МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра физики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ФИЗИКЕ
для студентов специальностей 060811, 060815, 240400, 290300, 290600, 290700, 290800, 291000, 550100.

Раздел механика

Лабораторная работа № 3
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Казань
2013

ВВЕДЕНИЕ

Материей называют *всё, что существует в природе*. *Любое изменение материи* называют ***движением материи***. Существуют различные виды движения материи: механическое, электромагнитное и т.д. При этом может происходить их взаимное превращение. Так, например, при движении тела в вязкой среде за счёт сил трения механическое движение переходит в тепловое движение молекул тела и окружающей среды. Для характеристики движения материи и его взаимного превращения, а также для характеристики взаимодействия тел была введена физическая величина, названная энергией.

Итак, ***энергия*** — это *универсальная количественная мера различных форм движения и взаимодействия тел.*

Рассмотрим сначала лишь механическое движение, мерой которого является механическая энергия. Под ***механической энергией*** *понимается способность тела или системы тел совершать работу*. При изменении механического движения, вызываемого силами, действующими на него со стороны других тел, происходит обмен энергии между взаимодействующими телами. Для характеристики процесса обмена энергией в механике вводят понятие работы силы (механической работы), приложенной к телу, которое используется и в других разделах физики. Если на тело, движущееся прямолинейно, действует постоянная сила $\vec{F}$, составляющая угол α с перемещением $\vec{s}$, то работа силы находится по формуле:

$$A = Fs\cdot\cos\alpha \tag{1}$$

Поскольку в данной работе используется понятие скорости и угловой скорости, то рассмотрим их.

1. Скорость. Для характеристики быстроты движения вводят физическую величину, называемую ***скоростью***. Выберем элементарный промежуток времени dt, в течение которого быстрота движения практически постоянна. Предположим, что за это время материальная точка совершила элементарное перемещение $d\vec{r}$. Тогда скоростью $\vec{\upsilon}$ называют отношение

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad (2)$$

т.е. *скорость — это перемещение, отнесённое к единице времени*. Другими словами, скорость равна перемещению, которое бы совершило тело за единицу времени при условии, что она остаётся неизменной. С точки зрения математики *скорость является производной радиус-вектора по времени.* В любой точке траектории скорость направлена по касательной к ней. Скорость тела зависит от выбора системы отсчёта.

2. Угловая скорость. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси. Для характеристики быстроты его вращения вводится угловая скорость. Если за элементарный промежуток времени dt тело повернулось на элементарный угол $d\varphi$, то модуль ω угловой скорости равен:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad (3)$$

т.е. *угловая скорость равна углу поворота, отнесённого к единице времени,* или *производной угла поворота по времени*. Угловая скорость является вектором. Она направлена вдоль оси вращения. Её направление находится по правилу ***правого винта***: *если вращение винта проводить в направлении вращения тела, то его поступательное движение даёт направление угловой скорости.*

3. Момент инерции тела. Из опытов следует, что вращающиеся тела обладают способностью противодействовать изменению угловой скорости, которой они обладают. Это свойство тел названо ***инертностью*** тела при вращательном движении. Момент инерции тела является мерой его инертности при этом движении. Момент инерции материальной точки, т.е. тела, размерами которого можно пренебречь в данной задаче, вычисляется по формуле

$$I = mR^2 \qquad (4)$$

Для нахождения момента инерции твёрдого тела надо мысленно разбить его на части массой Δm_i, которые можно принять за материальные точки (рис. 1). Тогда момент инерции i-части, согласно формуле (4), равен $\Delta m_i R_i^2$, где R_i — расстояние от оси вращения до i-части. Момент инерции тела равен сумме моментов инерции её частей. Поэтому он равен:

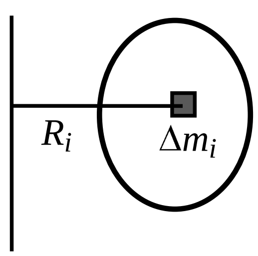

Рис. 1

$$I = \sum_i R_i^2 \Delta m_i = \int_V R^2 dm, \qquad (5)$$

так как суммирование малых величин представляет собой интегрирование. Здесь интеграл берётся по всему объёму тела V. Анализируя (5), приходим к выводу, что инертность тела при вращательном движении зависит не только от его массы, но и её распределения относительно оси вращения.

4. Кинетическая энергия. Различают два вида механической энергии — кинетическую и потенциальную энергии. ***Кинетической*** называется *энергия, обусловленная движением тела*. Она равна работе, которую совершает равнодействующая сила, приложенная к телу, чтобы разогнать его из состояния покоя до данной скорости. Кинетическая энергия $W_\text{к}$ тела массой m, движущегося поступательно со скоростью υ, находится по формуле

$$W_\text{k} = \frac{1}{2} m \upsilon^2. \tag{6}$$

При вращении тела вокруг закреплённой оси его кинетическая энергия равна

$$W_\text{k} = \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{7}$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения, ω — угловая скорость вращения.

Если тело совершает сложное движение, то его можно представить как сумму поступательного и вращательного движений. Поэтому кинетическая энергия $W_\text{к}$ тела будет равна сумме кинетической энергии $(W_\text{к})_\text{пост}$ поступательного и $(W_\text{к})_\text{вр}$ вращательного движения, т.е. $W_\text{к} = (W_\text{к})_\text{пост} + (W_\text{к})_\text{вр}$. Тогда, суммируя (6) и (7), получаем:

$$W_\text{k} = \frac{1}{2} m \upsilon^2 + \frac{1}{2} I\text{щ}^2. \tag{8}$$

Из формул (6) — (8) следует, что кинетическая энергия не может быть отрицательной, и значение кинетической энергии зависит от выбора системы отсчёта, так как скорости тел в различных системах отсчёта различны.

5. Потенциальные и непотенциальные силы. *Если на тело в каждой точке пространства действует какая-нибудь сила, то совокупность этих сил* называют ***силовым полем***. Существует два вида полей — потенциальные и непотенциальные (или вихревые). В потенциальных полях на тела, помещённые в них, действуют силы, зависящие только от координат тел. Эти силы получили название потенциальных или консервативных. Они обладают замечательным свойством: *работа потенциальных сил при перемещении тела не зависит от пути переноса тела и определяется только его начальным и конечным положением.* Эти силы обусловливают потенциальную энергию. В макромире имеется всего лишь три вида потенциальных сил — гравитационная, упругая и электростатическая силы. К непотенциальным силам относятся, например, силы трения.

6. Потенциальная энергия. Тела, находящиеся в потенциальном поле, обладают способностью в определённых условиях совершать работу. Например, тело, поднятое над Землей, после его отпускания приходит в движение под действием гравитационной силы (силы тяжести), совершая работу. Следовательно, тела в данном поле обладают энергией, которую называют потенциальной. Эта энергия зависит от расположения тел, создающих поле, и от положения тела в этом поле, т.е. она зависит от взаимного расположения тел, от которого зависит также и сила взаимодействия тел.

Итак, *энергия, обусловленная взаимодействием тел или частей одного и того же тела*, называется ***потенциальной***.

Величина потенциальной энергии тела зависит от выбора так называемого ***нулевого уровня***, т.е. положения тела, в котором потенциальную энергию условно принимают за ноль. Потенциальная энергия равна работе, которую совершают силы поля, действующие на тело, при переносе его из данной точки на нулевой уровень. Найдём, например, потенциальную энергию материальной точки массой m, лежащей на дне колодца глубиною h, относительно поверхности Земли (рис. 2, на котором показано сечение плоскостью чертежа). При вертикальном подъёме тела угол α между направлением перемещения и силой тяжести равен 180°. Поэтому работа силы тяжести $m\vec{g}$ равна: $A = mgh \cdot \cos 180° = -mgh$, поскольку $\cos 180° = -1$. Тогда, согласно определению, потенциальная энергия тела $W_p = -mgh$. Относительно же дна колодца потенциальная энергия равна нулю. Таким образом, в отличие от кинетической энергии, потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной.

Таким образом, потенциальная энергия тела зависит от выбора нулевого уровня. Это, однако, не отражается на физических законах, поскольку в них используется разность потенциальной энергии тела.

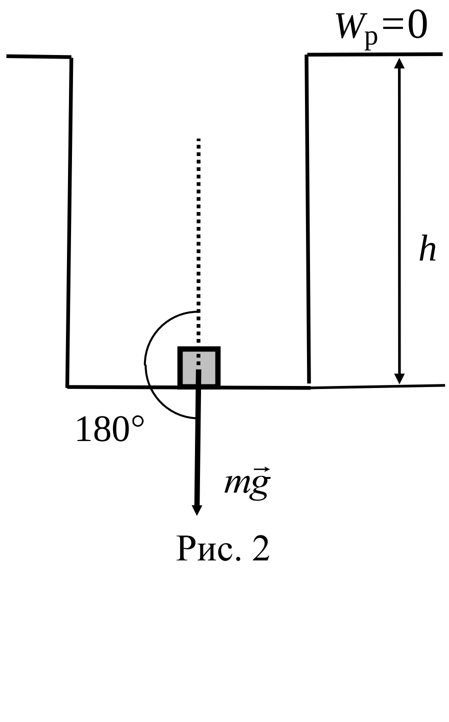

Рис. 2

7. Закон сохранения механической энергии. *Совокупность тел, взаимодействующих между собой и рассматриваемых как единое целое,* называют ***механической системой*** (или системой). Механическая система называется ***замкнутой***, если *тела системы взаимодействуют только между собой, а их силы взаимодействия с телами, не входящими в эту систему, отсутствуют.*

Величину W, равную сумме кинетической и потенциальной энергии тела, т.е. $W = W_к + W_p$, называют ***полной механиче-***

ской энергией или ***механической энергией***.

Если на механическую систему и внутри неё действуют только потенциальные силы, то для такой системы справедлив закон сохранения механической энергии:

$$W = W_к + W_р = \text{const} \tag{9}$$

Следовательно, в ***механической системе, в которой действуют только потенциальные силы, механическая энергия — величина постоянная.***

При движении тел на них действуют силы трения, которые называют ***диссипативными силами***. *Механическая система, в которой между телами действуют диссипативные силы* (наряду с потенциальными силами), называется ***диссипативной***. У таких систем полная механическая энергия при движении непрерывно уменьшается (рассеивается), переходя в другие (немеханические) формы энергии (например, в теплоту). Примерами диссипативных систем могут служить: твёрдые тела, между которыми действуют силы трения, вязкая среда и т.д. Практически все системы, с которыми приходится реально сталкиваться в земных условиях, являются диссипативными системами. Можно показать, что изменение механической энергии диссипативной системы равно работе $A_д$ диссипативных сил:

$$A_д = W_2 - W_1 \tag{10}$$

где W_1 и W_2 — механическая энергия системы в начальном и конечном состоянии. Соотношение (10) представляет собой закон сохранения энергии при наличии диссипативных сил. Он формулируется: ***изменение механической энергии системы равно работе диссипативных сил.***

Необходимо отметить, что механические системы можно приближённо рассматривать как консервативные, т.е. как системы, в которых механическая энергия сохраняется лишь в отдельных случаях, когда действием диссипативных сил можно пренебречь.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

На вертикальной стойке *1* основания *11* (рис. 3) крепятся два кронштейна: верхний *2* и нижний *3*. На верхнем кронштейне находится электромагнит и устройство *4* для крепления и регулировки бифилярного подвеса *5*. Маятник Максвелла представляет собой диск *6*, закреплённый на оси *7*, подвешенной на бифилярном подвесе. На диске крепится сменное кольцо *8*. Маятник фиксируется в верхнем положении с помощью электромагнита. На вертикальной стойке прикреплена миллиметровая линейка, по которой определяют высоту падения маятника. В кронштейне *3* находится фотоэлектрический датчик *9,* предназначенный для выдачи электрических сигналов на миллисекундомер *10,* который жёстко закреплён на основании.

Проанализируем, как будет изменяться механическая энергия маятника в процессе движения. В исходном положении, когда маятник поднят за счёт наматывания нитей на высоту h по отношению к низшей точке, его потенциальная энергия равна mgh, где m — масса маятника, g — ускорение свободного падения, а кинетическая энергия равна нулю. Следовательно, полная механическая энергия в этом положении равна $W_1 = mgh$. Двигаясь вниз, маятник приобретает кинетическую энергию $(W_к)_{пост}$ поступательного и $(W_к)_{вр}$ вращательного движения. В нижней точке потенциальная энергия маятника обращается в ноль, а кинетическая энергия становится максимальной и, согласно формуле (8), $W_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\text{щ}^2$, где I — момент инерции маятника Максвелла, υ и ω — скорость и угловая скорость вращения маятника в нижней точке. Поэтому полная механическая энергия $W_2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\text{щ}^2$. Поскольку сила сопротивления воздуха, действующая на маятник, мала, то ею можно пренебречь. Тогда движение маятника происходит только под действием силы тяжести, которая является потенциальной. Поэтому выполняется закон сохранения механической энергии: $W_2 = W_1$ или $mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\text{щ}^2$. Отсюда находим I. $I\omega^2 = 2mgh — m\upsilon^2$, $I = m(2gh - \upsilon^2)/\omega^2$. Вынося за скобки $\left(\frac{\upsilon}{\text{щ}}\right)^2$, находим: $I = m\left(\frac{\upsilon}{\text{щ}}\right)^2\left(\frac{2gh}{\upsilon^2} - 1\right)$. Из кинематики поступательного и вращательного движения известно, что $\upsilon = \omega R_о$ и $\upsilon^2 = 2ah$, где $R_о$ — радиус оси маятника, a — ускорение, с которым опускается маятник. С учётом этого получаем: $I = m\left(\frac{\omega R_о}{\omega}\right)^2\left(\frac{2gh}{2ah} - 1\right) =$ $= mR_о^2\left(\frac{g}{a} - 1\right)$. Ускорение находим экспериментально, используя соотношение $h = \frac{at^2}{2}$, где t — время падения маятника. Откуда $a = \frac{2h}{t^2}$. Подставляя это выражение в формулу для момента инерции маятника Максвелла, получаем:

$$\boxed{I = mR_о^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right).} \tag{11}$$

Выясним, какова погрешность измерения момента инерции маятника Максвелла? В выражении (11), как показывают расчёты, $\frac{gt^2}{2h} \gg 1$. Поэтому, пренебрегая единицей, получаем: $I = mR_0^2 \frac{gt^2}{2h}$. Тогда относительная погрешность момента инерции маятника находится по формуле

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta t}{t}, \qquad (12)$$

не учитывая погрешности ускорения свободного падения g. Здесь Δm, ΔR_0,

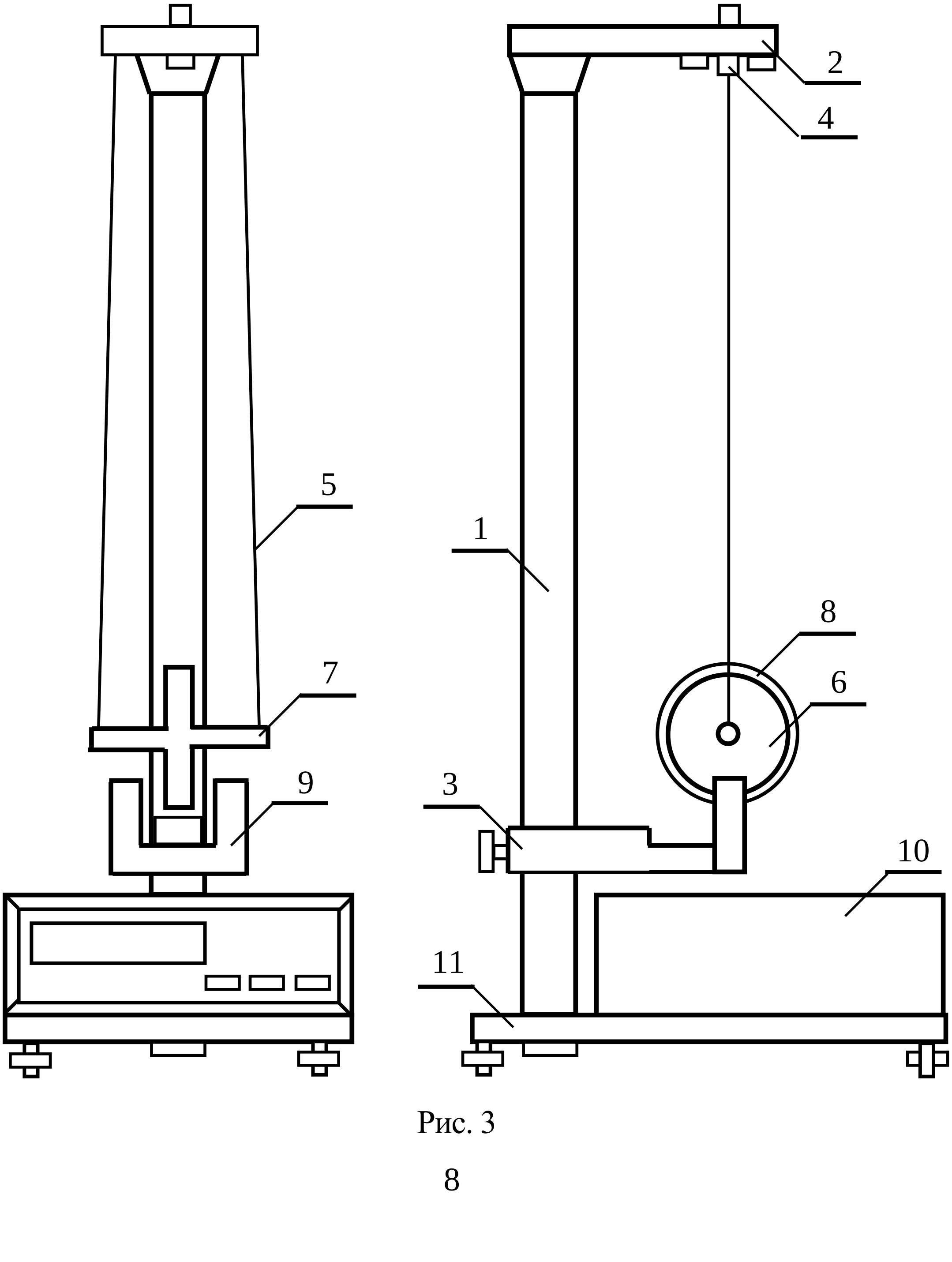

Рис. 3

Δh и Δt — абсолютные погрешности измерения массы, радиуса вала, высоты подъёма маятника и времени падения, соответственно (см. методические указания "Измерения физических величин").

Теоретическое значение момента инерции $I_{теор}$ маятника вычисляется по формуле:

$$I_{теор} = I_о + I_д + I_к, \qquad (13)$$

где $I_о = \frac{1}{2} m_о R_о^2$, $I_д = \frac{m_д}{2}\left(R_1^2 + R_о^2\right)$ и $I_к = \frac{m_к}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$. Здесь $I_о$, $I_д$ и $I_к$ — момент инерции оси и диска маятника и сменного кольца, соответственно; $m_о$, $m_д$ и $m_к$ — масса оси и диска маятника и сменного кольца; $R_о$ — внутренний радиус диска, равный радиусу вала маятника; R_1 — внешний радиус диска маятника и внутренний радиус сменного кольца и R_2 — внешний радиус сменного кольца.

ЗАДАНИЕ

1. Определите момент инерции маятника Максвелла.
2. Подсчитайте погрешность измерения.
3. Рассчитайте теоретическое значение момента инерции маятника Максвелла и сравните его с измеренным значением.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Включите в сеть шнур питания миллисекундомера.
2. Нажмите на кнопку "**СЕТЬ**", расположенную на лицевой панели миллисекундомера. При этом должны загореться лампочка фотодатчика и цифровые индикаторы миллисекундомера.
3. Поднимите маятник, наматывая нить бифилярного подвеса на ось маятника, и прижмите его к сердечнику электромагнита.
4. Нажмите кнопку "**СБРОС**"на миллисекундомере. Убедитесь, что на индикаторах устанавливаются нули.
5. Нажмите на том же приборе кнопку "**ПУСК**". В результате этого электромагнит обесточивается, и маятник приходит в движение.
6. После прохождения маятником нижнего положения снова верните его в первоначальное положение, наматывая нить подвеса на ось маятника.
7. Снимите показание миллисекундомера и запишите его в таблицу.
8. Повторите опыты 5 — 10 раз.
9. Найдите среднее значение времени падения маятника и занесите в таблицу.

10. Подставив это значение времени в формулу (11), найдите момент инерции маятника Максвелла. Масса маятника Максвелла (m = 343 г, высота падения h = 393 мм).
11. По формуле (12) рассчитайте погрешность измерения момента инерции маятника Максвелла, принимая Δm = 1 г, ΔR_0 = 0,1 мм, Δh = 4 мм. Погрешность Δt измерения времени падения маятника определите по формулам прямых измерений (см. методическое указание ″Измерение физических величин″).
12. Рассчитайте теоретическое значение момента инерции маятника Максвелла по формуле (13), беря значения: $m_о$ = 30 г, $m_д$ = 108 г, $m_к$ = 205 г, $R_о$ = 5 мм, R_1 = 45,3 мм, R_2 = 52,4 мм

Таблица

t, c	$t_{ср}$, c	I, кг·м^2	$I_{теор}$, кг·м^2

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте понятие энергии, механической энергии и механической работы.
2. Какие силы называют потенциальными и непотенциальными?
3. Сформулируйте понятия скорости и угловой скорости.
4. Дайте понятие момента инерции тела.
5. Сформулируйте определение кинетической энергии. Как она вычисляется при поступательном и вращательном движении?
6. Дайте понятие потенциальной энергии.
7. Что называют полной механической энергией?
8. Сформулируйте и запишите закон сохранения механической энергии для механической системы, когда в ней действуют потенциальные и диссипативные силы.
9. Сформулируйте и запишите закон сохранения механической энергии для механической системы, когда в ней действуют только потенциальные силы.