для энергоэффективных –  $f=0,10$  и менее);

- показатель компактности здания  $K_{\text{комп}}=0,9$  (отношение общей площади внутренней поверхности наружных ограждающих конструкций здания к заключенному в них отапливаемому объему); зависит от объёмно-планировочного решения дома: согласно п. 5.14 СП 50.13330.2012 «Тепловая защита зданий» для одноэтажных зданий  $K_{\text{комп}} \leq 1,1$ , для двухэтажных и одноэтажных с мансардой  $K_{\text{комп}} \leq 0,9$ , для двухэтажных блокированных и секционных  $K_{\text{комп}} \leq 0,9$  и т.д.;

- тип дублирующего источника – электрический водогрейный котёл с КПД 98% и стоимостью вырабатываемой теплоты 7,2 руб./кВт;

– расчётное количество жителей –  $n=5$  чел. (заселённость  $140/8=17,5$  чел./м<sup>2</sup>).

### Решение

Температура горячей воды в местах водоразбора согласно п. 2.4 СанПиН 2.1.4.2496-09 «Гигиенические требования к обеспечению безопасности систем горячего водоснабжения» должна составлять  $+60...+75$  °С (такой интервал обеспечивает дезинфекцию патогенной среды в воде и предотвращает от ожогов). Примем  $t_{г.в.}=+70$  °С.

Несмотря на то, что нормативы температурных показателей холодной водопроводной воды регламентом не предусмотрены, рекомендовано в зависимости от времени года этот параметр принимать в пределах  $+4...+20$  °С (в магистральном водопроводе температура воды может иметь даже отрицательные показатели из-за высокого давления внутри системы). Примем  $t_{х.в.}=+5$  °С.

При расчете ССТ и горячего водоснабжения учитывается круглогодичность их работы.

### Расчет системы солнечного теплоснабжения

Нижеследующие расчёты применимы при использовании схемы, приведенной на рис. 10.1.

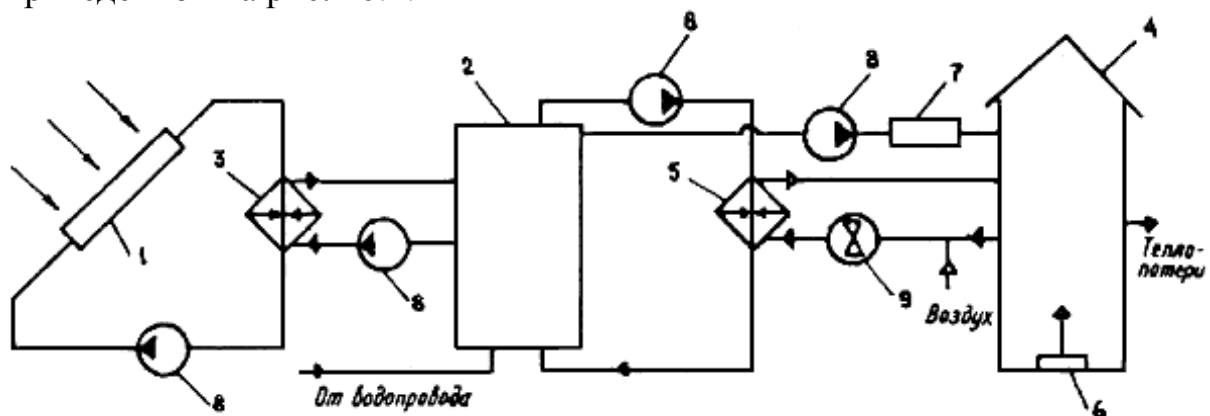


Рис.10.1. Принципиальная схема системы солнечного теплоснабжения

Система ССТ включает три контура циркуляции:

- первый контур, состоящий из солнечных коллекторов 1, циркуляционного насоса 8 и жидкостного теплообменника 3;
- второй контур, состоящий из бака-аккумулятора 2, циркуляционного насоса 8 и теплообменника 3;
- третий контур, состоящий из бака-аккумулятора 2, циркуляционного насоса 8, водовоздушного теплообменника (калорифера) 5.

Функционирует ССТ следующим образом. Теплоноситель (антифриз) теплоприемного контура, нагреваясь в солнечных коллекторах 1, поступает в теплообменник 3, где теплота антифриза передается воде, цирку-

лирующей в межтрубном пространстве теплообменника 3 под действием насоса 8 второго контура. Нагретая вода поступает в бак-аккумулятор 2.

Из бака-аккумулятора вода забирается насосом ГВС 8, доводится при необходимости до требуемой температуры в дублере 7 и поступает в систему ГВС здания. Подпитка бака-аккумулятора осуществляется из водопровода.

Для отопления вода из бака-аккумулятора 2 подается насосом третьего контура 8 в калорифер 5, через который с помощью вентилятора 9 пропускается воздух и, нагревшись, поступает в здание 4.

В случае отсутствия солнечной радиации или нехватки тепловой энергии, вырабатываемой солнечными коллекторами, в работу включается дублер 6.

Основным параметром ССТ является годовая удельная теплопроизводительность, определяемая из уравнения

$$q = a + b (H - 1000), \text{ кВт} \cdot \text{ч} / \text{м}^2, \quad (10.1)$$

где  $H$  – среднегодовая суммарная солнечная радиация на горизонтальную поверхность,  $\text{кВт} \cdot \text{ч} / \text{м}^2$ ; находится по табл. 10.2 (СП 131.13330.2012 «Строительная климатология» табл. 8.1); по интерполяции для г. Казани находим  $H = 1582 + [(1716 - 1582) / (56 - 52)] \cdot (56 - 55,82) = 1709 \text{ кВт} \cdot \text{ч} / \text{м}^2$ ;

$a, b$  – параметры, определяемые из уравнения (10.2) и (10.3)

$$a = (\alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2) + (\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^2) f + (\alpha_7 + \alpha_8 r + \alpha_9 r^2) f^2; \quad (10.2)$$

$$b = (\beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 r^2) + (\beta_4 + \beta_5 r + \beta_6 r^2) f + (\beta_7 + \beta_8 r + \beta_9 r^2) f^2; \quad (10.3)$$

где  $r$  – характеристика теплоизолирующих свойств ограждающих конструкций здания при фиксированном значении нагрузки ГВС, представляет собой отношение суточной нагрузки отопления при температуре наружного воздуха равной  $0^\circ\text{C}$  к суточной нагрузке ГВС. Чем больше  $r$ , тем больше доля отопительной нагрузки по сравнению с долей нагрузки ГВС и тем менее совершенной является конструкция здания с точки зрения тепловых потерь;  $r = 0$  принимается при расчете только системы ГВС;

$\alpha_1 \dots \alpha_9; \beta_1 \dots \beta_9$  – коэффициенты, находятся из табл. 10.3 и 10.4 в зависимости от принятого типа (I, II, III), характеристики которых приведены в табл. 10.3. Для ССТ рекомендуется применять одностекольный селективный коллектор (тип II) и двухстекольный неселективный коллектор (тип III). Для систем ГВС – одностекольные коллекторы (типов I, II);

$f$  – коэффициент замещения, ориентировочно принимается от 0,2 до 0,4 (он определяет долю тепловой нагрузки, обеспечиваемой ССТ от общего объема теплоснабжения дома всеми источниками). Примем  $f = 0,3$ .

Характеристика теплоизолирующих свойств ограждающих конструкций определяется по формуле:

$$r = (\lambda m + k \rho_e c_p^e) V t_e / I S, \quad (10.4)$$

где  $\lambda$  – удельные тепловые потери здания,  $\text{Вт} / (\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C})$ ;

$m$  – количество часов в сутках;  $m=24$  ч;  
 $V$  – отапливаемый объем здания,  $V=350$  м<sup>3</sup>;  
 $S$  – отапливаемая площадь здания по внутреннему периметру наружных стен,  $S=140$  м<sup>2</sup>;

$\rho_e$  – плотность воздуха при 0 °С,  $\rho_e=1,292$  кг/м<sup>3</sup>;  
 $c_p^e$  – теплоемкость воздуха при 0 °С и постоянном давлении,  $c_p^e=0,279$  Вт·ч/(кг·°С);

$t_e$  – температура воздуха внутри здания, согласно табл. 1 ГОСТ 30494-2011 «Здания жилые и общественные. Параметры микроклимата в помещениях» для жилых комнат в районах с температурой наиболее холодной пятидневки (обеспеченностью 0,92) минус 31 °С и ниже (г. Казань)  $t_e = +20...+24$ °С (в табл. 1 п. 5.2.3 СП 23-101-2004 «Проектирование тепловой защиты зданий» этот интервал уже:  $t_e = +20...+22$ °С), примем  $t_e = +21$  С;

$l$  – суточная нагрузка ГВС, равная 517 Вт·ч/м<sup>2</sup> – const;

$k$  – суточная кратность вентиляционного обмена воздуха, 1/сут., равная

$$k = \frac{v_{min} m}{V}, \quad (10.5)$$

где  $v_{min}$  – минимально возможный по нормам расход воздуха на вентиляцию дома, м<sup>3</sup>/ч, который зависит от расход воздуха на 1 чел., назначения здания в целом и каждого отдельного помещения в частности (например, в ванных комнатах этот показатель выше, чем в жилых), но в среднем согласно Приложению К СП 60.13330.2012 «Отопление, вентиляция и кондиционирование воздуха. Актуализированная редакция СНиП 41-01-2003» можно принять для жилых зданий с возможностью естественного проветривания и с общей площадью квартиры на 1 чел. более 20 м<sup>2</sup> – 30 м<sup>3</sup>/ч на 1 чел. (если эта площадь менее 20 м<sup>2</sup> на 1 чел., то  $v_{min}$  принимают 3 м<sup>3</sup>/ч на 1 м<sup>2</sup> жилой площади); тогда при  $S/n=140/5=28>20$  м<sup>2</sup>/чел.  $v_{min} = 30n = 30 \cdot 5 = 150$  м<sup>3</sup>/ч, а кратность вентиляционного обмена воздуха, соответственно, составит  $k = \frac{150 \cdot 24}{450} = 8 \frac{1}{сут}$ .

Для зданий, запроектированных по всем требованиям СП 50.13330.2012 «Тепловая защита зданий», общие теплотери за отопительный период  $Q_{общ}^{zod}$  кВт·ч/год, определяются по формуле:

$$Q_{общ}^{zod} = 0,024 \cdot ГСОП \cdot V (k_{об} + k_{вент}), \quad (10.6)$$

где ГСОП – градус-сутки отопительного периода, определяемые по формуле:

$$ГСОП = (t_b - t_{от}) z_{от}, \quad (10.7)$$

где  $t_{от}$ ,  $z_{от}$  – средняя температура наружного воздуха, °С, и продолжительность, сут/год, отопительного периода, принимаемые по табл. 10.3 СП 131.13330.2012 «Строительная климатология» для периода со средне-суточной температурой наружного воздуха не более +8 °С (для г. Казань  $t_{от}=-4,8$  °С,  $z_{от}=208$  сут); тогда ГСОП =  $(21 - (-4,8)) \cdot 208 = 5366,5$  °С·сут./год;

$k_{вент}$  – удельная вентиляционная характеристика здания, Вт/(м<sup>3</sup>·°С), вычисленная ниже;

$k_{об}$  – удельная теплозащитная характеристика здания, Вт/(м<sup>3</sup>·°С), определяется по формуле:

$$k_{об} = K_{ком} K_{общ}, \quad (10.8)$$

$K_{общ}$  – общий коэффициент теплопередачи здания, Вт/(м<sup>2</sup>·°С), определяемый по формуле:

$$K_{общ} = \frac{1}{A_n^{сум}} \sum_i \left( n_{t,i} \frac{A_{ф,i}}{R_{0,i}^{np}} \right) \quad (10.9)$$

$A_n^{сум}$  – сумма площадей (по внутреннему обмеру) всех наружных ограждений теплозащитной оболочки здания, м<sup>2</sup>:

$$A_n^{сум} = K_{ком} V, \quad (10.10)$$

получаем  $A_n^{сум} = 0,9 \cdot 350 = 315$  м<sup>2</sup>.

$A_{ф,i}$  – площадь соответствующего фрагмента теплозащитной оболочки здания, м<sup>2</sup>;

$n_{t,i}$  – коэффициент, учитывающий отличие внутренней или наружной температуры у конструкции от принятых в расчете ГСОП, определяется по формуле (5.3) СП 50.13330.2012;

$R_{0,i}^{np}$  – приведенное сопротивление теплопередаче  $i$ -го фрагмента теплозащитной оболочки здания, (м<sup>2</sup>·°С)/Вт.

В учебных целях примем следующие допущения:

– чердак в здании является неотапливаемым, подвал отсутствует, поэтому теплый контур здания сверху создает чердачное перекрытие, а снизу – перекрытие над холодным подпольем, тогда площадь этих двух перекрытий, соответственно, составит  $A_1 = A_2 = S/2 = 140/2 = 70$  м<sup>2</sup>;

– площадь наружных стен за вычетом остекления приближенно равна  $A_3 \approx 4V/\sqrt{A_1} (1 - f_{оф}) = 4 \cdot 350/\sqrt{70} (1 - 0,18) = 137$  м<sup>2</sup>;

– площадь остекления, соответственно, составляет  $A_4 = \frac{f_{оф} A_3}{1 - f_{оф}} = \frac{0,18 \cdot 137}{1 - 0,18} = 30$  м<sup>2</sup>;

– при этом уточним коэффициент компактности здания  $K_{комп} = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{V} = \frac{70 + 70 + 137 + 30}{350} = 0,877$ , что незначительно отличается от исходного значения 0,9; соответственно,  $A_H^{сум} = 0,877 \cdot 350 = 307 м^2$ ;

– влияние отличия температурного режима для конкретного помещения от среднего значения здания не учитываем, т.е.  $n_{t,i} = 1,0 - const$ ;

– приведённое сопротивление теплопередачи фрагментов тепловой оболочки нового здания не может быть меньше требуемого в табл. 3 СП 50.13330.2012, которое определяется по формуле:

$$R_{0,i}^{np} = a \cdot ГСОП + b. \quad (10.11)$$

Результаты расчёта по этой формуле сведём в табл. 10.1.

Таблица 10.1

### Сопротивления теплопередаче ограждающих конструкций, (м<sup>2</sup>·°С)/Вт

Здания и помещения, коэффициенты $a$ и $b$	ГСОП, °С·сут/год	Сопротивления теплопередаче		
		Стена	Перекрытий чердачных над неотапливаемыми подпольями	Окон и балконных дверей
1	2	3	5	6
Жилые	5366,5	3,28	4,31	0,47
$a$	-	0,00035	0,00045	0,00005
$b$	-	1,4	1,9	0,2

Таким образом, общий коэффициент теплопередачи здания равен  $K_{общ} = \frac{1}{307} \left( 1 \cdot \frac{70}{4,31} + 1 \cdot \frac{70}{4,31} + 1 \cdot \frac{137}{3,28} + 1 \cdot \frac{30}{0,47} \right) = 0,45$ , а удельная теплозащитная характеристика здания равна  $k_{об} = 0,877 \cdot 0,45 = 0,395$ .

В формуле 10.6  $k_{вент}$  – удельная вентиляционная характеристика здания, Вт/(м<sup>3</sup>·°С), определяется из выражения:

$$k_{вент} = 0,28 c n_v \beta_v \rho_v^{вент} (1 - k_{эф}), \quad (10.12)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость воздуха, равная 1 кДж/(кг·°С);

$\beta_v$  – коэффициент снижения объема воздуха в здании, учитывающий наличие внутренних ограждающих конструкций. При отсутствии данных принимать  $\beta_v = 0,85$ ;

$\rho_v^{вент}$  – средняя плотность приточного воздуха за отопительный период, кг/м<sup>3</sup>.

$$\rho_v^{вент} = \frac{353}{273 + t_{от}}, \quad (10.13)$$



$$\rho_v^{вент} = \frac{353}{273+(-4,8)} = 1,316 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

$n_B$  – средняя кратность воздухообмена здания за отопительный период, час<sup>-1</sup>, равная  $k/m=8/24=0,333$  час<sup>-1</sup>;

$k_{эф}$  – коэффициент эффективности рекуператора примем равным нулю при неизвестной воздухопроницаемости теплозащитной оболочки здания.

$$\text{Итак, } k_{вент} = 0,28 \cdot 1 \cdot 0,333 \cdot 0,85 \cdot 1,316(1-0) = 0,104.$$

В соответствии с этим теплопотери за отопительный период равны  $Q_{общ}^{зод} = 0,024 \cdot 5366,5 \cdot 350 \cdot (0,395 + 0,104) = 22494 \frac{\text{кВт} \cdot \text{ч}}{\text{год}}$ , а удельные теплопотери здания составляют  $\lambda = \frac{Q_{общ}^{зод}}{Vz_{от}} = \frac{22494 \cdot 10^{-3}}{350 \cdot 208} = 0,309 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{°C}}$ .

Тогда характеристика теплоизолирующих свойств ограждающих конструкций по формуле (10.4) равна  $r = (0,309 \cdot 24 + 8 \cdot 1,292 \cdot 0,279) \cdot 350 \cdot 21 / (517 \cdot 140) = 1,046$ .

Таким образом для одностекольного неселективного коллектора (тип II) будем иметь по формулам (10.2) и (10.3):

$$a = (607 - 80 \cdot 1,046 - 3 \cdot 1,046^2) + (-1340 + 437,5 \cdot 1,046 + 22,5 \cdot 1,046^2) \cdot 0,3 + (1900 - 1125 \cdot 1,046 + 25 \cdot 1,046^2) \cdot 0,3^2 = 520 - 257 + 67,6 = 331;$$

$$b = (1,062 - 0,434 \cdot 1,046 + 0,158 \cdot 1,046^2) + (-2,465 + 2,958 \cdot 1,046 - 1,088 \cdot 1,046^2) \cdot 0,3 + (3,55 - 4,475 \cdot 1,046 + 1,775 \cdot 1,046^2) \cdot 0,3^2 = 0,781 - 0,168 + 0,073 = 0,686.$$

$$Годовая \text{ удельная теплопроизводительность ССТ } q = 331 + 0,686 \cdot (1709 - 1000) = 817 \text{ кВт} \cdot \text{ч} / \text{м}^2.$$

Для сокращения объёмов вычислений в учебных целях примем, что система отопления здания запроектирована так, что полная годовая нагрузка теплоснабжения равна требуемой по табл. 13 СП СП 50.13330.2012, которая зависит от количества этажей и площади отапливаемой части здания (табл. 10.5):

$$Q = 0,024 \cdot ГСОП \cdot V \cdot q_{от}^{мп} = 0,024 \cdot 5366,5 \cdot 350 \cdot 0,499 = 22494 \frac{\text{кВт} \cdot \text{ч}}{\text{м}^3 \cdot \text{°C}}.$$

Общая площадь поверхности солнечных коллекторов находится по формуле:

$$F = Q / q. \tag{10.14}$$

Таким образом,  $F = 22494 \cdot 0,3 / 817 = 8,3 \text{ м}^2$ .

По найденной площади из номенклатуры, представленной на рынке, подбирают типоразмер и количество солнечных коллекторов с характеристиками не ниже, чем представлены в табл. 10.8.

### Расчет системы солнечного горячего водоснабжения (СГВС)

Принципиальная схема системы ГВС приведена на рис. 10.2.

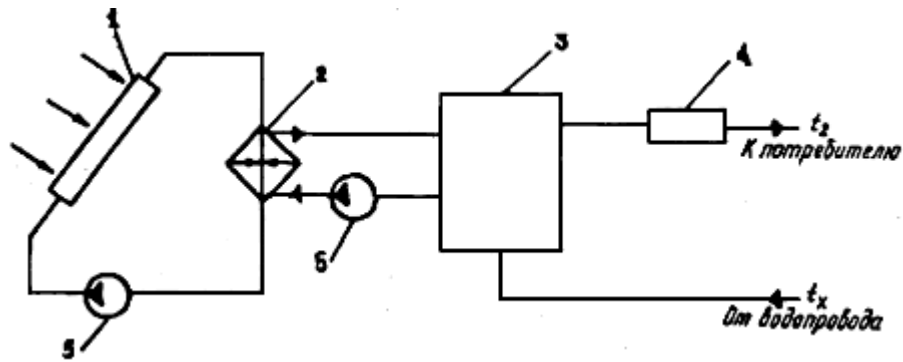


Рис. 10.2. Принципиальная схема системы солнечного горячего водоснабжения

Работа СГВС осуществляется следующим образом. Циркуляционный насос 5 прокачивает теплоноситель через солнечные коллекторы 1, где он, нагреваясь, отдает в теплообменнике 2 теплоту воде второго контура. Второй контур образован теплообменником 2, баком-аккумулятором 3 и насосом 5, соединенными между собой трубопроводом. Вода из бака-аккумулятора 3 через дублер 4 поступает в систему горячей воды здания. Холодная вода для подпитки поступает в нижнюю часть БА из водопровода.

Удельная годовая теплопроизводительность СГВС определяется по формуле

$$q = a + b (H - 1050), \text{ кВт}\cdot\text{ч}/\text{м}^2. \quad (10.15)$$

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  находятся из табл. 10.5. Уравнение (10.15) справедливо при  $f = 0,5$  и  $1050 \leq H \leq 1900$ .

При других значениях коэффициента замещения  $f$  для рассматриваемых типов коллекторов I и II значение удельной годовой теплопроизводительности  $q$  должно быть увеличено (уменьшено) в соответствии с данными табл. 10.6 и определяется по формуле:

$$q_i = q (1 + \Delta q / 100), \text{ кВт}\cdot\text{ч}/\text{м}^2, \quad (10.16)$$

где  $q_i$  – удельная годовая теплопроизводительность СГВС при значениях  $f$ , отличных от 0,5;

$\Delta q$  – изменение годовой удельной теплопроизводительности СГВС, %;  $\Delta q = 10\%$  при  $H = 1709 > 1500$  кВт·ч/м<sup>2</sup>.

Тогда для II-го типа коллекторов  $q = 355 + 0,8 \cdot (1709 - 1050) = 882,2$  кВт·ч/м<sup>2</sup>;  $q_i = 882,2 (1 + 10 / 100) = 970,4$  кВт·ч/м<sup>2</sup>.

Общая площадь поверхности солнечных коллекторов СГВС определяется по формуле:

$$F = Q f / q, \text{ м}^2. \quad (10.17)$$

Таким образом,  $F = 22494 \cdot 0,3 / 970,4 = 7,0$  м<sup>2</sup>.

По найденной площади из номенклатуры, представленной на рынке, подбирают типоразмер и количество солнечных коллекторов с характеристиками не ниже, чем представлены в табл. 10.8.

### **Обоснование экономической целесообразности применения солнечной системы теплоснабжения**

Применение ССТ считается целесообразным, если выполняется условие

$$Z_c \leq Z_{\bar{o}}, \quad (10.18)$$

где  $Z_c$  – удельные приведенные затраты на единицу вырабатываемой тепловой энергии ССТ, руб./ГДж;

$Z_{\bar{o}}$  – удельные приведенные затраты на единицу вырабатываемой тепловой энергии базовой установкой, руб./ГДж.

Удельные приведенные затраты на единицу вырабатываемой энергии (стоимость единицы тепловой энергии) для солнечной установки определяются по формуле:

$$Z_c = C_c / Q, \quad (10.19)$$

где  $C_c$  – приведенные затраты на ССТ и дублер, руб./год;

$$C_c = (k_c + k_{\bar{o}}) E_n + \mathcal{E}_c k_c + \mathcal{E}_{\bar{o}} k_{\bar{o}} + \mathcal{C} N_{\bar{o}} - k_{\bar{e}} - k_n, \quad (10.20)$$

где  $k_c$  – капитальные затраты на ССТ, руб.;

$k_{\bar{o}}$  – капитальные затраты на дублер, руб.;

$E_n$  – нормативный коэффициент сравнительной эффективности капитальных вложений (0,1);

$\mathcal{E}_c$  – доля эксплуатационных расходов от капитальных затрат на ССТ;

$\mathcal{E}_{\bar{o}}$  – доля эксплуатационных расходов от капитальных затрат на дублер;

$\mathcal{C}$  – стоимость единицы тепловой энергии, вырабатываемой дублером, руб./ГДж;

$N_{\bar{o}}$  – количество тепловой энергии, вырабатываемой дублером в течение года, ГДж;

$k_{\bar{e}}$  – эффект от снижения загрязнения окружающей среды, руб.;

$k_n$  – социальный эффект от экономии зарплаты персонала, обслуживающего дублер, руб.

Удельные приведенные затраты определяются по формуле:

$$Z_{\bar{o}} = C_{\bar{o}} / Q, \quad (10.21)$$

где  $C_{\delta}$  – приведенные затраты на базовую установку, руб./год;

$$C_{\delta} = k_{\delta} E_n + \mathcal{E}_{\delta} k_{\delta}, \quad (10.22)$$

где  $k_{\delta}$  – капитальные затраты на базовый источник тепловой энергии, руб.;

$\mathcal{E}_{\delta}$  – доля эксплуатационных расходов от капитальных затрат на базовый источник тепловой энергии.

Эффект от снижения загрязнения окружающей среды учитывается для приведения к сопоставимому виду сравниваемых вариантов и рассчитывается в соответствии с действующей «Временной типовой методикой определения экономической эффективности осуществления природоохранных мероприятий и оценки экономического ущерба, причиняемого народному хозяйству загрязнением окружающей среды» (Госплан СССР, Госстрой СССР, АН СССР, 1983) и «Руководством по расчету количества и удельных показателей выбросов вредных веществ в атмосферу» (М.: ВПТИтрансстрой, 1982).

Социальный эффект от экономии зарплаты персонала, обслуживающего дублер  $k_n$  при отключении дублера в период полного покрытия тепловой нагрузкой ССТ, определяется по формуле:

$$k_n = \frac{Z_n}{12} \tau_{nn}, \quad (10.23)$$

где  $Z_n$  – среднегодовая удельная зарплата с начислениями эксплуатационного персонала дублера, руб./год;

$\tau_{nn}$  – период полного покрытия тепловой нагрузки ССТ, мес.

Расчет экономии топлива в пересчете на условное (т) за счет использования солнечной энергии следует определять по формуле:

$$B = \frac{Q_c}{10^3 Q_n^p \eta}, \quad (10.24)$$

где  $Q_n^p$  – низшая теплота сгорания условного топлива, кВт·ч/кг;

$\eta$  – КПД замещаемого источника энергии.

Упрощенный способ оценки срока окупаемости системы солнечного отопления и горячего водоснабжения:

$$T_{ок} = \frac{C}{cfQ}, \quad (10.25)$$

где  $C$  – затраты на изготовление и монтаж системы солнечно отопления и ГВС;  $c$  – стоимость 1 кВт энергии, производимой различными видами топлива (рис. 10.3). Если задаться стоимостью ССТ в среднем 200 тыс.

руб., то при наличии дублёра в виде магистрального газа, такая система окупится через  $T_{ок} = \frac{200000}{1 \cdot 0,3 \cdot 22494} \approx 30 \text{ лет}$ , что соответствует сроку службы такой системы. Однако, если отапливать дом, например, электричеством, то срок окупаемости сократится до  $T_{ок} = \frac{200000}{7,2 \cdot 0,3 \cdot 22494} \approx 4 \text{ года}$ ; если использовать дрова, то  $T_{ок} = \frac{200000}{2,1 \cdot 0,3 \cdot 22494} \approx 14 \text{ лет}$ .

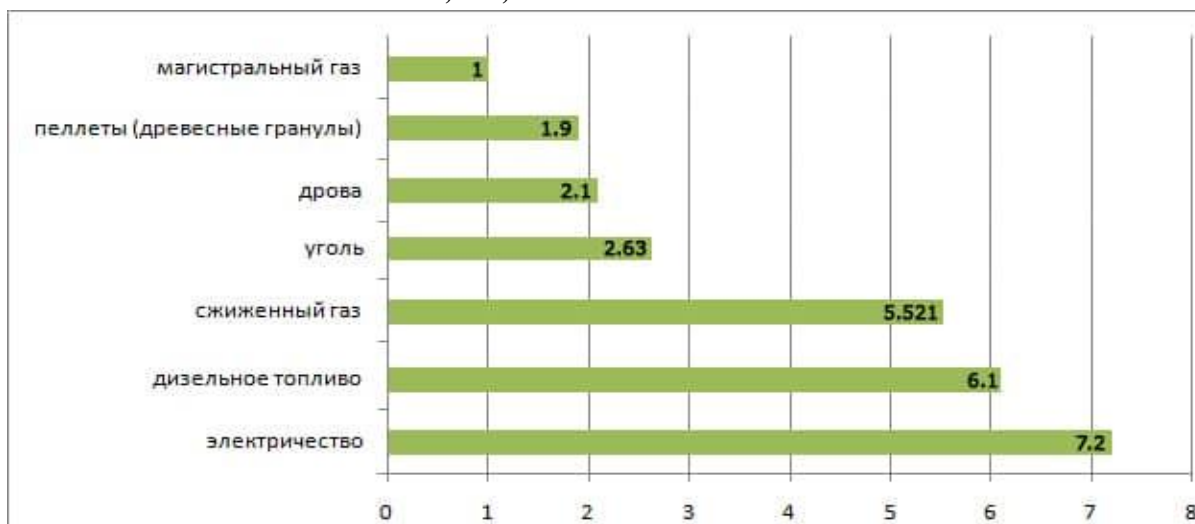


Рис. 10.3. Сравнительная стоимость 1 кВт энергии, производимой различными видами топлива

Таблица 10.2

**Значение суммарной солнечной радиации (прямой и рассеянной) на горизонтальную поверхность при безоблачном небе ( $H$ ), кВт·ч/м<sup>2</sup>**

Месяц	Географическая широта, град. с.ш.							
	40	44	48	52	56	60	64	68
Январь	89	73	58	46	31	19	10	-
Февраль	116	101	90	75	61	47	37	31
Март	178	168	160	147	130	113	113	78
Апрель	203	201	195	188	181	170	163	158
Май	248	242	239	236	233	229	230	224
Июнь	249	247	245	244	243	244	240	240
Июль	248	246	244	245	243	238	238	247
Август	223	213	204	200	193	183	178	178
Сентябрь	182	172	164	150	135	126	111	99
Октябрь	142	129	113	96	74	58	48	34
Ноябрь	99	86	71	54	35	23	16	9
Декабрь	83	65	51	35	23	13	-	-
Сумма ( $H$ )	2060	1943	1834	1716	1582	1463	1384	1298

Таблица 10.3

**Значения коэффициента  $\alpha$  для солнечных коллекторов II и III типов**

Тип коллектора	Значения коэффициентов								
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
II	607,0	-80,0	-3,0	-1340,0	437,5	22,5	1900,0	-1125,0	25,0
III	298,0	148,5	-61,5	150,0	1112,0	337,5	-700,0	1725,0	-775,0

Таблица 10.4

**Значения коэффициента  $\beta$  для солнечных коллекторов II и III типов**

Тип коллектора	Значения коэффициентов								
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
II	1,177	-0,496	0,140	-2,6	3,6	-0,995	3,350	-5,05	1,400
III	1,062	-0,434	0,158	-2,465	2,958	-1,088	3,550	-4,475	1,775

Таблица 10.5

**Нормируемая (базовая) удельная характеристика расхода тепловой энергии на отопление и вентиляцию малоэтажных жилых многоквартирных зданий,  $q_{от}^{TP}$  Вт/(м<sup>3</sup>·°С)**

Площадь здания, м <sup>2</sup>	С числом этажей			
	1	2	3	4
50	0,579	-	-	-
100	0,517	0,558	-	-
150	0,455	0,496	0,538	-
250	0,414	0,434	0,455	0,476
400	0,372	0,372	0,393	0,414
600	0,359	0,359	0,359	0,372
1000 и более	0,336	0,336	0,336	0,336

*Примечание.* При промежуточных значениях отапливаемой площади здания в интервале 50 - 1000 м<sup>2</sup> значения  $q_{от}^{TP}$  должны определяться линейной интерполяцией.

Таблица 10.6

**Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  в зависимости от типа солнечного коллектора**

Тип коллектора	Значения коэффициентов	
	$a$	$b$
I	235	0,75
II	355	0,80

Таблица 10.7

**Изменение значения удельной годовой теплопроизводительности  $\Delta q$  от годового поступления солнечной радиации на горизонтальную поверхность  $H$  и коэффициента  $f$**

Значения $H$ , кВт·ч/м <sup>2</sup>	Значения $\Delta q$ , % при			
	$f = 0,3$	$f = 0,4$	$f = 0,5$	$f = 0,6$
Менее 1500	+17	+9	0	-10
Более 1500	+10	+5	0	-6

Таблица 10.8

**Теплотехнические характеристики солнечных коллекторов**

Наименование величины	Тип коллектора		
	I	II	III
Общий коэффициент тепловых потерь $U_L$ , Вт/(м <sup>2</sup> ·°С)	7,5	4,3	4,4
Поглощательная способность теплоприемной поверхности $\alpha$	0,95	0,90	0,95
Степень черноты поглощательной поверхности в диапазоне рабочих температур коллектора $\epsilon$	0,95	0,10	0,95
Пропускательная способность остекления $\tau_n$	0,87	0,87	0,72
Коэффициент эффективности $F_R$	0,91	0,93	0,95
Максимальная температура теплоносителя, °С	80	100	80

*Примечание.* I – одностекольный неселективный коллектор; II – одностекольный селективный коллектор; III – двухстекольный неселективный коллектор.

Таблица 10.9

**Варианты заданий к задаче № 10**

№	Место	$n_{эт}$	$S$ , м <sup>2</sup>	$V$ , м <sup>3</sup>	$f_{оф}$	$K_{комп}$	$n$ , чел
1	Москва	1	80	210	0,10	1,1	4
2	Самара	2	160	415	0,11	0,9	5
3	Томск	1	85	220	0,12	1,09	5
4	Белгород	2	165	430	0,13	0,89	6
5	Владивосток	1	90	230	0,14	1,08	5
6	Пенза	2	170	445	0,15	0,88	7
7	Самара	1	95	240	0,16	1,07	5
8	Астрахань	2	175	460	0,17	0,87	7
9	Томск	1	100	250	0,19	1,06	6
10	Волгоград	2	180	475	0,20	0,86	7
11	Сочи	1	105	260	0,19	1,05	6
12	Петрозаводск	2	185	475	0,18	0,85	8
13	Рубцовск	1	110	270	0,17	1,04	6
14	Саратов	2	190	490	0,16	0,84	8
15	Бугульма	1	115	280	0,15	1,03	6

## ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральный закон от 30.12.2009 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений».
2. Постановление Правительства РФ № 87 «О составе разделов проектной документации и требованиях к их содержанию».
3. СП 42.13330.2011. «Градостроительство. Планировка и застройка городских и сельских поселений».
4. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. – М., 2012.
5. СП 15. 13330.2012. Каменные и армокаменные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-22-81\*. – М., 2012.
6. СП20.13330.2011. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\*. – М., 2011.
7. Бондаренко В.М. и др. Железобетонные и каменные конструкции / В.М. Бондаренко, Р.О. Бакиров, В.Г. Назаренко, В.И. Римшин; под ред. В.М. Бондаренко. – М.: Высш. шк., 2002. – 876 с.
8. Денисова А.П., Ращепкина С.А. Методы оптимального проектирования строительных конструкций. – М.: Изд-во АСВ, 2012. – 216 с.



Радайкин О.В.

**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ  
ЗАДАЧ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**  
к выполнению практических заданий для магистрантов  
направления подготовки 08.04.01 «Строительство» по дисциплине  
«Методы решения научно-технических задач в строительстве»