КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И ОСНОВ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению контрольных работ по курсу «Сопротивление материалов» для студентов заочной формы обучения специальностей 290300, 290600, 290700, 290800, 291000, 291100, 291500, 060800,

Раздел I

***Казань,* 2007**

Составители: к.ф.-м.н., доцент Низамеев В.Г., к.т.н., доцент Ольховик Л.С., к.ф.-м.н., доцент Богданович А.У.
Под редакцией к.т.н., доцента Л.С.Ольховик

УДК 539.3
ББК 22.251

Методические указания по выполнению контрольных работ по курсу «Сопротивление материалов» для студентов заочной формы обучения / Каз.гос. арх.-строит. университет; Состав.: Низамеев В.Г., Ольховик Л.С., Богданович А.У. Казань, 2007. 34 с.

В методических указаниях изложены: исходные данные, расчетные схемы, постановка задач, перечень этапов работы и примеры их выполнения.

Рецензенты:
Д.ф.-м.н., профессор Р.А.Каюмов

Порядок выполнения контрольных работ по сопротивлению материалов

Контрольные работы №1, №2 выполняются в 5-ом семестре; работы №3, №4 - в 6-ом семестре; работа №5 - в 7-ом семестре.

Контрольные работы состоят из следующих задач:

Работа №1 задачи 1.1-1.3; Работа №2 задачи 2.1-2.3;
Работа №3 задачи 3.1-3.2; Работа №4 задачи 4.1-4.3;
Работа №5 задачи 5.1-5.2.

Исходные данные для каждой задачи (значения действующих сил, геометрические размеры и т.д.) выбираются из таблиц согласно шифра.

Все столбцы таблиц обозначены внизу начальными буквами русского алфавита (А,Б,В,Г,Д,Е). Из каждого столбца берется то значение, которое соответствует данной букве по шифру.

ШИФР - шестизначное число образуется из первых трех букв фамилии студента и последних трех цифр зачетки. Буквенную часть шифра преобразуют в цифровую согласно таблицы.

Шифр один для всех работ. Указывается на титульном листе каждой работы. Работа без шифра не рассматривается!

1	А	Й	У	Э
2	Б	К	Ф	Ю
3	В	Л	Х	Я
4	Г	М	Ц	
5	Д	Н	Ч	
6	Е	О	Ш	
7	Е	П	Щ	
8	Ж	Р	Ъ	
9	З	С	Ы	
0	И	Т	Ь	

Пример

студент Ибрагимов
зачетка 11-01-105
ИБР 028
Шифр 028105

Каждой цифре шифра ставится в соответствие буква русского алфавита.

0 2 8 1 0 5
А Б В Г Д Е

В таблицах, приведенных для каждой работы, из столбца ***А*** необходимо взять число, стоящее в десятой строке (0), из столбца ***Б*** - число, стоящее во второй строке (2), из столбца ***В***- число, стоящее в восьмой строке (8) и т.д.

Работы оформляются в отдельной тетради с полями для замечаний рецензента. Обязательно условие задачи с числовыми данными и расчетной схемой. Решение задачи должно сопровождаться краткими пояснениями. В окончательных результатах необходимо указывать единицы измерения всех величин. Вычисления вести в системе СИ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

ЗАДАЧА 1.1 Стальная колонна ($E = 2{\cdot}10^4$ кН/см^2*)* находится под действием продольной силы *P* и собственного веса ($\gamma = 78$ кН/м^3). Требуется: 1) построить эпюры усилий и напряжений; 2) определить опасное сечение и проверить прочность колонны при $[\sigma]=16$ кН/см^2 (вопросы устойчивости не рассматриваются); 3) определить перемещение верхнего среза колонны (собственный вес колонны не учитывать). Данные взять из табл. 1 согласно рис.1.1.

ЗАДАЧА 1.2. Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стальным стержням при помощи шарниров (рис. 1.2). Требуется: 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу *Q*; 2) из условия прочности найти допускаемую нагрузку $[Q]$ ($[\sigma]=16$ кН/см^2); 3) Найти предельную грузоподъемность системы Q_T и допускаемую нагрузку$[Q]_T$, если предел текучести σ_T=24 кН/см^2 и запас прочности к = 1,5; 4) сравнить величины $[Q]$ и $[Q]_T$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям (п. 2) и допускаемым нагрузкам (п. 3). Данные взять из табл.1.

ЗАДАЧА 1.3. К стальному валу приложены четыре момента (рис. 1.3). Требуется: 1) построить эпюру крутящих моментов; 2)при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего, равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм; 3) построить эпюру углов закручивания ($G = 8{\cdot}10^3$ кН/см^2); 4) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины вала). Данные взять из таблицы 1.

Таблица 1

Номер строки	Схема по рис. 1.1, 1.2, 1.3	A, см^2	a, м	b, м	c, м	P, кН	Моменты в кНм M_1	M_2	M_3	кНм M_4	[τ], МПа
1	I	11	2,1	2,1	1,1	11	1,0	0,5	5,5	5,0	35
2	II	12	2,2	2,2	1,2	12	1,5	1,0	5,0	4,5	40
3	III	13	2,3	2,3	1,3	13	2,0	1,5	4,5	4,0	45
4	IV	14	2,4	2,4	1,4	14	2,5	2,0	4,0	3,5	50
5	V	15	2,5	2,5	1,5	15	3,0	2,5	3,5	3,0	55
6	VI	16	2,6	2,6	1,6	16	3,5	3,0	3,0	2,5	60
7	VII	17	2,7	2,7	1,7	17	4,0	3,5	2,5	2,0	65
8	VIII	18	2,8	2,8	1,8	18	4,5	4,0	2,0	1,5	70
9	IX	19	2,9	2,9	1,9	19	5,0	4,5	1,5	1,0	75
0	X	20	3,0	3,0	2,0	20	5,5	5,0	1,0	0,5	80
	Е	*Д*	*Г*	*В*	*Б*	*А*	*Е*	*Д*	*Г*	*В*	*Б*

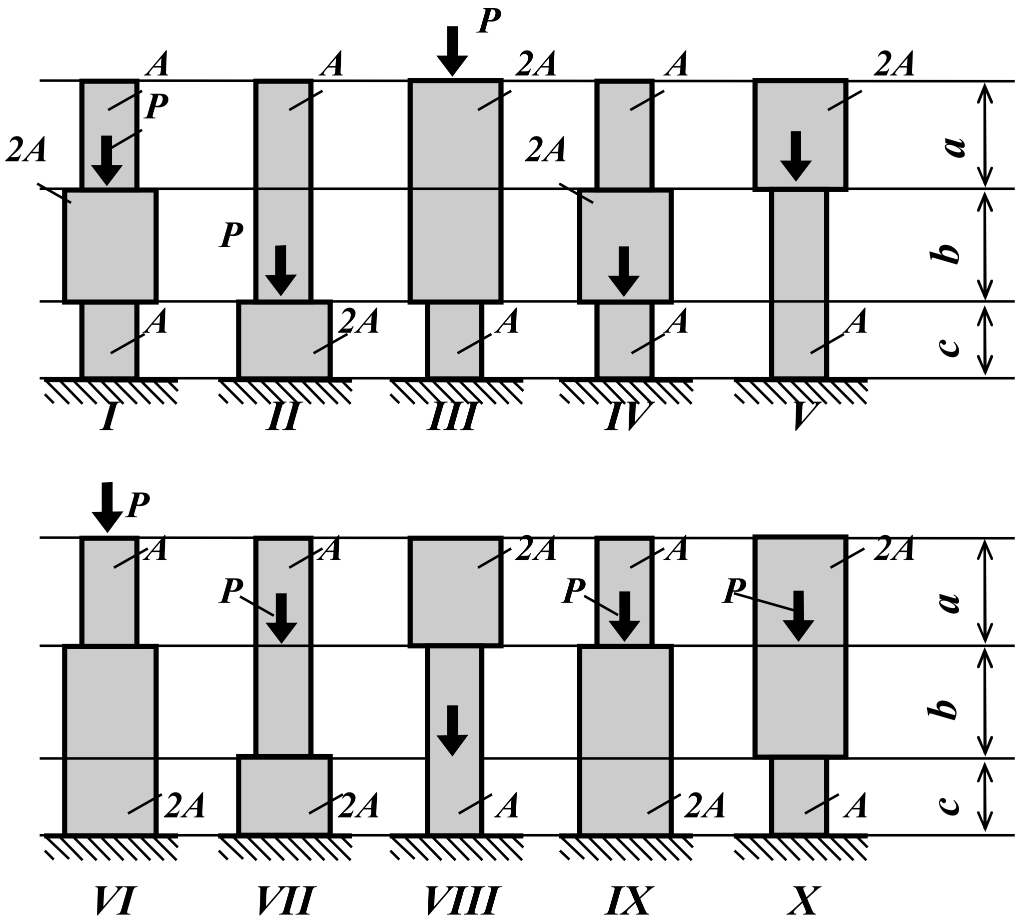


Рис.1.1

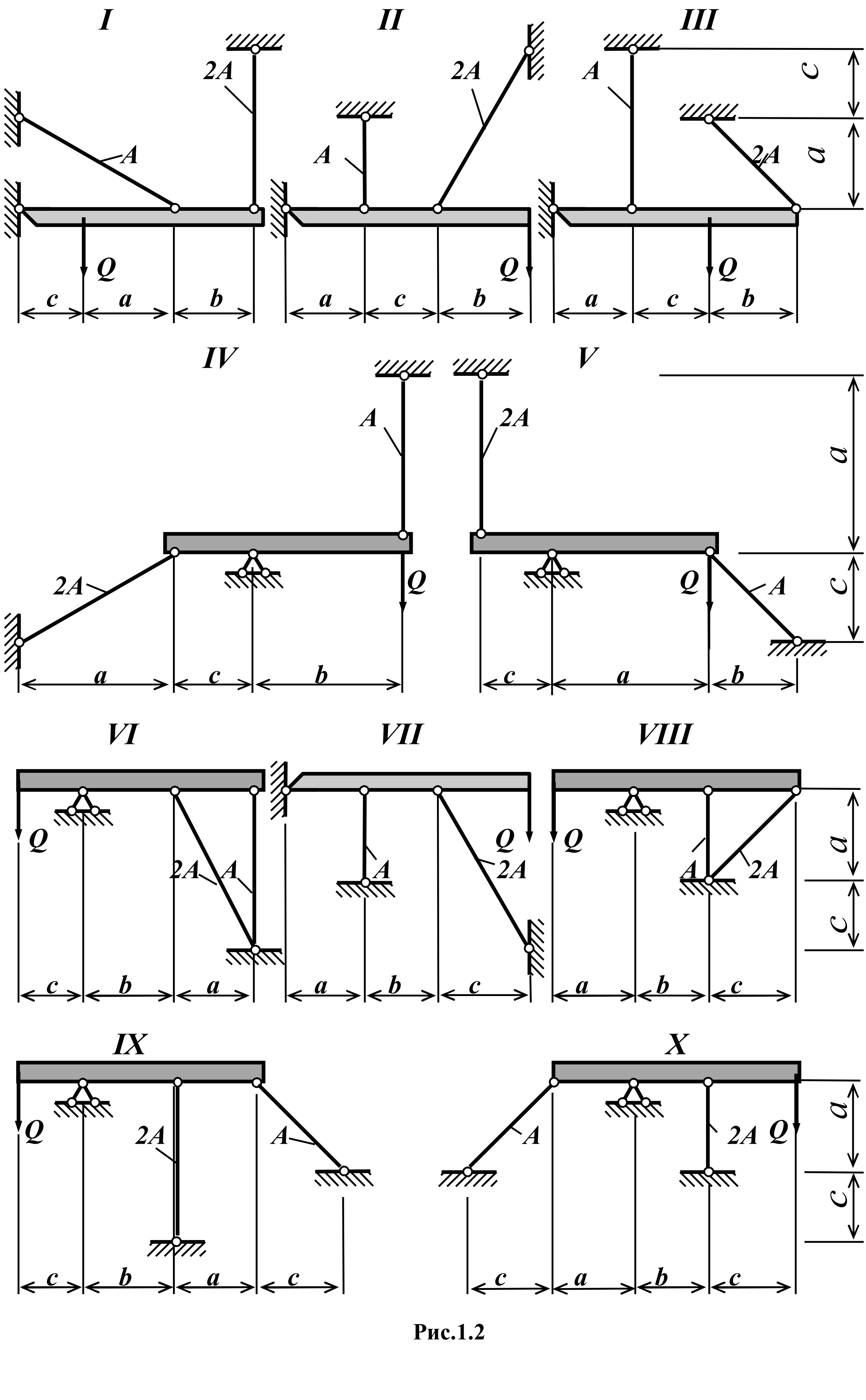

I
A
2A
Q
c a b
II
A
2A
Q
a c b
III
A
2A
Q
a c b
c
a
IV
A
2A
Q
a c b
V
2A
A
Q
c a b
a
c
VI
Q
2A
A
c b a
VII
A
Q
2A
a b c
VIII
Q
A
2A
a b c
a
c
IX
Q
2A
A
c b a c
X
A
2A
Q
c a b c
a
c

Рис.1.2

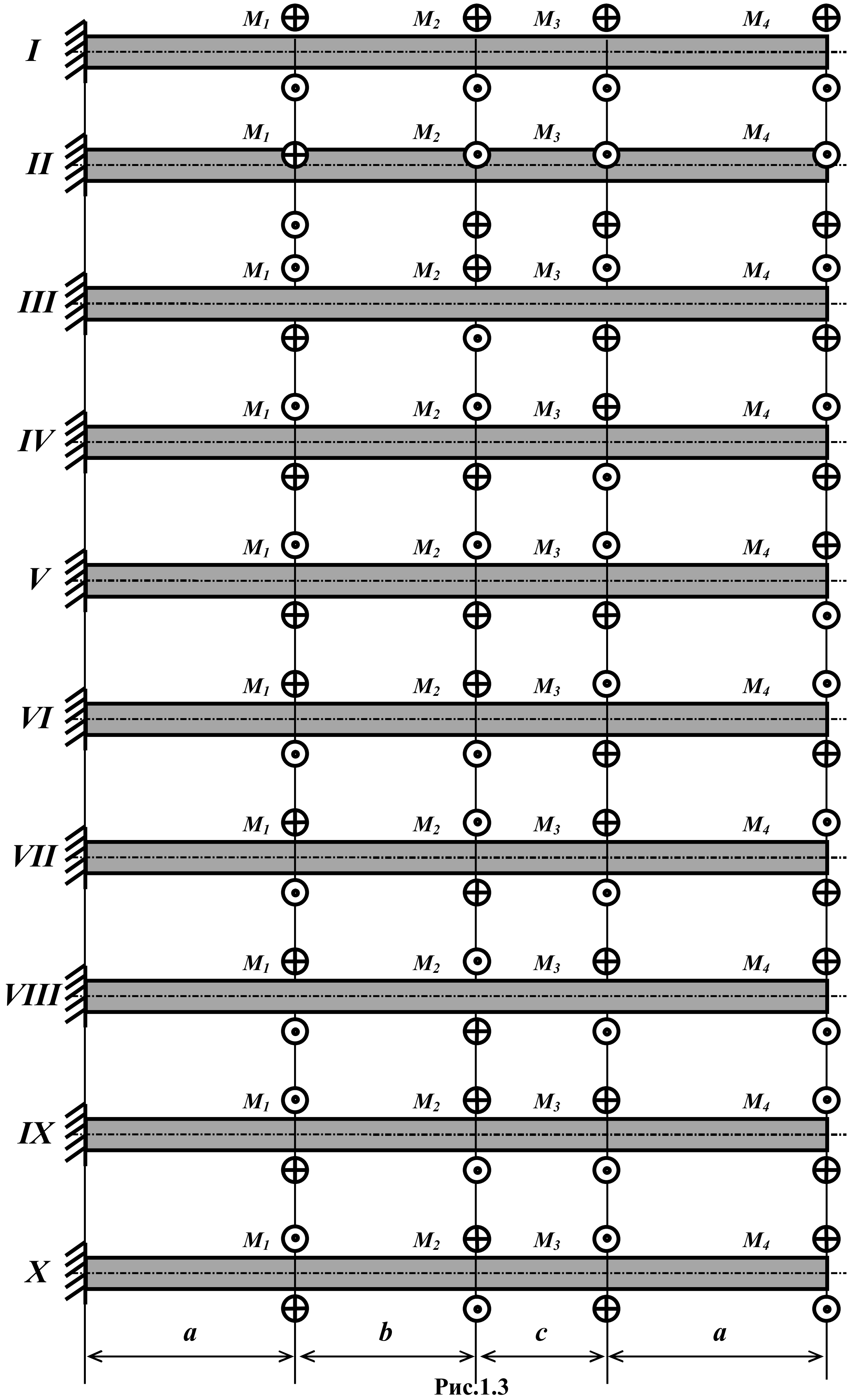


Рис.1.3

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

ЗАДАЧА 2.1 Для заданного поперечного сечения (рис. 2.1, табл.2) требуется: 1) определить положение главных центральных осей инерции и вычислить соответствующие осевые моменты инерции; 2) построить эллипс инерции и определить направления наибольшей и наименьшей жесткости на изгиб.

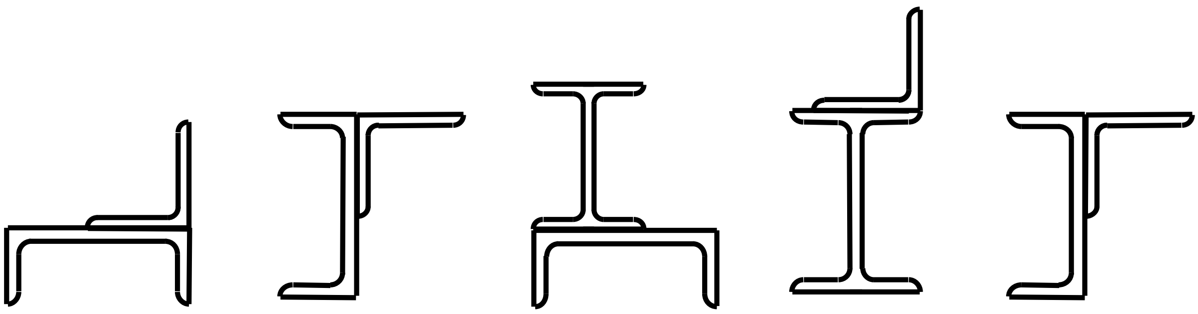
При расчетах использовать таблицы сортамента (части стандартных профилей прямоугольниками не заменять). Сечение и эллипс вычертить в масштабе 1:2. Указать начальные, промежуточные и главные центральные оси.

ЗАДАЧА 2.2 Для заданной схемы балки (рис.2.2) требуется: написать выражения перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_x для каждого участка в общем виде, построить их эпюры, установить расчетные значения внутренних силовых факторов (Q_y^{max}, M_x^{max}) и подобрать деревянную балку при $[\sigma]$ = 0,8 кН/см^2, $[\tau]$ = 0,4 кН/см^2: а) круглого поперечного сечения; б) прямоугольного поперечного сечения при заданном соотношении h/b=2. Данные взять из табл.2

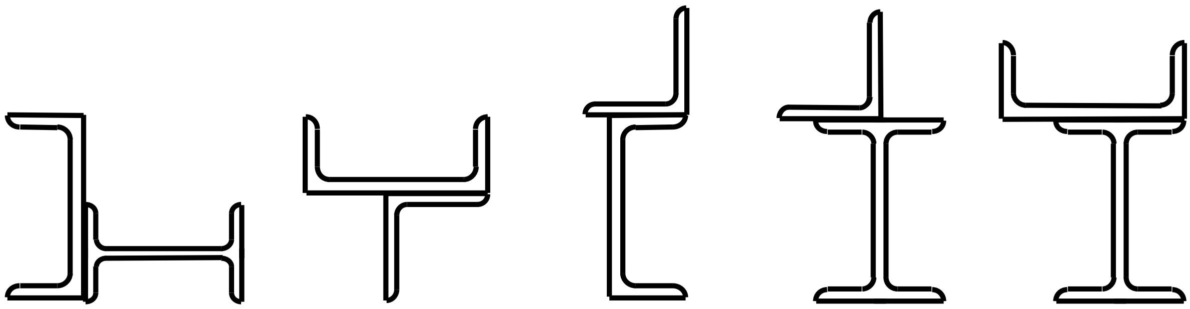
ЗАДАЧА 2.3 Для заданной схемы балки (рис. 2.3) требуется: 1) написать выражения перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_x для каждого участка в общем виде, построить их эпюры, установить расчетные значения внутренних силовых факторов (Q_y^{max}, M_x^{max}) и подобрать стальную балку стандартного двутаврового профиля при $[\sigma]$=16 кН/см^2, $[\tau]$=8 кН/см^2; 2) записать дифференциальные уравнения изогнутой оси балки для всех ее участков, выполнить интегрирование и построить эпюры углов поворота сечений и прогибов балки; 3) Проверить балку на жесткость по максимальному прогибу при $[f]=l/150$, E=$2\cdot 10^4$ кН/см^2, где l длина балки. Данные взять из таблицы 2 .

Таблица 2

Номер строки	Схема по рис. 2.1, 2.2, 2.3	*q* *кН/м*	*P* *кН*	*M* *кНм*	*a* *м*	*b* *м*	*c* *м*	*l* *м*	α	швеллер №	двутавр №	уголок №
1	I	10	10	55	1,0	2,0	0,6	4	0,2	20	18	75x75x5
2	II	15	15	50	1,2	1,8	0,8	5	0,3	24	24	75x75x8
3	III	20	20	45	1,4	1,6	1,0	6	0,4	18	14	80x80x6
4	IV	25	25	40	1,6	1,4	1,2	7	0,5	14	20	80x80x8
5	V	5	30	35	1,8	1,2	1,4	3	0,6	30	22	90x90x7
6	VI	10	35	30	2,0	1,0	1,6	4	0,6	27	16	90x90x9
7	VII	15	40	25	2,2	0,8	1,8	5	0,5	16	27	100x100x8
8	VIII	20	45	20	2,4	0,6	2,0	6	0,4	22	24а	100x100x10
9	IX	25	50	15	2,6	2,0	0,6	7	0,3	33	27а	125x125x9
0	X	5	55	10	2,8	1,8	0,8	3	0,2	18	30	125x125x12
	Е	***Д***	***Г***	***В***	***Б***	***А***	***Е***	***Д***	***Г***	***В***	***Б***	***А***



I ***II*** ***III*** ***IV*** ***V***



VI ***VII*** ***VIII*** ***IX*** ***X***

Рис. 2.1

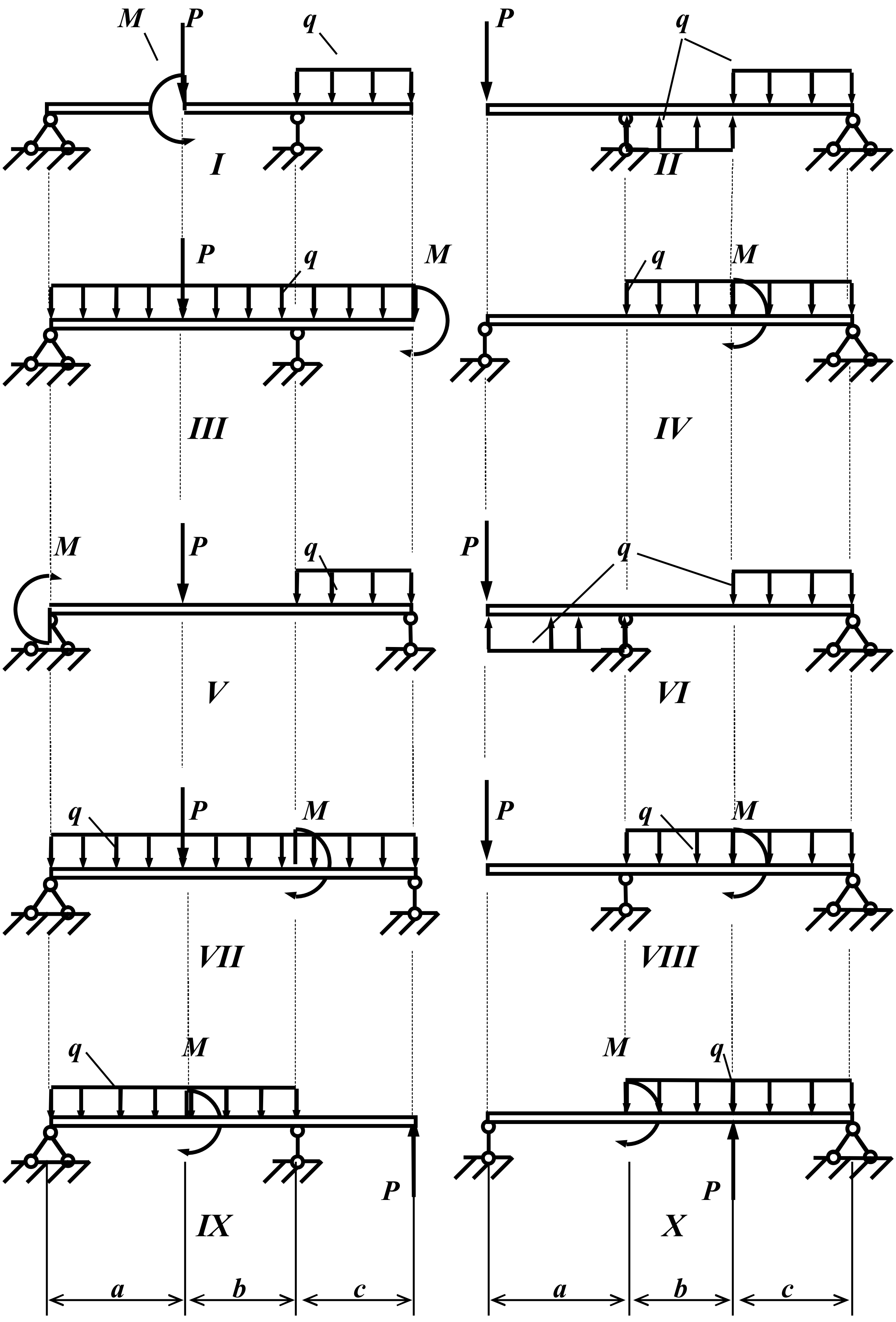

M
P
q
I
P
q
II
P
q
M
III
q
M
IV
M
P
q
V
P
q
VI
q
P
M
VII
P
q
M
VIII
q
M
P
IX
M
q
P
X
a
b
c
a
b
c

Рис. 2.2

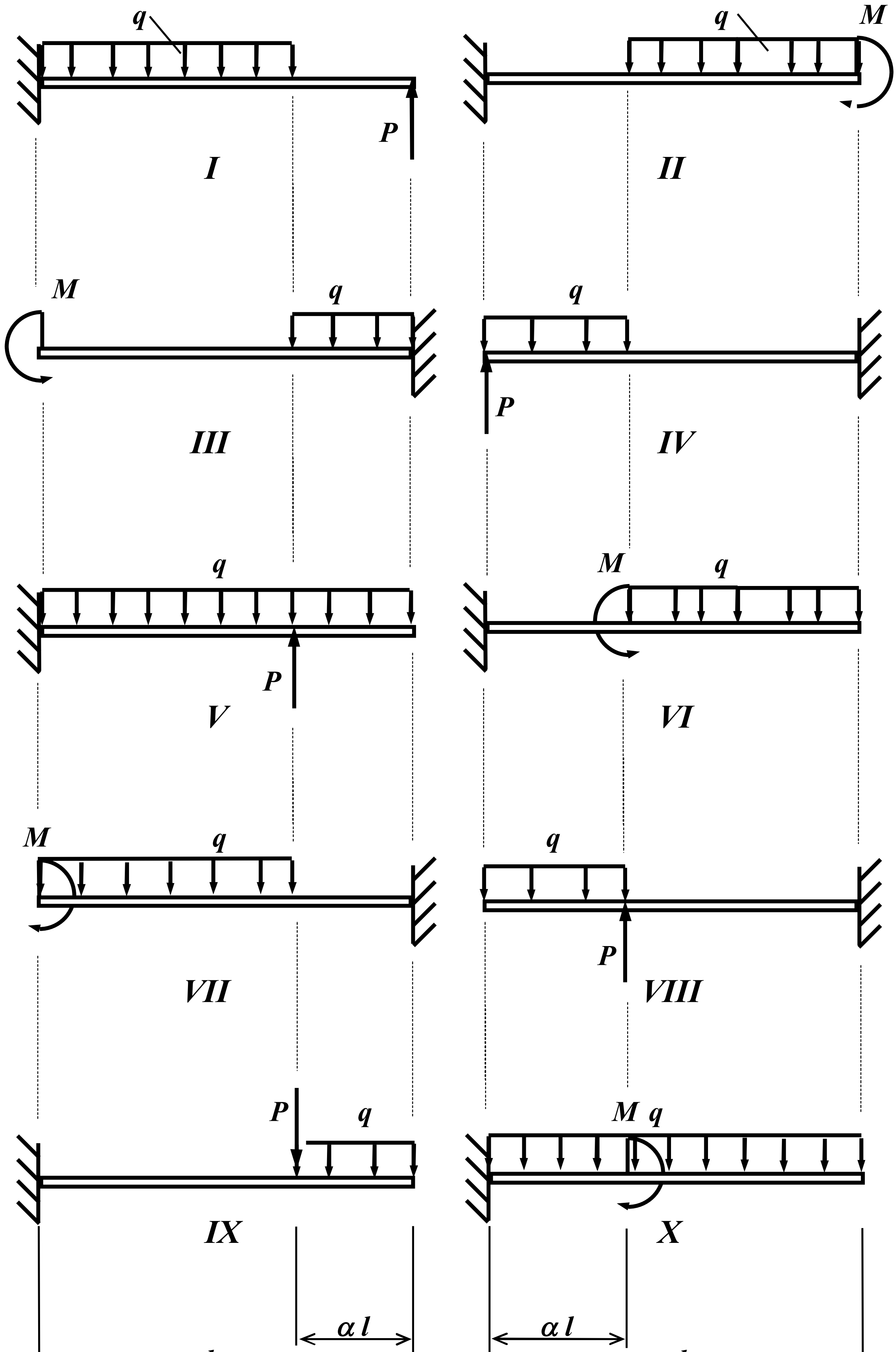


Рис. 2.3

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1
ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 1.1

Стальная колонна ($E = 2\cdot10^4$ кН/см^2) находится под действием продольной силы $P = 20$ кН и собственного веса ($\gamma = 78$ кН/м^3).

Требуется:

1. Построить эпюры продольных усилий и нормальных напряжений.
2. Определить опасное сечение и проверить прочность колонны при $[\sigma] = 16$ кН/ см^2.
3. Определить перемещение верхнего среза колонны без учета собственного веса.

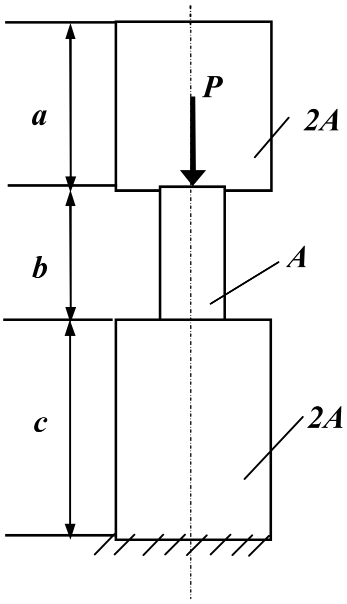


Рис.1

Исходные данные:
A=10 см^2 ;
a=2 м;
b=1м;
c=3м;
P=20 кН.

РЕШЕНИЕ

Расчетная схема колонны (Рис.2) - ступенчатый брус, загруженный заданной сосредоточенной силой P и распределенной нагрузкой q_1, q_2, q_3 от собственного веса, где

$$q_1 = \gamma A_1 = \gamma 2A = 78\cdot20\cdot10^{-4} = 0.156 \text{ кН/м};$$
$$q_2 = \gamma A_2 = \gamma A = 78\cdot10\cdot10^{-4} = 0.078 \text{ кН/м};$$
$$q_3 = \gamma A_3 = \gamma 2A = 78\cdot20\cdot10^{-4} = 0.156 \text{ кН/м}.$$

R - опорная реакция.

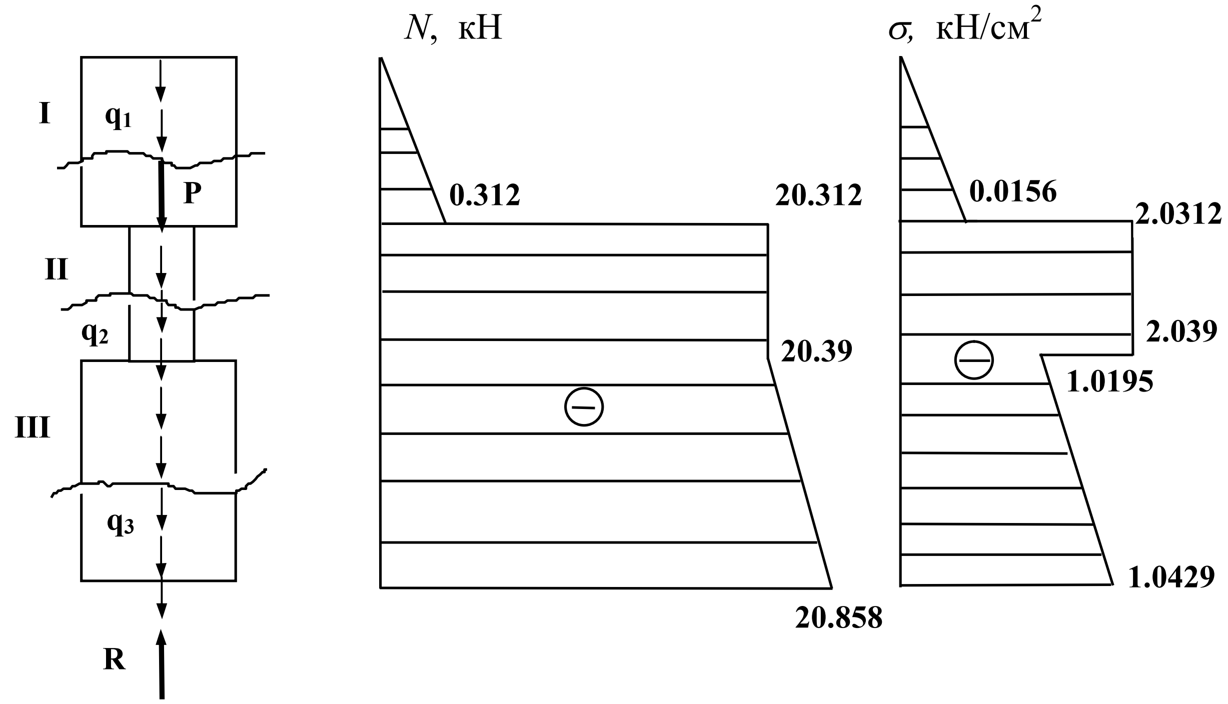
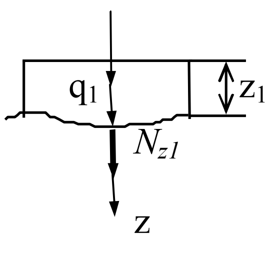


Рис. 2

Разбиваем стержень на участки, начиная с верхнего свободного конца. Границами участков служат сечения в которых приложены внешние силы или же изменяется площадь поперечного сечения. В данном случае имеем три участка, площади поперечного сечения которых: $A_1=2A=20$ см^2, $A_2=A=10$см^2, $A_3=2A=20$см^2. Ось z направляем вдоль оси стержня от верхнего среза колонны. Для каждого участка находим внутренние продольные силы N_Z методом сечений из условия равновесия отсеченной верхней части (при этом отпадает необходимость в определении реакции заделки R). Нормальные напряжения $\sigma_z.=N_z\ /\ A$



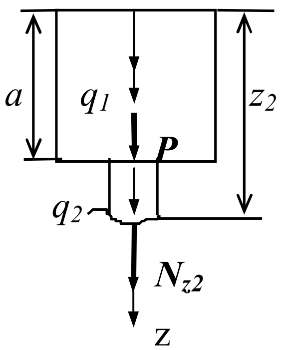
<u>1-ый участок</u> $0\ \le z_1 \le\ a$

$$0 \le z_1 \le 2$$

$$\sum z = 0 \quad N_{z1} + q_1 z_1 = 0$$

$$N_{z1} = -q_1 z_1 = -0.156\ z_1$$

$$\sigma_{z1} = \frac{N_{z1}}{A_1} = \frac{-0{,}156\, z_1}{20}\ \text{кН/см}^2$$



<u>2 -ой участок</u> $a\ \le z_2 \le a+b$

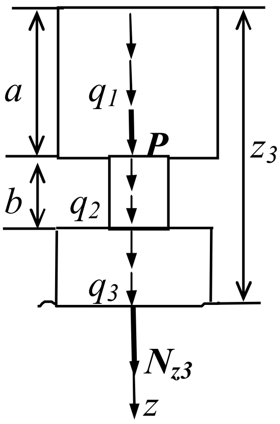
$$2\ \le\ z_2 \le 3$$

$$\sum z = 0 \quad N_{z2} + q_1 a + P + q_2(z_2 - a) = 0$$

$$N_{z2} = -q_1 a - P - q_2(z_2 - a)$$

$$N_{z2} = -0.156\cdot 2 - 20 - 0.078(z_2 - 2)$$

$$\sigma_{z2} = N_{z2}\ /\ A_2\,\text{кН/см}^2$$



3 -ий участок $a+b \le z_3 \le a+b+c$

$3 \le z_3 \le 6$

$$\sum z = 0 \quad N_{z3} + q_1 a + P + q_2 b + q_3 (z_3 - (a+b)) = 0$$

$$N_{z3} = -q_1 a - P - q_2 b - q_3 (z_3 - (a+b))$$

$$N_{z3} = -0.156 \cdot 2 - 20 - 0.078 \cdot 1 - 0.156(z_3 - 3)$$

$$\sigma_{z3} = \frac{N_{z3}}{A_3} \text{ кН/см}^2$$

Зависимости N_Z и σ_Z линейно зависят от z. Для построения эпюр достаточно вычислить их значения на границах участков. Эпюры N_Z и σ_Z строим рядом с расчетной схемой (рис. 2). Ось абсцисс графиков проводим параллельно оси бруса. По оси ординат откладываем в выбранном масштабе значение продольной силы N_Z или нормального напряжения σ_Z соответственно. Указываем знак. Штриховка должна быть перпендикулярна оси.

2. По эпюре нормальных напряжений σ_Z определяем опасное сечение. Опасное сечение - сечение в котором $\sigma_z = |\sigma_z^{\max}|$. $|\sigma_z^{\max}| = 2.039$ кН/см^2. В опасном сечении записываем условие прочности при растяжении-сжатии:

$$\sigma_z^{\max} = \frac{|N_z|}{A} \le [\sigma], \qquad E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$$

$\sigma_z^{\max}=2.039$ кН/см$^2 < 16$ кН/см^2. Условие прочности выполняется.

3. Результаты расчета показывают, что собственный вес колонны мал по сравнению с приложенной нагрузкой Р. Поэтому при определении перемещения Δl верхнего среза стальной колонны собственный вес не учитываем. По закону Гука для растяжения-сжатия:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Определяем Δ l как сумму удлинений (укорочений) отдельных участков.

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_{z1} \cdot a}{EA_1} + \frac{N_{z2} \cdot b}{EA_2} + \frac{N_{z3} \cdot c}{EA_3}$$

Без учета собственного веса ($q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$)

$$N_{z1} = 0, N_{z2} = -P, N_{z3} = -P \ \ (P = 20 \text{ кН})$$

$$\Delta \mathrm{l} = 0 - \frac{20 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} - \frac{20 \cdot 300}{2 \cdot 10^4 \cdot 20} = -0{,}025 \text{ см}$$

Отрицательное значение Δl показывает, что колонна укоротилась.

ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 1.2

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стальным стержням при помощи шарниров.

Требуется:

1. Найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q.

2. Используя метод расчета по допускаемым напряжениям найти допускаемую нагрузку $[Q]$.

3. Найти предельную грузоподъемность системы $Q_т$ и допускаемую нагрузку $[Q]_т$ путем расчета по предельному состоянию. Запас прочности $к = 1.5$.

4. Сравнить величины $[Q]$ и $[Q]_т$.

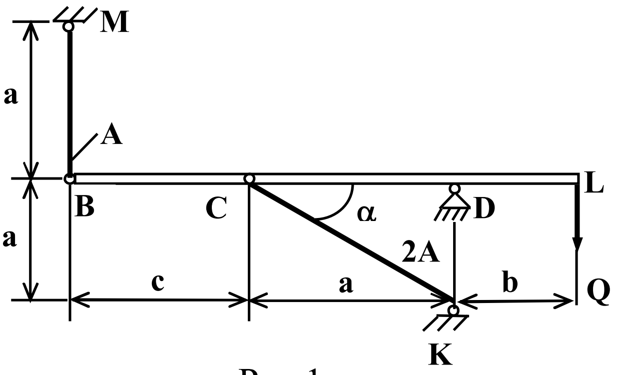


Рис.1

a = 40 см, b = 20 см, c= 30 см
A - площадь поперечного сечения стержня BM
$2A$ - площадь поперечного сечения стержня CK
A = 10 см^2, $\sigma_т$ = 24 кН/см^2
$[\sigma]$ = 16 кН/см^2

РЕШЕНИЕ

1. Определяем необходимые геометрические параметры (длины стержней ВМ и СК, α - угол наклона стержня СК).

$$l_1 = BM = 40 \text{ см}$$

$$l_2 = CK = \sqrt{CD^2 + DK^2} = \sqrt{40^2 + 40^2} = 56.569 \text{ см}$$

$$\sin\alpha = DK / CK = 40 / 56.569 = 0.707, \quad \cos\alpha = CD/CK = 0{,}707$$

2. Строим силовую схему (рис. 2). Указываем направление опорных реакций R_D и H_D, внутренних усилий в стержнях N_1 и N_2. Неизвестные усилия N_1 и N_2 считаем растягивающими.

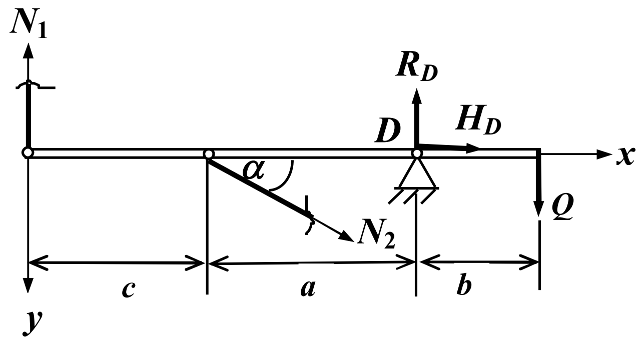


Рис.2

3. Определяем степень статической неопределимости $\boldsymbol{m} = 4 - 3 = 1$

Здесь 4 – число неизвестных (R_D, H_D, N_1, N_2)

3 – число уравнений статики.

4. Записываем уравнения статики

$$\Sigma x = 0 \quad H_D + N_2 \cos\alpha = 0;$$
$$\Sigma y = 0 \quad -N_1 - R_D + N_2 \sin\alpha + Q = 0\ ;$$
$$\Sigma M_D = 0 \quad -N_1\, 70 + N_2\, 40 \sin\alpha - Q20 = 0.$$

В данной задаче не требуется отыскивать опорные реакции R_D и H_D, поэтому из трех уравнений статики используем одно:

$$\Sigma M_D = 0 \quad - N_1\, 70 + N_2\, 40\ \sin\alpha - Q\ 20 = 0 \qquad (1)$$

Из одного уравнения (1) невозможно определить два неизвестных усилия N_1 и N_2.

Задача один раз статически неопределима.

5. Составляем условие совместности деформаций.

Используя предположение о малости деформаций, строим деформированную схему конструкции (рис. 3). Абсолютно жесткий брус BL под действием приложенной нагрузки Q поворачивается на малый угол вокруг опоры (т.D), оставаясь прямолинейным. При этом первый стержень сжимается на величину Δl_1 (т. B переходит в т. B_1), а второй стержень растягивается на величину Δl_2 (т.C переходит в C_1).

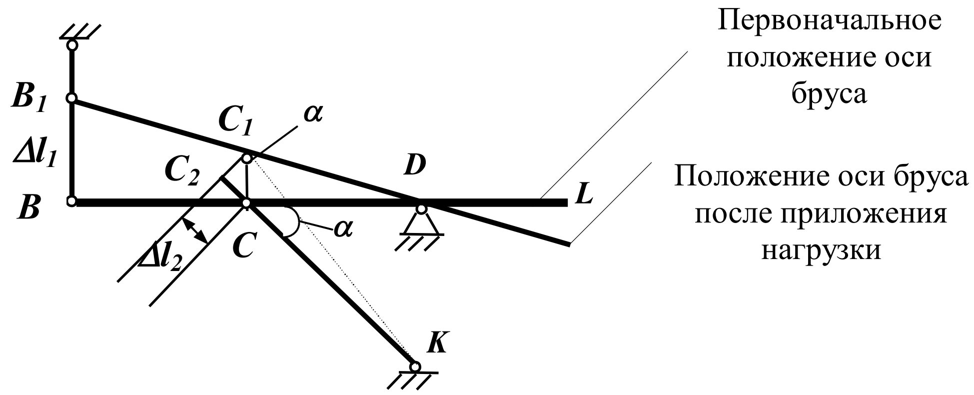


Рис. 3

Здесь $BB_1 \perp BD$, $CC_1 \perp CD$, $\Delta l_1 = BB_1$, $\Delta l_2 = CC_2$

Чтобы получить т. C_2 из т. C_1 опускаем перпендикуляр на первоначальное направление стержня CK.

Из подобия треугольников $\Delta\, BB_1D$ и $\Delta\, CC_1D$ следует:

$$\frac{BB_1}{BD} = \frac{CC_1}{CD} \qquad \text{или} \qquad \frac{-\Delta l_1}{70} = \frac{\Delta l_2}{40\sin\alpha}$$

Здесь $CC_1 = \Delta l_2 / \sin\alpha$ из $\Delta\, CC_1C_2$. Знак минус показывает, что первый стержень укорачивается. Итак получили условие совместности деформаций:

$$\frac{-\Delta l_1}{70} = \frac{\Delta l_2}{40\sin\alpha} \quad \text{или} \quad \Delta l_1 = \frac{-7\Delta l_2}{4\sin\alpha} \qquad (2)$$

6. Используя закон Гука, из уравнений (1) и (2) определяем усилие и напряжения. Согласно закону Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}$$

По условию задачи $A_2 = 2\,A_1$

Подставляя в (2), получим $N_1 = -1{,}750\,N_2$ (3)

Решаем совместно систему уравнений (1), (3). Получаем:

$-(-1.750\,N_2)\,70 + N_2\,40\ \ 0.707 - Q\,20 = 0$. Откуда

$N_2 = 0{,}133\ Q$ (растяжение)

$N_1 = -\,1{,}750\ N_2 = -\,0.233\ Q$ (сжатие)

Определяем напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-0{,}233Q}{10} = -0{,}0233Q$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0{,}133Q}{20} = 0{,}0067Q$$

где $A_1 = A = 10$ см^2 $A_2 = 2\,A = 20$ см^2

7. Определяем допускаемую нагрузку [Q].

Приравнивая максимальное напряжение по модулю $|\sigma_1|$ допускаемому $[\sigma]$, получаем допускаемую нагрузку $[Q]$:

$|\sigma_1| = 0.0233\,[Q] = 16$ кН/см^2 $\Rightarrow [Q] = 16 / 0.0233 = 689.655$ кН.

8. Вычисляем предельную грузоподъемность $Q_Т$.

Считаем $\sigma_1 = \sigma_Т$, $\sigma_2 = \sigma_Т$. Тогда $N_1^Т = -\sigma_Т A_1 = -24\cdot 10 = 240$ кН, (сжатие)

$$\sigma_т = 24 \text{ кН/см}^2, \qquad N_2^Т = \sigma_Т A_2 = 24\cdot 20 = 480 \text{ кН}.$$

Подставляя $N_1^Т$ и $N_2^Т$ в (1), с учетом истинного направления усилия $N_1^Т$ (сжатия), находим предельное значение $Q_Т$:

$$\mathrm{N}_1^т\,70 + \mathrm{N}_2^т\,40\sin\alpha = Q_т\,20$$

$$\mathrm{Q}_т = \frac{240\cdot 70 + 480\cdot 40\cdot 0{,}707}{20} = 1518{,}72 \text{ кН}$$

Допускаемое значение $[Q]_т$ по предельному состоянию

$$[Q]_т = \frac{Q_т}{\mathrm{k}} = \frac{1518{,}72}{1{,}5} = 1012{,}48 \text{кН}$$

9. Сравнивая величины $[Q] = 689{,}655$ кН и $[Q]_Т = 1012.48$ кН, видим, что расчет по предельному состоянию позволяет расширить диапазон допускаемых нагрузок

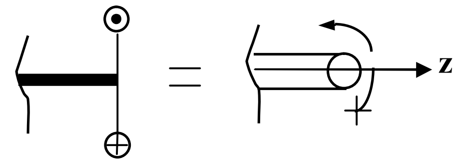
$$\frac{[Q]_Т}{[Q]} = \frac{1012{,}48}{689{,}655} = 1{,}47\,.$$

ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 1.3.

Круглый стальной вал сплошного сечения жестко закрепленный одним концом, находится под действием четырех внешних скручивающих моментов M_1=3,5 кН·м, M_2=5 кН·м, M_3=4 кН·м, M_4=2,5 кН·м (рис.1).
Требуется :

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить диаметр вала из расчета на прочность [τ]=6 кН/см^2.
3. Построить эпюру углов закручивания G = 8×10^3 кН/см^2
4. Найти наибольший относительный угол закручивания на 1 м длины.

***Примечание:** На рис.1.3 использовано плоское изображение крутящих моментов:



⦿ - означает начало стрелки (“на нас”); ⊕ - конец стрелки (“от нас”).

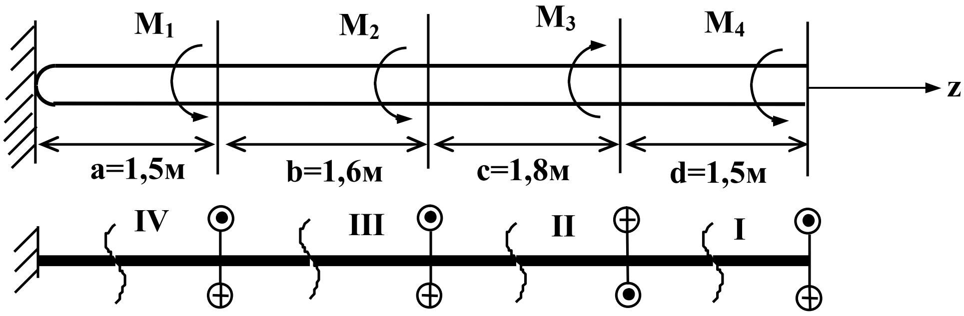


Рис. 1

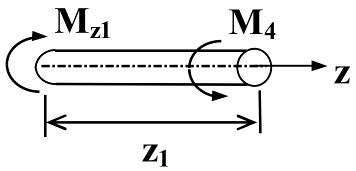
РЕШЕНИЕ

1. Построение эпюры крутящих моментов.

Для определения крутящего момента в сечении пользуемся методом сечений. Разбиваем вал на участки, начиная со свободного конца. Границами участков служат точки приложения внешних крутящих моментов.

Для данного вала получаем 4 участка. Для каждого из участков рассматриваем равновесие отсеченной правой части. Крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих по одну сторону от сечения. Для правой отсеченной части M_z направлен по часовой стрелке, если смотреть с положительного направления оси z.

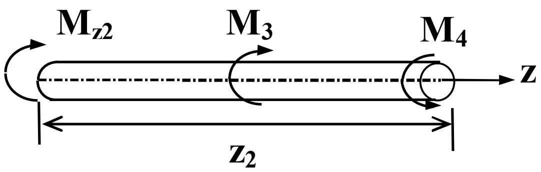
1 участок: $0 \le z_1 \le 1{,}5$ м



$\sum M_Z = 0 \quad -M_{Z1} + M_4 = 0$

$M_{Z1} = M_4 = 2{,}5$ кН·м

2 участок: $1{,}5 \le z_2 \le 3{,}3$ м



$\sum M_Z = 0 \quad -M_{Z2} - M_3 + M_4 = 0$

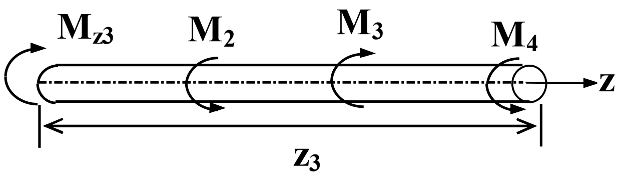
$M_{Z2} = M_4 - M_3 = 2{,}5 - 4 = -1{,}5$ кН·м

3 участок: $3{,}3 \le z_3 \le 4{,}9$ м

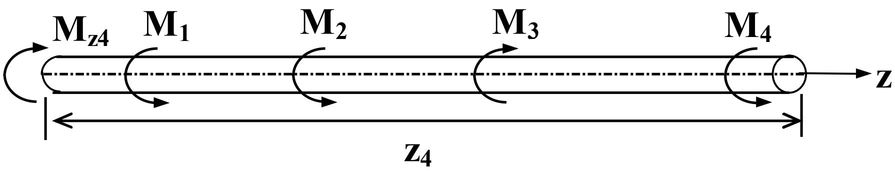
$\sum M_Z = 0 \quad -M_{Z3} + M_2 - M_3 + M_4 = 0$

$M_{Z3} = M_4 - M_3 + M_2 =$

$= 2{,}5 - 4 + 5 = 3{,}5$ кН·м



4 участок: $4{,}9 \le z_4 \le 6{,}4$ м



$\sum M_Z = 0 \quad -M_{Z4} + M_1 + M_2 - M_3 + M_4 = 0$

$M_{Z4} = M_4 - M_3 + M_2 + M_1 = 2{,}5 - 4 + 5 + 3{,}5 = 7$ кН·м

Эпюры крутящих моментов показаны на рис.2

Опасное сечение – сечение в котором крутящий момент принимает максимальное значение $M_{Zmax} = 7$ кН·м – все точки 4 -го участка.

2. Подбор диаметра вала

По наибольшему моменту M_{Zmax} из условия прочности при кручении подбираем диаметр вала:

$$\tau_{max} = \frac{|M_{z\,max}|}{W_\rho} \le [\tau]$$

Полярный момент сопротивления для круглого сечения $W_\rho = \pi D^3 / 16$;

$M_{Zmax} = 7$ кН·м $=700$ кН·см.

Отсюда

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{z\max}}{\pi\,[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 700}{3.14 \cdot 6}} = \sqrt[3]{594{,}48} = 8.4 \text{ см} = 84 \text{ мм}.$$

После округления до стандартного значения получаем D = 90 мм=0.09 м.

3. Вычисляем углы закручивания φ.

Обозначаем буквами A, B, C, D, E границы участков, начиная с заделки (рис.2). Если на участке вала длины l крутящий момент M и жесткость GI_p постоянны, то угол поворота торцевых сечений определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{G \cdot J_\rho}$$

G = 8 · 10^3 кН/см^2 $J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 9^4}{32} = 643{,}8\,\text{см}^4$

Жесткость вала при кручении GI_ρ= 8 ·10^3 · 643,8 = 5,15 10^6 кН см^2

Вычисляем углы закручивания начиная от неподвижного сечения. В заделке $\varphi_A = 0$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 + \frac{M_{AB} l_{AB}}{G \cdot J_\rho} = \frac{700 \cdot 150}{5{,}15 \cdot 10^6} = 0.0204\,(\text{рад})$$

Здесь φ_{AB} угол поворота торцевых сечений на участке AB. $M_{AB} = M_{Z4}$ = 7 кН·м = 700 кН·см, l_{AB}= 1.5м = 150 см (длина участка AB)

Аналогично получаем:

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = \varphi_B + \frac{M_{BC} l_{BC}}{G \cdot J_\rho} = 0{,}0204 + \frac{350 \cdot 160}{5{,}15 \cdot 10^6} = 0.0204 + 0.0109 = 0.0313\ (\text{рад});$$

$$\varphi_D = \varphi_c + \varphi_{CD} = \varphi_c + \frac{M_{CD} \cdot l_{CD}}{G \cdot J_\rho} = 0.0313 - \frac{150 \cdot 180}{5{,}15 \cdot 10^6} = 0.0313 - 0.052 = 0.0261\ (\text{рад});$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{DE} = \varphi_D + \frac{M_{DE} \cdot l_{DE}}{G \cdot J_\rho} = 0.0261 + \frac{250 \cdot 150}{5{,}15 \cdot 10^6} = 0.0261 + 0.0073 = 0.034\ (\text{рад}).$$

Эпюры углов поворота приведены на рис.2.

4. Вычисляем относительные углы закручивания на каждом участке.

$$\theta_{AB} = \frac{\varphi_{AB}}{l_{AB}} = \frac{0.0204}{1.5} = 0.0136\,(\text{м}^{-1});$$

$$\theta_{BC} = \frac{\varphi_{BC}}{l_{BC}} = \frac{0.0109}{1.6} = 0.0068\,(\text{м}^{-1});$$

$$\theta_{CD} = \frac{\varphi_{CD}}{l_{CD}} = \frac{0.0052}{1.8} = -0.0029\ (\text{м}^{-1});$$

$$\theta_{\mathrm{DE}} = \frac{\varphi_{\mathrm{DE}}}{l_{DE}} = \frac{0.0073}{1.5} = 0.00487\,(\text{м}^{-1}).$$

Наибольший угол закручивания на 1 метр длины $\theta_{max} = \theta_{AB} = 0.0136$ (м^{-1}).

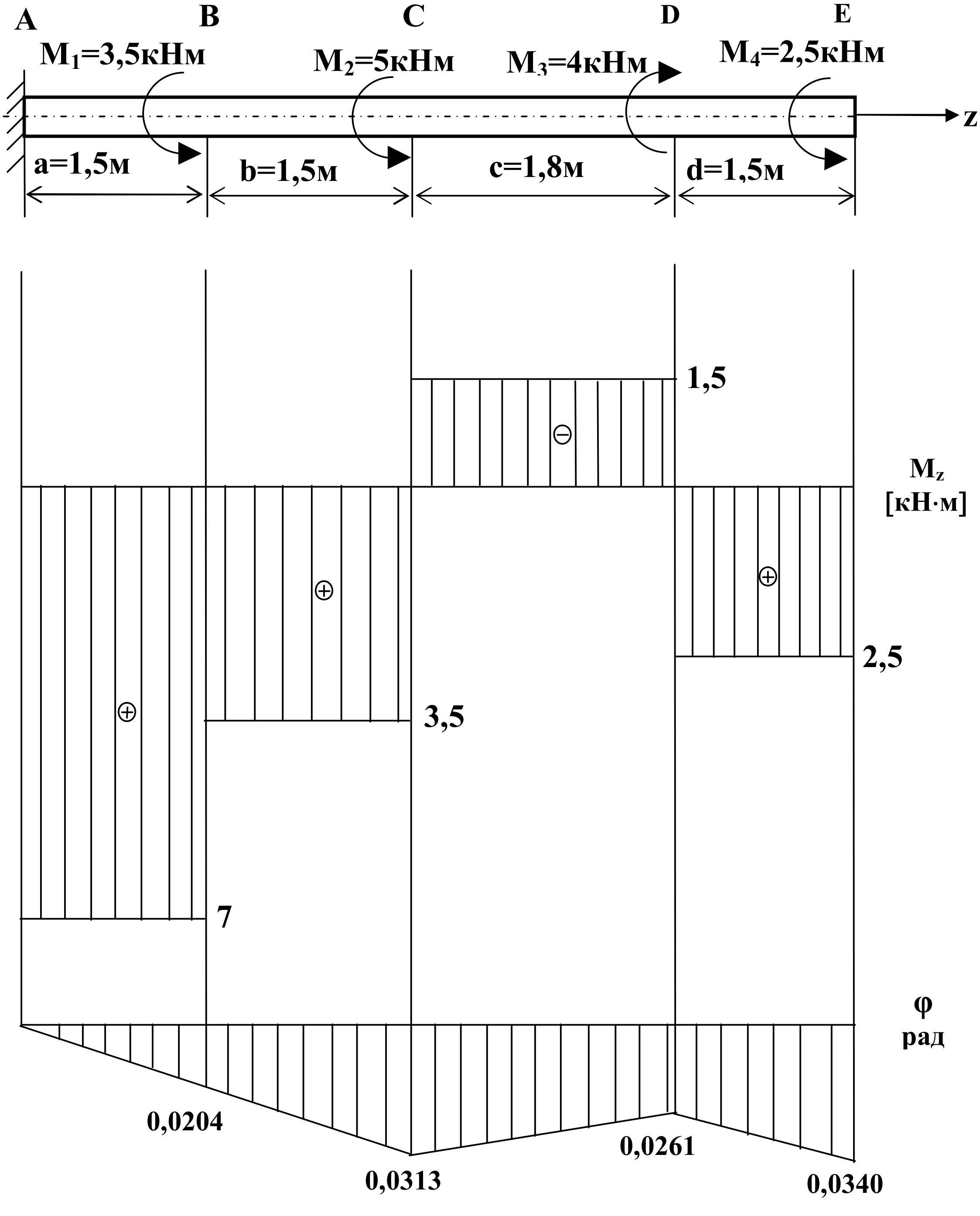


Рис. 2.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 2.1.

Для заданного поперечного сечения состоящего из швеллера №12 и двутавра №18 требуется:

1. Определить положение главных центральных осей инерции и вычислить соответствующие осевые моменты инерции.

2. Построить эллипс инерции и определить направления наибольшей и наименьшей жесткости балки на изгиб.

При расчетах использовать таблицы сортамента (части стандартных профилей прямоугольниками не заменять). Сечение и эллипс вычертить в масштабе 2:1, изобразить начальные, промежуточные и главные центральные оси.

РЕШЕНИЕ

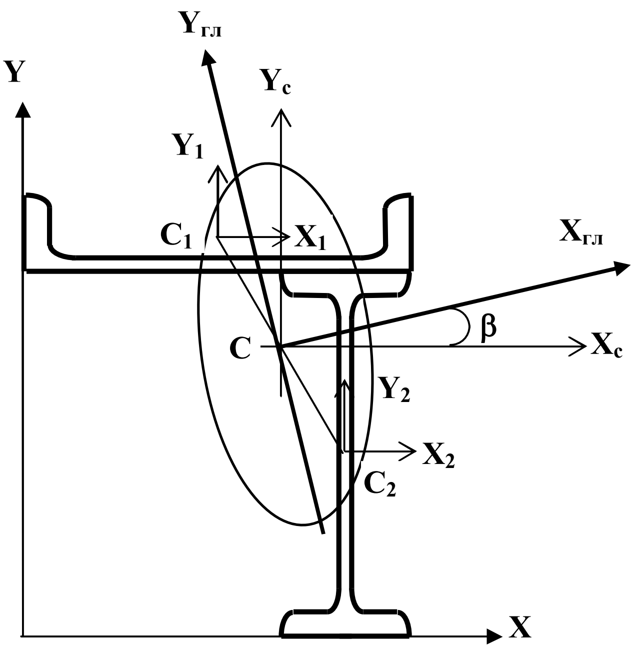


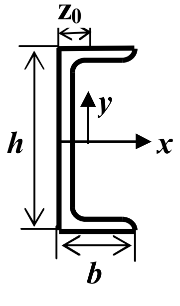
Рис.1

Сечение (рис.1) состоит из швеллера № 12 и двутавра № 18.

1. Разбиваем сечение на отдельные фигуры:

<u>Фигура 1 – швеллер № 12</u>

В таблице сортамента приведены геометрические характеристики для швеллера, расположенного вертикально



h_1 = 12 см, b_1 = 5,2 см; z_o = 1,54 см

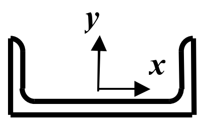
A = 13,3 см^2, J_{x_1} = 304 см^4;

J_{y_1} = 31,2 см^4; J_{xy} = 0 (оси x,y – главные)

В нашем примере швеллер расположен горизонтально (рис.1), поэтому

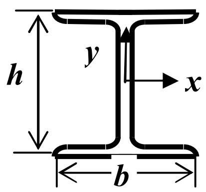
$J_{x_1} = J_y^{таб} = 31{,}2$ см^4

$J_{y_1} = J_x^{таб} = 304$ см^4



Оси x_1 и y_1 по сравнению с табличными осями поменялись местами.

Фигура 2 – двутавр № 12



$h_2 = 18$ см, $b_2 = 9$ см, $A = 23{,}4$ см^2,

$J_{x_2} = 1290$ см^4; $J_{y_2} = 82{,}6$ см^4,

$J_{xy} = 0$ (оси x,y – главные)

2. Найдем координаты центра тяжести всего сечения в произвольной системе координат *XOY*. Систему координат *XOY* выбираем сами, таким образом, чтобы можно было легко определить координаты центров тяжести каждой из двух фигур.

$$X_{(C_1)} = \frac{b_1}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ см}; \;\; Y_{(C_1)} = h_2 + z_o^{(1)} = 18 + 1{,}54 = 19{,}54 \text{ см}$$

$$X_{(C_2)} = b_1 - b_2/2 = 12 - 9/2 = 7{,}5 \text{ см}; \;\; Y_{(C_2)} = \frac{h_2}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ см}$$

Замечание: в зависимости от выбора системы XOY знаки величин $X_{(C_k)}$, $Y_{(C_k)}$ могут быть и отрицательными.

Обозначим далее $X(C_1) = x_1$, $Y_{(C_1)} = y_1$, и т.д.

Определим координаты центра тяжести всего сечения т.*C* и построим центральные оси X_c, Y_c, параллельные исходным осям *X, Y*.

$$\text{X(C)} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{6 \cdot 13{,}3 + 7{,}5 \cdot 23{,}4}{13{,}3 + 23{,}4} = 6{,}956 \text{ см}$$

$$\text{Y(C)} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{19{,}54 \cdot 13{,}3 + 9 \cdot 23{,}4}{13{,}3 + 23{,}4} = 12{,}820 \text{ см}$$

Полученную точку $C(X_C Y_C)$ наносим на рис.1 и строим центральные оси $X_C Y_C$.

Замечание: если весь чертеж выполнен в масштабе, то точка С должна лежать на прямой, соединяющей точки C_1 и C_2.

Обозначим далее $A = A_1 + A_2 = 13{,}34 + 23{,}4 = 36{,}74$ см^2.

3. Вычислим моменты инерции всего сечения относительно осей *X*, *У*.

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} = [J_{x_1} + {y_1}^2 \cdot A_1] + [J_{x_2} + {y_2}^2 \cdot A_2] =$$

$$= [31{,}2 + 19{,}54^2 \cdot 13{,}3] + [1290 + 9^2 \cdot 23{,}4] = 8294{,}6943 \text{ см}^4$$

$$J_y = [J_{y_1} + {x_1}^2 \cdot A_1][J_{x_2} + {x_2}^2 \cdot A_2] =$$

$$= [304 + 6^2 \cdot 13{,}3] + [82{,}6 + 7{,}5^2 \cdot 23{,}4] = 2181{,}65 \text{ см}^4$$

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + x_1 y_1 \cdot A_1 + J_{x_2 y_2} + x_2 y_2 \cdot A_2 =$$

$$= 0 + 6 \cdot 19{,}54 \cdot 13{,}3 + 0 + 7{,}5 \cdot 9 \cdot 23{,}4 = 3138{,}792 \text{ см}^4$$

4. Подсчитаем моменты инерции сечения относительно центральных осей X_C ,Y_C. Используем формулы параллельного переноса для случая перехода от произвольных осей фигуры к центральным (знаки "минус"):

$$J_{x_c} = J_x - {Y_C}^2 \cdot A = 8294{,}6943 - 12{,}820^2 \cdot 36{,}74 = 2263{,}2435 \text{ см}^4$$

$$J_{y_c} = J_y - {X_C}^2 \cdot A = 2181{,}65 - 6{,}9564^2 \cdot 36{,}74 = 405{,}6819 \text{ см}^4$$

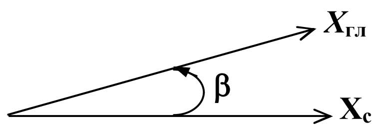
$$J_{x_c y_c} = J_{xy} - X_C Y_C A = 3138.792 - 6{,}9564 \cdot 12{,}820 \cdot 36{,}74 = -134{,}0759 \text{ см}^4$$

Замечание: 1) Осевые моменты инерции всегда должны получаться положительными; 2) если точки C_1 и C_2 лежат в первой и третьей четвертях системы $X_C Y_C$, то центробежный момент $J_{x_c y_c}$ должен получаться положительным (см.рис.1). Если во II и IV - то отрицательным.

5. Определим положение главных центральных осей $X_{гл} Y_{гл}$.

Так $J_{x_c y_c} \neq 0$, то оси $X_C Y_C$ – центральные, но не главные.

Необходимо найти угол β наклона оси $X_{гл}$ к оси X_C.



β > 0 от оси X_c к $X_{гл}$ против часовой стрелки

β < 0 – по часовой стрелке

Угол β определяем из выражения $tg(2\beta) = \dfrac{-2J_{x_c y_c}}{J_{x_C} - J_{y_C}}$.

$$\text{Имеем } tg(2\beta) = \frac{-2(-134{,}0759)}{2263{,}2435 - 405{,}6819} = 0{,}1444.$$

$$2\beta = arctg\ (0{,}1444) = 8°13'$$

$$\beta = 4°06'$$

Строим оси $X_{гл} Y_{гл}$ - рис.1.

6. Подсчитаем главные моменты инерции сечения, пользуясь формулами поворота осей на угол β

$$J_{x_{гл}} = J_{x_C}\cos^2\beta + J_{y_C}\sin^2\beta - J_{x_C y_C}\sin 2\beta =$$
$$2263{,}2435\cos^2(4°06') + 405{,}6819\sin^2(4°06') + 134{,}0759\sin(2\cdot 4°06') = 2272{,}8644\text{ см}^4$$
$$J_{y_{гл}} = J_{x_C}\sin^2\beta + J_{y_C}\cos^2\beta + J_{x_C y_C}\sin 2\beta =$$
$$= 2263{,}2435\sin^2(4°06') + 405{,}6819\cos^2(4°06') - 134{,}0759\sin(2\cdot 4°06') = 396.0610\text{ см}^4$$

Проверка:

1. Большее значение (в нашем случае это J_{x_C} = 2263.2435 см^4 "переходит" в еще большее ($J_{x_{гл}}$ = 2272.8644 см^4), а меньшее (J_{y_C} = 405.6819см^4) "переходит" в еще меньшее ($J_{y_{гл}}$ = 396.0610 см^4).

2. Должно выполняться условие $J_{x_C} + J_{y_C} = J_{x_{гл}} + J_{y_{гл}}$.

2263.2435 + 405.6819 = 2272.8644 + 396.0610

2668.9254 = 2668.9254

3. $J_{x_{гл}y_{гл}}$ должно равняться нулю.

$$J_{x_{гл}y_{гл}} = \frac{J_{xc} - J_{yc}}{2}\sin 2\beta + J_{xcyc}\cos 2\beta =$$

½ (2263.2435 – 405.6819)sin 8°13′ - 134.0759 cos 8°13′ = 0.3885 ≈ 0

7. Построим эллипс инерции сечения.

Полуоси эллипса, называемые радиусами инерции:

$$i_{x_{гл}} = \sqrt{\frac{J_{x_{гл}}}{A}} = \sqrt{\frac{2272{,}8644}{36{,}74}} = 7{,}8696\text{ см}$$ - откладываем по $У_{гл}$

$$i_{y_{гл}} = \sqrt{\frac{J_{y_{гл}}}{A}} = \sqrt{\frac{396{,}0610}{36{,}74}} = 3{,}2851\text{ см}$$ - откладываем по оси $Х_{гл}$

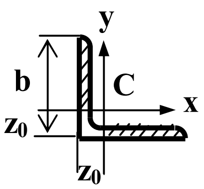
На этих осях строим эллипс инерции (рис.1).

Выводы: Положение главных центральных осей $X_{гл}$ и $Y_{гл}$ показано на рис.1. Главные моменты инерции сечения: $J_{x_{гл}}$ = 2272.8644 см^4, $J_{y_{гл}}$ =396.0610 см^4.

Положение эллипса инерции сечения говорит о том, что при изгибе балки в направлении оси $Y_{гл}$ ее жесткость и прочность будут наибольшими, а при изгибе в направлении $X_{гл}$ - наименьшими.

Замечание: Если заданное сечение содержит стандартный уголок, расчет выполняется аналогично.

Рисуем уголок отдельно, пусть уголок 50x50x3. Выписываем из сортамента геометрические характеристики



b = 5 см; z_0 = 1,33 см; A = 2,46 см^2;
$J_x = J_y$ = 7,11 см^4;
J_{max} = 11,31 см^4; J_{min} = 2,95 см^4

Для уголка оси x,y не являются главными, поэтому центробежный момент инерции не равен нулю, а определяется по формуле

$$J_{xy} = \pm\left|\frac{J_{\max} - J_{\min}}{2}\right|.$$

Знак плюс или минус определяется в зависимости от взаимного расположения уголка по отношению к осям x, y (см.рис.2).

В нашем случае «минус» т.к. большая часть сечения (на рисунке она заштрихована) расположена во 2-ой и 4-ой четвертях, где x,y< 0 ($J_{xy} = \iint\limits_A xydA$)

$$J_{xy} = -\left|\frac{11{,}3 - 2{,}95}{2}\right| = -4{,}175 \text{ см}^4 \neq 0,$$

в отличие от двутавра и швеллера, у которых $J_{xy} = 0$.

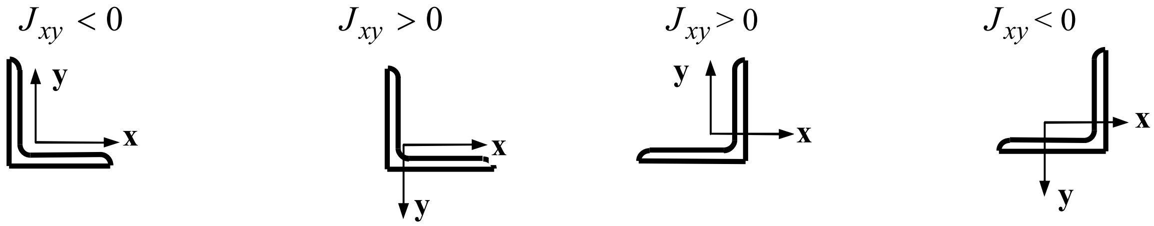


Рис.3

ПРИМЕР ЗАДАЧЕ 2.2

Для заданной схемы балки (рис.1) при P = 12 кН, m = 12 кН·м, q=12 кН м, a = b= c = 1,5 м, [σ] = 0,8 кН/см^2, [τ] = 0,4 кН/см^2.

Требуется:

1. Построить эпюры Q_y и M_x .
2. Подобрать деревянную балку
   а) круглого сечения,
   б) прямоугольного, приняв h/b = 2.

РЕШЕНИЕ

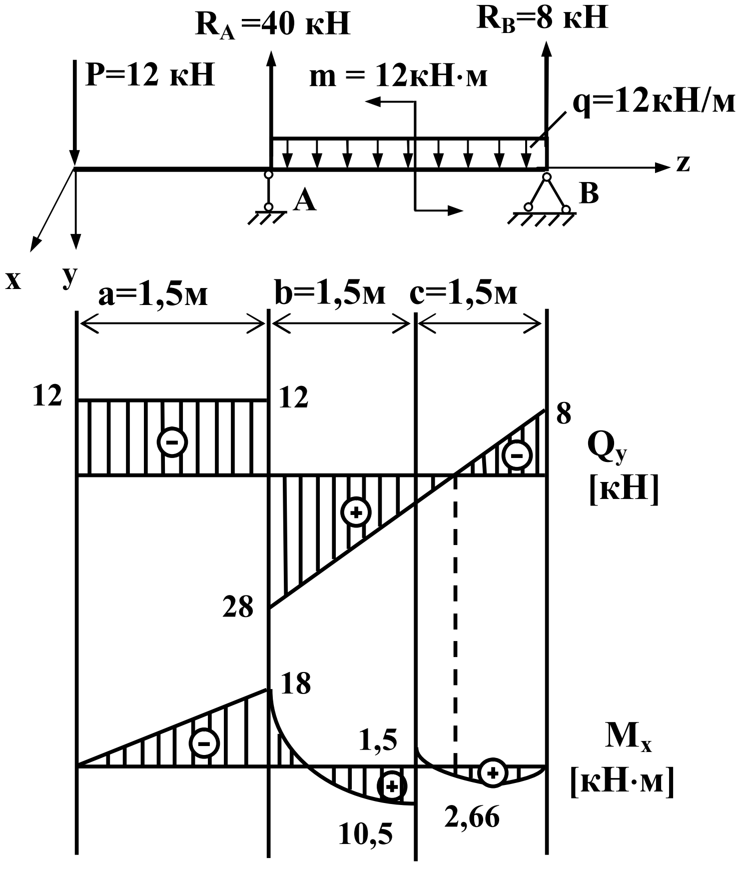


Рис.1

1. Определяем реакции опор R_A и R_B. Записываем сумму моментов относительно точек A и B, в которых находятся опоры:

$$\sum M_A = 0 \quad P \cdot a + m - q(b+c)\frac{(b+c)}{2} + R_B(b+c) = 0$$

$$R_B = \frac{q\dfrac{(b+c)^2}{2} - m - Pa}{b+c} = \frac{12 \cdot \dfrac{3^2}{2} - 12 - 12 \cdot 1{,}5}{3} = 8 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0 \qquad P(a+b+c) - R_A(b+c) + m + q\big(b+c\big)\frac{(b+c)}{2} = 0$$

$$R_A = \frac{P(a+b+c) + m + q\dfrac{(b+c)^2}{2}}{b+c} = \frac{12 \cdot 4{,}5 + 12 + 12\dfrac{3^2}{2}}{3} = 40 \text{ кН}$$

Проверка

$$\sum Y = 0 \quad P - R_A + q(b+c) - R_B = 0$$

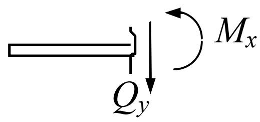
$$12 - 40 + 12 \cdot 3 - 8 = 0.$$

2. Выражения для внутренних поперечных сил Q_y и внутренних изгибающих моментов M_x для каждого из трех участков балки получаем методом сечений. Мысленно проводим сечение. Отбрасываем часть балки либо слева, либо справа от сечения. Действие отброшенной части заменяем внутренними силовыми факторами Q_y и M_x, которые находим из уравнений статики.

Для левой части (отброшена правая):

Q_y направлена вниз по оси У;

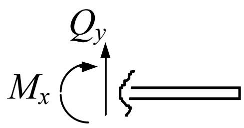
M_x против часовой стрелки.



Для правой части (отброшена левая):

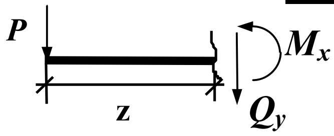
Q_y направлена вверх;

M_x по часовой стрелки.



Для определения Q_y и M_x рисуем отдельно выбранную для расчета часть, указываем всю внешнюю нагрузку, направление внутренних силовых факторов Q_y и M_x и определяем их из уравнений статики: $\sum Y = 0$, $\sum M_x = 0$ (сумма проекций всех сил на ось Y и сумма моментов всех сил относительно точки С, в которой провели сечение).

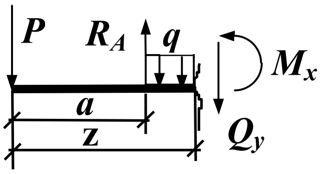
<u>1-й участой</u> $0 \le z \le a$ (левая часть)



$\sum Y = 0 \quad Q_y + P = 0 \quad Q_y = -P$

$\sum M_x \quad M_x + Pz = 0 \quad M_x = -Pz$

<u>2-й участой</u> $a \le z \le a + b$ (левая часть)



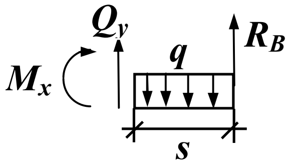
$\sum Y = 0 \quad Q_y + P - R_A + q(z - a) = 0$

$Q_y = - P + R_A - q(z - a)$

$\sum M_x = 0 \quad M_x + q(z - a)^2/2 - R_A(z - a) + Pz = 0$

$M_x = - q(z - a)^2 /2 + R_A(z - a) + Pz = 0$

<u>3-й участой</u> $c \ge s \ge 0$ (правая часть)



$\sum Y = 0 \quad -Q_y - R_B + qs = 0 \quad Q_y = -R_B + qs$

$\sum M_x = 0 \quad - M_x - qs^2/2 + R_Bs = 0 \quad M_x = - qs^2/2 + R_Bs$

Строим графики эпюры Q_y и M_x под расчетной схемой конструкции (рис.1). На расчетной схеме должны быть указаны найденные значения опорных реакций R_A и R_B, вся внешняя нагрузка. Положительные значения Q_y и M_x откладываем по направлению оси Y (вниз).

На участках, где действует распределенная нагрузка q, эпюра Q_y - наклонная прямая, эпюра M_x парабола выпуклостью вниз (если q направлена вниз). Скачки (разрывы) на эпюре Q_y могут быть только в точках, где приложены сосредоточенные силы или опорные реакции. Величина скачка равна величине приложенной силы. Скачки на эпюре моментов могут быть только в тех сечениях, где приложены сосредоточенные моменты. Величина скачка равна величине приложенного момента.

Там где эпюра Q_y имеет нулевую точку, на эпюре M_x - экстремум ($M_x = 2.67$ кН·м, рис.1). Для определения экстремума M_x надо приравнять нулю выражение Q_y на этом участке и получить из этого уравнения значение s^*. Подставляя $s = s^*$ в выражение M_x на данном участке, получим значение экстремума M_x. В нашем примере $Q_y = 0$, на 3-ем участке $qs^* = R_B$, $s^* = R_B / q = 8/12 = 0{,}67$ м. Подставляя s^* в выражение на данном участке, получим $M(s^*) = -12 \cdot (0{,}67)^2 / 2 + 8 \cdot 0{,}67 = 2{,}67$ кН·м.

3. Подбор деревянной балки круглого сечения.

Условие прочности балки по нормальным напряжениям σ_z имеет вид:

$$\left|\sigma_z\right|_{\max} = \frac{\left|M_x\right|_{\max}}{W_x} \le [\sigma] \qquad (1)$$

с перегрузкой не более 5 % и недогрузкой не более 15 %.

Величина $\mid M_x \mid_{max}$ определяются по эпюре M_x и в нашем случае есть $\mid M_x \mid_{max} = 18$ кН·м = 1800 кН·см.

Из (1) $W_x \ge \dfrac{\left|M_x\right|_{\max}}{[\sigma]} = \dfrac{1800}{0{,}8} = 2250$ см^3.

Момент сопротивления круглого сечения есть $W_x = \dfrac{\pi R^3}{4} = 2250$ см^3, откуда получаем

$$R = \sqrt[3]{\frac{4W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 2250}{3{,}14}} = \text{R} = 14{,}2 \text{ см} .$$

Проверим условие прочности балки по максимальным касательным напряжениям в сечении $y = 0$:

$$\left|\tau_{zy}\right|_{\max} = \frac{\left|Q_y\right|_{\max} \cdot S_x}{J_x \cdot b} \le [\tau] \qquad (2)$$

с перегрузкой не более 5 % и любой недогрузкой.

$\mid Q_y \mid_{max} = 28$ кН - по эпюре Q_y; $J_x = \dfrac{\pi R^4}{4}$ - момент инерции для круга;

$b = 2R$ - ширина сечения на уровне $y = 0$, где действуют $|\tau_{zy}|_{max}$;

S'_x - статический момент площади полукруга, расположенной ниже уровня, где действуют $|\tau_{zy}|_{max}$.

В нашем случае $S'_x = A_{отс}Y_{отс} = \dfrac{\pi R^2}{2}\dfrac{4R}{3\pi} = \dfrac{2R^3}{3}$.

$A_{отс}$ – площадь полукруга; $У_{отс}$ – центр тяжести полукруга.

Полагая R = 14,2 см, по формуле (2) получаем $|\tau_{zy}|_{max}$ = 0,177 кН/см^2 при допускаемом напряжении [τ] = 0,4 кН/см^2.

Следовательно, условия прочности балки выполняются и для данной схемы подходит деревянная балка диаметром D = 28,4 см. Площадь поперечного сечения $A = \pi D^2 / 4 = 633{,}150$ см^2.

4. Подбор деревянной балки прямоугольного сечения с отношением сторон $h/b = 2$ (h - высота, b - основание).

Аналогично предыдущему $|\sigma_z|_{\max} = \dfrac{|M_x|_{\max}}{W_x} \le [\sigma]$, $W_x = 2250$ см^3.

Для прямоугольного сечения $W_x = \dfrac{bh^2}{6}$.

Тогда при $h = 2b$ имеем $W_x = \dfrac{b(2b)^2}{6} = \dfrac{4b^2}{6} = \dfrac{2}{3}b^3 = 2250$ см^3 ;

$b = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 2250}{2}} = 14{,}95$ см; $\quad h = 2b = 29{,}9$ см

Максимальные касательные напряжения в сечении $y = 0$ определяются по формуле (2):

$$|Q_y|_{max} = 28 \text{ кН}; \quad J_x = \frac{bh^3}{12} = 33302 \text{ см}^4; \quad b = 14{,}95 \text{ см};$$

$$S_x = A_{omc}Y_{omc} = (b \cdot \frac{h}{2}) \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} = 1671 \text{ см}^3$$

$A_{отс}$ – площадь половины прямоугольника; $У_{отс}$ – центр тяжести.

Тогда (2) $|\tau_{zy}|_{max}$ = 0,094 кН/см^2 при [τ] = 0,4 кН/см^2.

Условие прочности балки выполняются и для данной схемы подходит деревянная балка прямоугольного сечения $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h}$ = 15 см × 30 см=450 см^2.

Площадь прямоугольного сечения оказалась значительно меньше площади круглого сечения, что приводит к экономии материала.

ПРИМЕР К ЗАДАЧЕ 2.3.

Для заданной схемы балки при P = 100 кН; m = 30 кН·м; q = 10 кН/м; l = 4 м; $\alpha = 0.5\ l_1$ = 2 м; l_2 = 2 м требуется:

1. Написать выражения Q_y и M_x для каждого участка, построить эпюры и подобрать стальную балку двутаврового профиля $[\sigma]$ =16 кН/см^2, $[\tau]$ =8 кН/см^2.

2. Записать дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для каждого участка, выполнить интегрирование и построить эпюры углов поворота сечений и прогибов.

3. Проверить балку на жесткость при допускаемом прогибе $[f]=l/150$, где l - длина балки. Е = $2\cdot10^4$ кН/см^2.

РЕШЕНИЕ

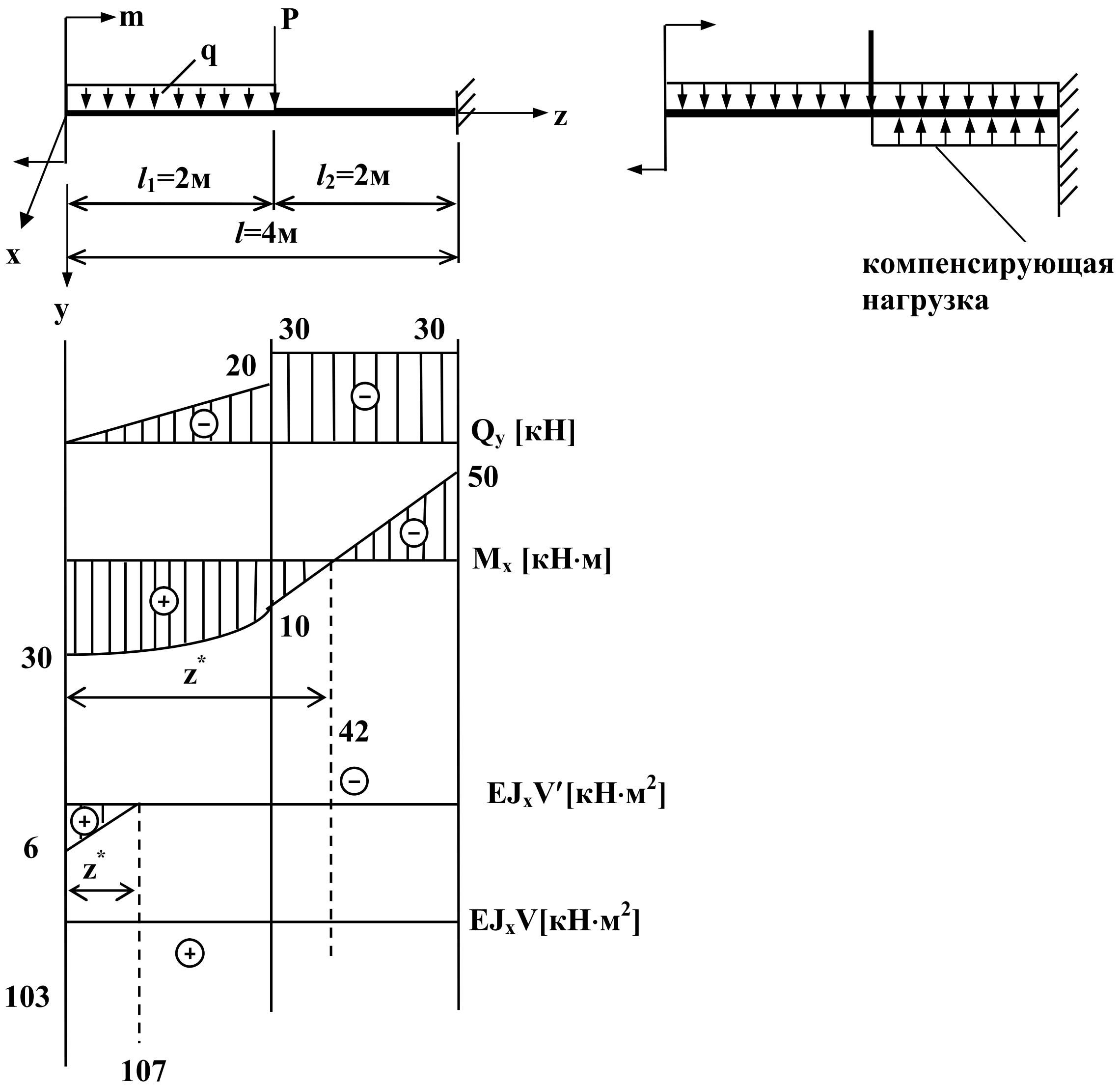
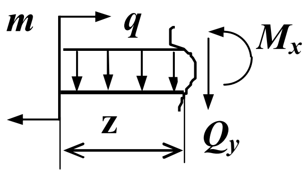


Рис.1

1. Для консольной балки строим эпюры, не определяя опорных реакций в заделке. Идем со свободного конца:

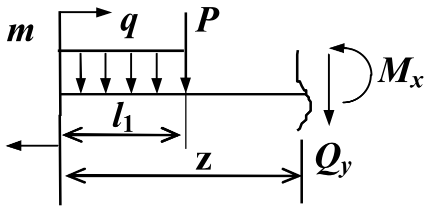
1 участок $0 \le z \le l_1$



$\sum Y = 0 \quad Q_y + qz = 0 \quad Q_y = -\,qz$

$\sum M_x = 0 \quad M_x + qz^2/2 - m = 0 \quad M_x = -\,qz^2/2 + m$

2 участок $l_1 \le z \le l_1 + l_2$



$\sum Y = 0 \quad Q_y + ql_1 + P = 0 \quad Q_y = -\,ql_1 - P$

$\sum M_x = 0 \quad M_x + P(z - l_1) + ql_1(z - l_1/2) - m = 0$

$M_x = -\,P(z - l_1) - ql_1(z - l_1/2) + m$

Строим эпюры Q_y и M_x под расчетной схемой конструкции (рис.1).

2. Подбор двутавра. По эпюрам Q_y и M_x определяем положение опасных сечений и соответствующие расчетные значения силовых факторов

$|M_x|_{max}$= 50 кН·м в сечении z = 4 м,

$|Q_y|_{max}$ = 30 кН на 2-ом участке.

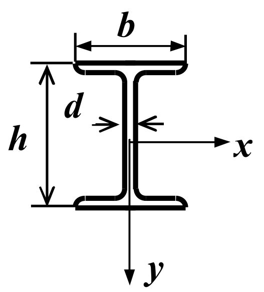
Запишем условие прочности по максимальным нормальным напряжениям:

$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \le [\sigma]$$

Отсюда

$$W_x \ge \frac{|M_x|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 100 \text{кН} \cdot \text{см}}{16 \text{кН/см}^2} = 312{,}5 \text{см}^3$$

Из таблицы сортамента находим значение $W_x^{\text{т}}$ =317см^3, соответствующее двутавру № 24а.



Выпишем из таблицы геометрические характеристики двутавра № 24а и проверим его прочность по максимальным нормальным $|\sigma_z|_{max}$ и максимальным касательным $|\tau_{zy}|_{max}$ напряжениям.

Двутавр № 24а

h = 24 см; J_x = 3800 см^4 ; W_x = 317 см^3 ; S_x = 178 см^3; d = 0,56 см

Максимальное нормальное напряжение

$$\left|\sigma_z\right|_{\max}=\frac{\left|M_x\right|_{\max}}{W_x^{\text{т}}}=\frac{5000\text{кН}\cdot\text{см}}{317\text{см}^3}=15{,}8\text{кН/см}^2<16\text{кН/см}^2$$

Недогрузка $\dfrac{[\sigma]-\left|\sigma_z\right|_{\max}}{[\sigma]}\cdot 100\%=\dfrac{16-15{,}8}{16}\cdot 100\%=1{,}25\%$.

Условие прочности по $\sigma_{z\ max}$ выполняется. Недогрузка 1,25 %.

Максимальные касательные напряжения в сечении у =0.

$$\left|\tau_{zy}\right|_{\max}=\frac{\left|Q_y\right|_{\max}S_x^{\text{т}}}{J_x d}=\frac{30\text{кН}\cdot 178\text{см}^3}{3800\text{см}^4\cdot 0{,}56\text{см}}=2{,}50\text{кН/см}^2<8\text{кН/см}^2$$

d – толщина стенки двутавра на уровне у =0.

Здесь допустима любая недогрузка (перегрузка не более 5 %).

Ответ: Двутавр № 24а удовлетворяет условиям прочности по $\sigma_{z\ max}$ и $\tau_{z\ max}$.

3. Дифференциальное уравнение изгиба $EJ\,V''(z)=-M_x$

$V(z)$ - перемещение оси балки по направлению оси Y,

E - модуль Юнга,

J_x - момент инерции сечения балки.

В соответствии с методом Клебша продолжим нагрузку q до правого конца балки и добавим снизу компенсирующую нагрузку - q (рис.1). Внешний момент m будет записываться в виде $m(z-a)^o$, где a - координата по оси z точки приложения момента. Интегрируем дважды не раскрывая скобок.

<u>1 участок</u> $0\le z\le l_1$

$$EJV''(z)=-m(z-0)^o+\frac{q(z-0)^2}{2}$$

$$EJV'(z)=-\frac{m(z-0)^1}{1}+\frac{q(z-0)^3}{6}+C$$

$$EJV(z)=-\frac{m(z-0)^2}{2}+\frac{q(z-0)^4}{24}+Cz+D$$

<u>2 участок</u> $l_1\le z\le l_1+l_2$

$$EJV''(z)=-m(z-0)^o+\frac{q(z-0)^2}{2}-\frac{q(z-l_1)^2}{2}+P(z-l_1)$$

$$EJV'(z)=-\frac{m(z-0)^1}{1}+\frac{q(z-0)^3}{6}-\frac{q(z-l_1)^3}{6}+\frac{P(z-l_1)^2}{2}+C$$

$$EJV(z)=-\frac{m(z-0)^2}{2}+\frac{q(z-0)^4}{24}-\frac{q(z-l_1)^4}{24}+\frac{P(z-l_1)^3}{6}+Cz+D$$

Для определения постоянных интегрирования C и D используем условия закрепления балки.

В заделке при l = 4 м угол поворота $V'(l) = 0$ и прогиб $V(l) = 0$

$$EJV'(4) = 0; \quad -m\frac{4^1}{1} + q\frac{4^3}{6} - q\frac{2^3}{6} + P\frac{2^2}{2} + C = 0.$$

Отсюда C = 6 (кН·м^2).

$$EJV(4) = 0; \quad -m\frac{4^2}{2} + q\frac{4^4}{24} - q\frac{2^4}{24} + P\frac{2^3}{6} + C \cdot 4 + D = 0.$$

D = 103 (кН·м^3).

Подставляя найденные значения C и D в выражения для $EJV'(z)$ и $EJV(z)$ вычисляем для каждой точки z соответствующее значение углов поворота и прогибов умноженных на константу EJ_x. Строим эпюры $EJV'(z)$ и $EJV(z)$, под эпюрами Q_y и M_x. Все четыре эпюры связаны дифференциальными зависимостями.

4. Проверим жесткость балки. Двутавр № 24а : $E = 2 \cdot 10^4$ кН/см^2, $J_x = 3800$ см^4.

Условие жесткости $V_{max} \le [f]$

Допускаемое значение прогиба $[f] = \dfrac{l}{150} = \dfrac{400}{150} = 2{,}67$ см

По эпюре $EJV(z)$ берем максимальное значение EJV_{max} = 107 кН·м^3 = = $107 \cdot 10^6$ кН·см^3 .

$$V_{\max} = \frac{107 \cdot 10^6 \text{кН} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 \cdot 3800\text{см}^4} = 1{,}40 < 2{,}67 \text{ (см)}$$

Условие жесткости выполняется.

Двутавр № 24а подходит для данной конструкции и по прочности и по жесткости.