

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Казанский государственный архитектурно-строительный университет

*Кафедра сопротивления материалов и основ теории упругости*

***РАСЧЕТ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСКОСТЬ ПРИ  
ПРЯМОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ***

*Методические указания для выполнения расчетно-графического задания  
студентами специальностей 270102, 270109, 270112, 270114, 270115,  
270201, 240400, 290600, 291000*

Казань 2011

УДК 539.2/6  
ББК 30.121  
К31

К 31 Расчет балки на прочность и жесткость при прямом поперечном изгибе. Методические указания для выполнения расчетно-графического задания студентами специальностей 270102, 270109, 270112, 270114, 270115, 270201, 240400, 290600, 291000 / Р.А. Каюмов, И.З. Мухамедова, Д.Е. Страхов – Казань: КГАСУ. 2009. – 24с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Рецензент  
Доцент кафедры сопротивления материалов и ОТУ  
А.У. Богданович

УДК 439.2/6  
ББК 30.121

Казанский государственный  
архитектурно-строительный  
университет, 2011

Каюмов Р.А., Мухамедова И.З.,  
Страхов Д.Е. ,2011

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

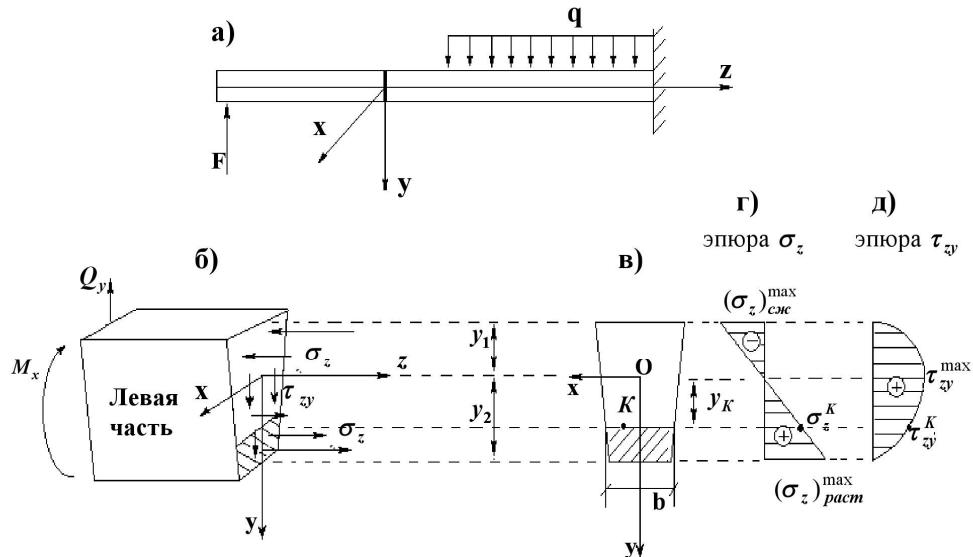
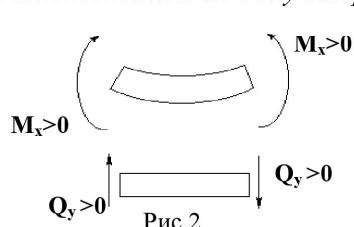


Рис.1. Распределение нормальных и касательных напряжений для произвольного сечения балки при поперечном изгибе

Рассмотрим поперечный изгиб балки в плоскости  $yz$ . Исследуем левую отсеченную часть балки, изображенную на рис.1а,1б.

Изгибающий момент  $M_x$  - это суммарный момент, которым левая часть бруса воздействует на правую или наоборот. Отсюда вытекает правило вычисления  $M_x$ : *в любом сечении балки изгибающий момент равен сумме моментов всех внешних сил относительно оси  $x$ , расположенных по одну сторону от сечения.*

Поперечная сила  $Q_y$  - это суммарная сила, которой левая часть бруса воздействует на правую или наоборот. Таким образом, можно сформулировать правило вычисления  $Q_y$ : *в любом сечении балки поперечная сила равна сумме проекций на ось  $y$  всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.*



Правила знаков для  $M_x$  и  $Q_y$  вводятся согласно рис.2.

Нормальные напряжения при изгибе в произвольной точке  $K$  поперечного сечения определяются по формуле

Рис.2

$$\sigma_z^{(K)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_K \quad (1)$$

где  $y_K$  - расстояние от нейтральной линии  $x$  сечения до точки  $K$ , в которой определяется напряжение (см. рис.1в);  $J_x$  - момент инерции поперечного сечения относительно оси  $x$ .

Касательные напряжения, порождаемые поперечной силой  $Q_y$  в произвольной точке  $K$  поперечного сечения балки, определяются по формуле Журавского

$$\tau_{zy}^{(K)} = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{J_x \cdot b} \quad (2)$$

где  $S_x^{omc} = A^{omc} \cdot y_C^{omc}$  - статический момент отсеченной части сечения (заштрихованная область на рис.1в) относительно оси  $x$ ,  $A^{omc}$  - площадь отсеченной части,  $y_C^{omc}$  - расстояние от нейтральной оси  $x$  до центра тяжести отсеченной части,  $b$  - ширина сечения на уровне точки  $K$  (см. рис.1в).

## 2. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

### Условие прочности по нормальным напряжениям

Наибольшие нормальные напряжения в растянутой и в сжатой зонах  $(\sigma_z)_p^{\max}, (\sigma_z)_{cж}^{\max}$  возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной линии (см. рис.1г).

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы эти напряжения в опасном сечении (т.е. в сечении, в котором  $|M_x|$  имеет наибольшее значение) не превосходили допускаемых значений:

$$(\sigma_z)_{pact}^{\max} = \frac{|M_x^{\max}| y_2}{J_x} \leq [\sigma]_{pact}, \quad (\sigma_z)_{cж}^{\max} = \frac{|M_x^{\max}| y_1}{J_x} \leq [\sigma]_{cж} \quad (3)$$

Для материалов, которые одинаково работают на растяжение и сжатие (например, для стали), вводятся обозначения:  $[\sigma] = [\sigma]_{cж} = [\sigma]_{pact}$ . В этом случае вводится геометрическая характеристика, называемая *осевым моментом сопротивления*  $W_x = J_x / |y|_{\max}$ .

Тогда формулы (3) примут вид

$$\sigma_z^{\max} = \frac{|M_x^{\max}|}{W_x} \leq [\sigma], \quad (4)$$

### Условие прочности по касательным напряжениям

Для обеспечения прочности на срез необходимо, чтобы наибольшие касательные напряжения в опасном сечении (т.е. в сечении, в котором  $|Q_y|$  имеет наибольшее значение), не превосходили допускаемых значений:

$$\tau_{zy}^{\max} = \frac{|Q_y|^{\max} S_x^{omc}}{J_x b} \leq [\tau] \quad (5)$$

### Проверка прочности по IV теории прочности

При поперечном изгибе в произвольной точке  $K$  поперечного сечения одновременно действуют как нормальные, так и касательные напряжения (см. рис.1). Поэтому балку необходимо проверять по какой-либо теории прочности в тех точках, в которых действуют и нормальные, и касательные напряжения. Для стали наиболее корректной является четвертая теория прочности, которая имеет вид

$$\sigma_{ekb} = \sqrt{(\sigma_z^K)^2 + 3 \cdot (\tau_{zy}^K)^2} \leq [\sigma] \quad (6)$$

Для отыскания  $\sigma_{ekb}^{\max}$  в общем случае необходимо строить эпюру эквивалентных напряжений.

## 3. РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ

Под действием рабочей нагрузки балка должна прогибаться в пределах нормы. Такая балка называется *жесткой*.

Прогиб  $v$  балки и угол наклона ее оси  $\theta$  изображены на рис.3.

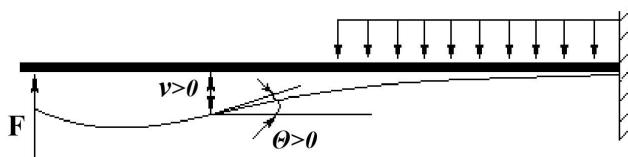


Рис.3. Изогнутая ось балки после приложения нагрузки

Жесткость балки будет обеспечена, если будет выполняться условие

$$|v|_{\max} \leq [v], \quad (7)$$

где  $[v]$  - допускаемое значение прогиба.

Рассмотрим 2 способа вычисления прогибов.

### 3.1 Вычисление прогибов балки на основе решения дифференциального уравнения изогнутой оси балки

Этот способ позволяет получить аналитическое выражение для прогибов  $v = v(z)$  на каждом участке.

Изогнутой осью балки называется кривая, в которую превращается прямолинейная ось балки после приложения к ней внешней нагрузки. Для малых прогибов дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} = EJ_x v'' = -M_x \quad (8)$$

Уравнение типа (8) записывается для каждого участка балки.

### Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси методом Клебша

Метод Клебша, обеспечивающий равенство констант интегрирования на разных участках, состоит в следующем:

1. Отсчет координат  $z$  для всех участков надо вести от одного конца балки.
2. Если на каком-то участке появляется распределенная нагрузка интенсивности  $q$ , не «доходящая» до конца балки, то ее надо продлить до конца балки, добавив на этих участках такую же распределенную нагрузку с противоположным знаком, чтобы не изменить силовую схему нагружения балки.
3. Сосредоточенный внешний момент  $m_0$  в выражении для изгибающего момента необходимо записывать в виде  $m_0(z - a)^0$ , где  $a$  - расстояние от начала отсчета  $z$  до сечения, в котором действует  $m_0$ .
4. Интегрирование зависимостей (8) следует вести не раскрывая скобки.

Выражение для углов наклона оси  $\theta$  получается путем интегрирования (8) по координате  $z$ :

$$\theta \approx \frac{dv}{dz} = v' = \frac{1}{EJ_x} \int M_x dz + C \quad (9)$$

Для получения выражения для прогиба балки  $v = v(z)$  необходимо проинтегрировать (9):

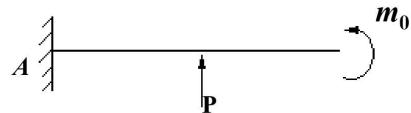
$$v = \frac{1}{EJ_x} \int dz \int M_x dz + Cz + D \quad (10)$$

В (9) и (10)  $C, D$  - это постоянные интегрирования.

### Границные условия

Постоянные интегрирования  $C, D$  определяются из условий закрепления балки.

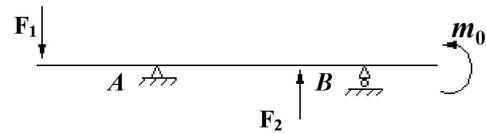
1) Если закрепление балки представляет собой жесткое защемление (как показано на рис.4), то в точке  $A$  прогиб и угол поворота равны нулю. Поэтому граничные условия имеют следующий вид



$$\begin{aligned} \nu_A &= 0, \\ \theta_A &= \nu'_A = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Рис.4. Консольная балка

2) Если балка имеет две шарнирные опоры (как показано на рис.5), то в точках  $A$  и  $B$  прогибы балки равны нулю и граничные условия имеют вид



$$\begin{aligned} \nu_A &= 0, \\ \nu_B &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Рис.5. Балка на двух шарнирных опорах

### 3.2 Метод определения прогибов и углов поворота на основе интеграла Мора

Этот способ легче предыдущего с точки зрения вычислительной работы. Однако он не позволяет получить выражение  $\nu = \nu(z)$  и дает значение прогиба лишь в исследуемом сечении.

Этот метод заключается в следующем:

1. Для определения прогиба в рассматриваемом сечении прикладывается единичная сила  $T=1$  в том же сечении (для определения угла поворота в рассматриваемом сечении прикладывается единичный момент  $m=1$ ). При этом внешние нагрузки не учитываются.
2. Строится эпюра изгибающего момента от единичной силы  $M_x^{(T)}$  (или  $M_x^{(m)}$ ) от единичного момента, если определяется угол наклона оси).
3. Вычисляются интегралы вида

$$\nu = \int_0^l \frac{M_x M_x^{(T)}}{EJ_x} dz = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_x M_x^{(T)}}{EJ_x} dz_i, \quad (13)$$

$$\theta = \int_0^l \frac{M_x M_x^{(m)}}{EJ_x} dz = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{l_i M_x M_x^{(m)}}{EJ_x} dz_i . \quad (14)$$

Здесь интегрирование по всей длине балки заменено суммой интегралов по длине каждого участка.

### Примечание

Положительное значение искомого перемещения получается в том случае, если его направление совпадает с направлением приложенной единичной силы. Знак минус указывает на то, что направление искомого перемещения не совпадает с направлением этой единичной силы. Аналогично и для угла наклона оси балки.

### Методика вычисления интегралов

Интегрирование выражений (13) и (14) удобно вести методом Симпсона:

$$\int_0^{l_i} [M_x M_x^{(T)}] dz = \frac{l_i}{6} \cdot [(M_x)_1 \cdot (M_x^{(T)})_1 + 4 \cdot (M_x)_2 \cdot (M_x^{(T)})_2 + (M_x)_3 \cdot (M_x^{(T)})_3]$$

Здесь  $(M_x)_1, (M_x^{(T)})_1$  - значения изгибающих моментов в начале  $i$ -го участка;

$(M_x)_2, (M_x^{(T)})_2$  - значения изгибающих моментов в середине  $i$ -го участка;

$(M_x)_3, (M_x^{(T)})_3$  - значения изгибающих моментов в конце  $i$ -го участка.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВОЙ ЗАДАЧИ РАЗНЫМИ МЕТОДАМИ

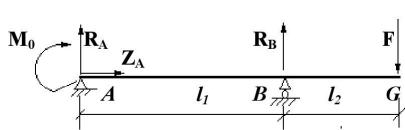


Рис.6

Для шарнирно опертої балки (см. рис.6) построим эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, прогибов и углов наклона оси. Дано:

$$M_0=20 \text{ кН}\cdot\text{м}, F=5 \text{ кН}, l_1=2\text{м}, l_2=1\text{м}.$$

### Решение

#### 1. Определение опорных реакций.

$$\sum F_z = 0, \Rightarrow Z_A = 0.$$

$$\sum mom_{Ax} = 0, \Rightarrow R_B \cdot l_1 - F \cdot (l_1 + l_2) - M_0 = 0 \Rightarrow R_B = 17.5 \text{ кН}.$$

$$\sum mom_{Bx} = 0, \Rightarrow -R_A \cdot l_1 - F \cdot l_2 - M_0 = 0 \Rightarrow R_A = -12.5 \text{ кН}.$$

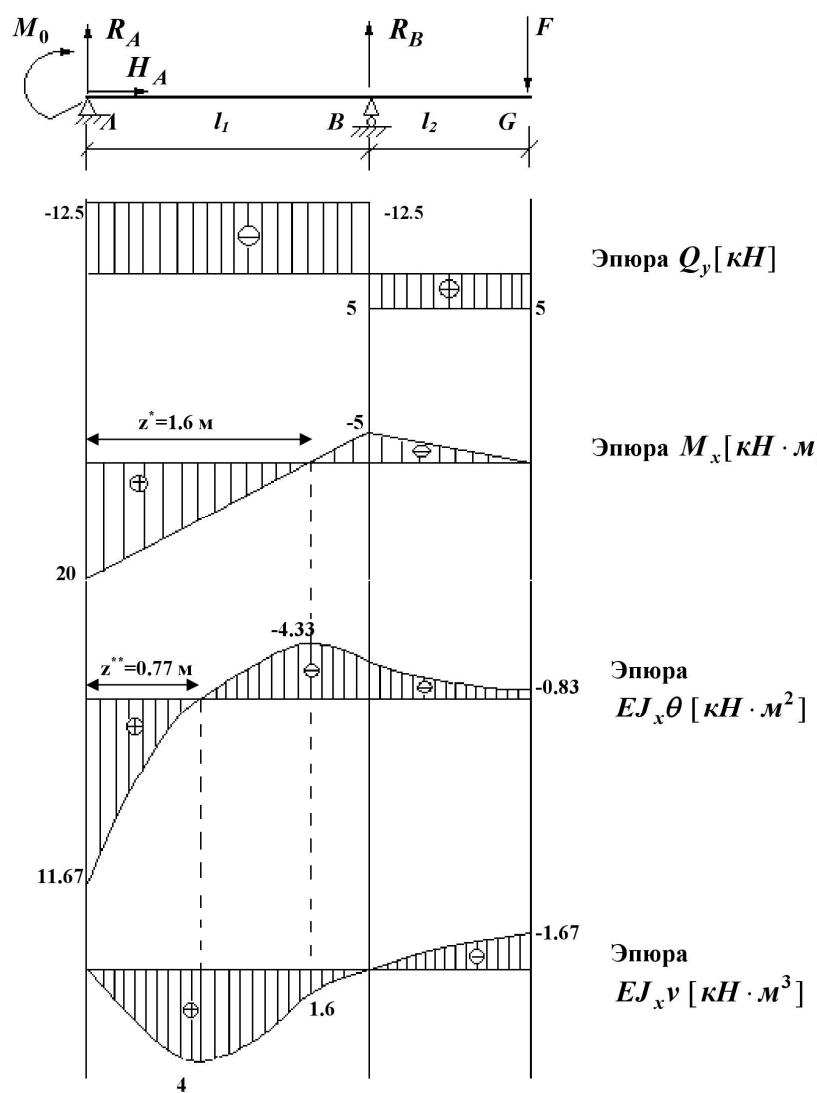


Рис.7

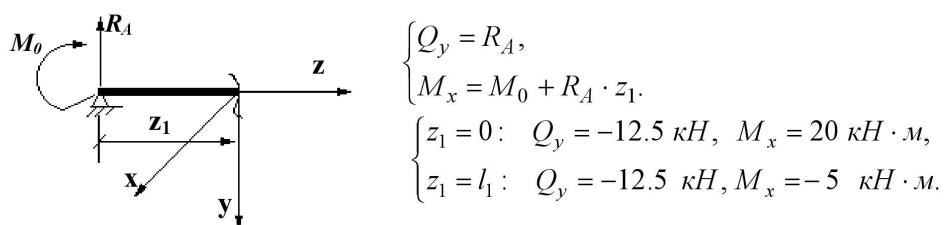
**2. Проверка правильности определения опорных реакций.**

$$\sum F_y = 0, \quad R_A + R_B - F = 0, \quad -12.5 + 17.5 - 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

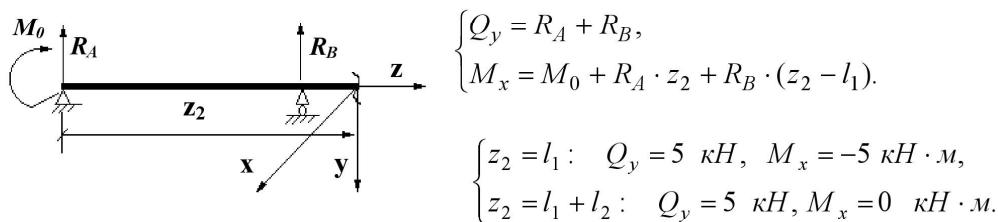
Опорные реакции определены правильно.

**3. Построение эпюор поперечной силы  $Q_y$   
и изгибающего момента  $M_x$ .**

1 участок  $AB$   $0 \leq z_1 \leq l_1$  (рассматривается левая часть)



2 участок  $BG$   $l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$  (рассматривается левая часть)



По известным правилам строим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (см. рис.7).

**4. Построение эпюор прогибов  $EJ_x v$  и углов поворота  $EJ_x \theta$ .**

**Первый способ (метод Клебша (см. п. 3.1))**

Используя правила метода Клебша, для каждого участка балки записываем выражение (8) и последовательно его дважды интегрируем. За начало отсчета координаты  $z$  примем левый конец балки.

1 участок  $AB$   $0 \leq z_1 \leq l_1$  (рассматривается левая часть)

$$\begin{cases} a) EJ_x v'' = -[M_0(z_1 - 0)^0 + R_A \cdot z_1], \\ b) EJ_x \theta = EJv' = -M_0 \cdot z_1 - R_A \cdot z_1^2 / 2 + C, \\ c) EJ_x v = -M_0 \cdot z_1^2 / 2 - R_A \cdot z_1^3 / 6 + C \cdot z_1 + D. \end{cases}$$

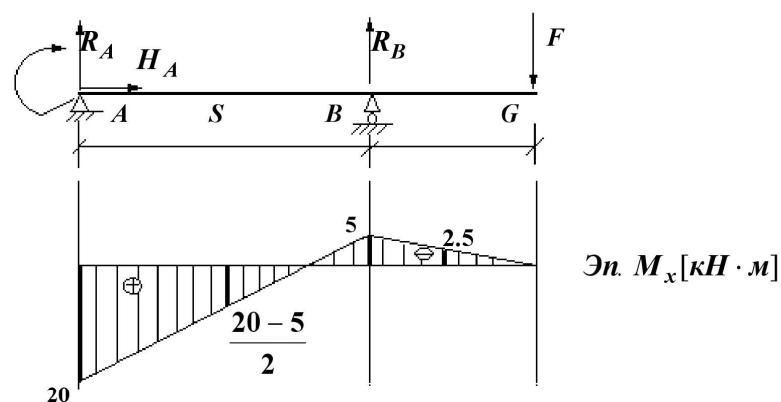


Рис.8. Эпюра изгибающих моментов  
 $M_x$  (перерисована с рис.7)

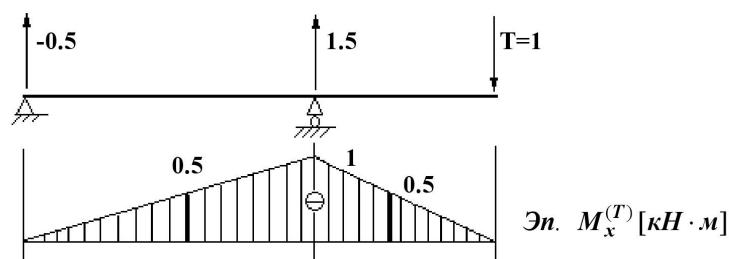


Рис.9. Эпюра изгибающих моментов  $M_x^{(T)}$  от  
единичной силы, приложенной в точке  $G$

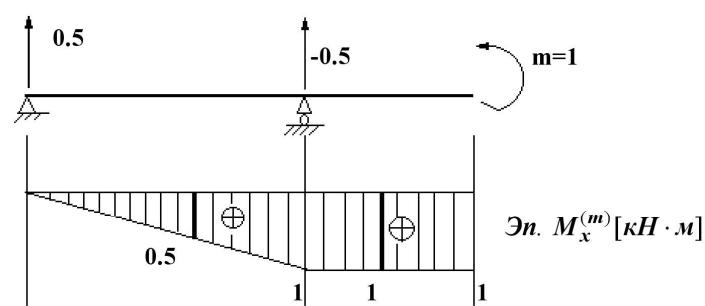


Рис.10. Эпюра изгибающих моментов  $M_x^{(m)}$  от  
единичного момента, приложенного в точке  $G$

2 участок  $BG$      $l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$  (рассматривается левая часть)

$$\begin{cases} a) \quad EJ_x v'' = -[M_0(z_2 - 0)^0 + R_A \cdot z_2 + R_B \cdot (z_2 - l_1)], \\ b) \quad EJ_x \theta = EJv' = -M_0 \cdot z_2 - R_A \cdot z_2^2 / 2 - R_B \cdot (z_2 - l_1)^2 / 2 + C, \\ c) \quad EJ_x v = -M_0 \cdot z_2^2 / 2 - R_A \cdot z_2^3 / 6 - R_B \cdot (z_2 - l_1)^3 / 6 + C \cdot z_2 + D. \end{cases}$$

Для определения числовых значений  $C$  и  $D$  рассмотрим граничные условия (12). Прогибы в опоре А и опоре В равны нулю, тогда

$$\begin{cases} v_A = 0, \Rightarrow EJ_x v_A = -M_0 \cdot 0^2 / 2 - R_A \cdot 0^3 / 6 + C \cdot 0 + D = 0, \Rightarrow D = 0 \\ v_B = 0, \Rightarrow EJ_x v_B = -M_0 \cdot l_1^2 / 2 - R_A \cdot l_1^3 / 6 + C \cdot l_1 + D = 0, \Rightarrow C = 11.67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{cases}$$

Теперь можно построить эпюры  $EJ\theta$  и  $EJv$  по их значениям в нескольких точках. Все расчеты можно свести в таблицу 1. Например, в точке  $G$  (т.е. при  $z = l_1 + l_2$ ) имеем:

$$\begin{aligned} EJ_x \theta_G &= -M_0 \cdot (l_1 + l_2) - R_A \cdot (l_1 + l_2)^2 / 2 + R_B \cdot l_2^2 / 2 + 11.67 = \\ &= -20 \cdot 3 + 12.5 \cdot 9 / 2 - 17.5 \cdot 2 / 2 + 11.67 = -0.83 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \\ EJ_x v_G &= -M_0 \cdot (l_1 + l_2)^2 / 2 - R_A \cdot (l_1 + l_2)^3 / 6 - R_B \cdot l_2^3 / 6 + C \cdot (l_1 + l_2) + D = \\ &= -20 \cdot 3^2 / 2 + 12.5 \cdot 3^3 / 6 - 17.5 \cdot 2 / 6 + 11.67 \cdot 3 + 0 = -1.67 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

**ТАБЛИЦА 1**

$z_i, \text{м}$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$EJ_x \theta, \text{кН} \cdot \text{м}^2$	11.67	3.23	-2.08	-4.27	-3.33	-1.46	-0.83
$EJ_x v, \text{кН} \cdot \text{м}^3$	0	3.59	3.75	2.03	0	-1.15	-1.67

### Второй способ (с применением интеграла Мора (см.п.3.2))

Приведем примеры вычисления  $EJ\theta$  и  $EJv$  в точках  $G$  и  $S$  (см. рис.8).

a) Рассмотрим точку  $G$ .

К балке, свободной от внешних нагрузок, в сечении  $G$  прикладываем единичную силу  $T$  и единичный момент  $m$ . Разбиваем балку на два участка и строим эпюры  $M_x^{(T)}, M_x^{(m)}$  (см. рис.9, рис.10).

Определим прогиб в сечении  $G$ :

$$\begin{aligned} EJ_x v_G &= \int_{AB} [M_x M_x^{(T)}] dz_1 + \int_{BG} [M_x M_x^{(T)}] dz_2 = \frac{2}{6} \cdot [20 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{20-5}{2} \cdot (-0.5) + (-5) \cdot (-1)] + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot [(-5) \cdot (-1) + 4 \cdot (-2.5) \cdot (-0.5) + 0 \cdot 0] = -1.67 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

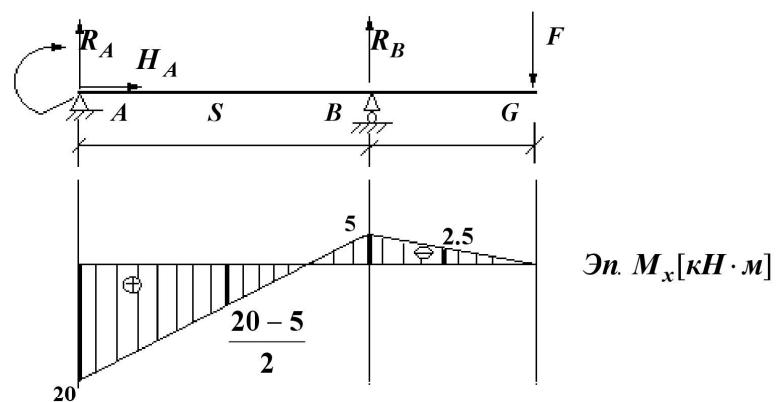


Рис.11. Эпюра изгибающих моментов  $M_x$  (перерисована с рис.7)

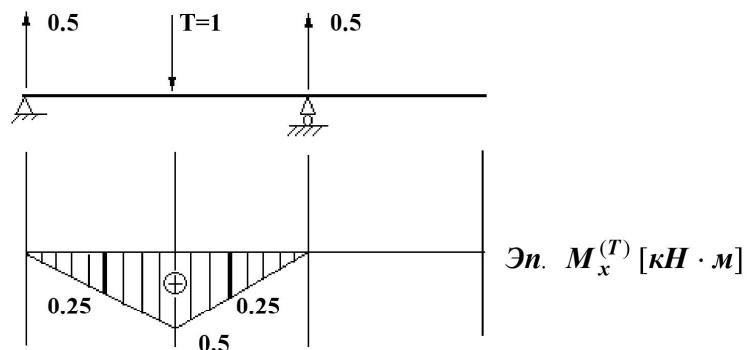


Рис.12. Эпюра изгибающих моментов  $M_x^{(T)}$  от единичной силы, приложенной в точке  $S$

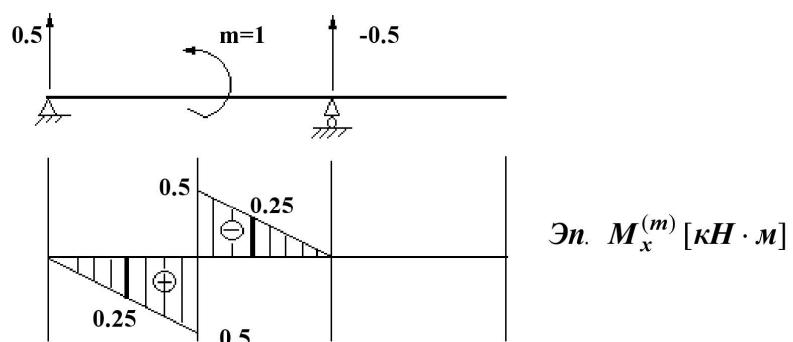


Рис.13. Эпюра изгибающих моментов  $M_x^{(m)}$  от единичного момента, приложенного в точке  $S$

Определим угол поворота в сечении  $G$ :

$$EJ_x \theta_G = \int_{AB} [M_x M_x^{(m)}] dz_1 + \int_{BG} [M_x M_x^{(m)}] dz_2 = \frac{2}{6} \cdot [20 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{20-5}{2} \cdot 0.5 + (-5) \cdot 1] + \\ + \frac{1}{6} \cdot [(-5) \cdot 1 + 4 \cdot (-2.5) \cdot 1 + 0 \cdot 1] = 0.83 \text{ kH} \cdot \text{m}^2.$$

a) Рассмотрим точку  $S$ .

К балке, свободной от внешних нагрузок, в сечении  $S$  прикладываем единичную силу  $T$  и единичный момент  $m$ . Разбиваем балку на три участка и строим эпюры  $M_x^{(T)}, M_x^{(m)}$  (см. рис.12, рис.13).

Определим прогиб в сечении  $S$ :

$$EJ_x v_S = \int_{AS} [M_x M_x^{(T)}] dz_1 + \int_{SB} \dots + \int_{BG} \dots = \\ = \frac{1}{6} \cdot [20 \cdot 0 + 4 \cdot (20 + \frac{20-5}{2}) / 2 \cdot 0.25 + \frac{20-5}{2} \cdot 0.5] + \\ + \frac{1}{6} \cdot [\frac{20-5}{2} \cdot 0.5 + 4 \cdot (\frac{20-5}{2} - 5) / 2 \cdot 0.25 + (-5) \cdot 0] + \frac{1}{6} \cdot 0 = 3.75 \text{ kH} \cdot \text{m}^3.$$

Определим угол поворота в сечении  $S$ :

$$EJ_x \theta_S = \int_{AS} [M_x M_x^{(m)}] dz_1 + \int_{SB} \dots + \int_{BG} \dots = \\ = \frac{1}{6} \cdot [20 \cdot 0 + 4 \cdot (20 + \frac{20-5}{2}) / 2 \cdot 0.25 + \frac{20-5}{2} \cdot 0.5] + \\ + \frac{1}{6} \cdot [\frac{20-5}{2} \cdot (-0.5) + 4 \cdot (\frac{20-5}{2} - 5) / 2 \cdot (-0.25) + (-5) \cdot 0] + \frac{1}{6} \cdot 0 = 2.08 \text{ kH} \cdot \text{m}^2.$$

Видно, что результаты, полученные разными методами, совпадают.

Аналогично подсчитываются значения  $EJ_x \theta$  и  $EJ_x v$  в остальных точках (за исключением прогибов на опорах), заполняется таблица 1 и затем строятся эпюры  $EJ_x \theta$  и  $EJ_x v$ .

#### **УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ** **«РАСЧЕТ БАЛКИ ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ** **ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ»**

Согласно шифру, выданному каждому студенту преподавателем, для заданной расчетной схемы балки (таблица 2) с исходными данными из таблицы 3 выполнить следующее:

1. Определить опорные реакции.
2. Вычислить поперечные силы и изгибающие моменты в характерных сечениях балки. Установить опасное сечение и выписать

расчетные значения внутренних силовых факторов.

**3.** Подобрать стальную балку стандартного двутаврового профиля по нормальным напряжениям и проверить прочность балки по касательным напряжениям.

**4.** Вычислить нормальные и касательные напряжения в ряде точек произвольного поперечного сечения балки, в котором изгибающий момент и поперечная сила имеют экстремальные значения (или близки к экстремальным) и одновременно не равны нулю. По этим данным построить эпюры нормальных, касательных напряжений, а также в точке стыка стенки и полки двутавра проверить прочность балки по IV теории прочности.

**5.** Вычислить значения углов наклона оси балки и ее прогибов (увеличенными в  $EJ_x$  раз), в разных точках на каждом участке, включая их экстремальные значения. Для вычисления прогибов использовать или метод интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки, или метод Мора. Результаты вычислений представить в табличной и графической формах.

**6.** Проверить балку на жесткость по максимальным прогибам консоли и пролета. Допускаемые прогибы принять следующими:

$$\text{в пролете } [v] = l_{\Pi} / 300,$$

$$\text{на консоли } [v] = l_K / 150.$$

Здесь  $l_{\Pi}$  – длина пролета,  $l_K$  – длина консольной части балки. Если условия жесткости не удовлетворяются, то подобрать новое сечение балки.

**7.** По заданию преподавателя выполнить контроль результатов расчета с использованием персональных ЭВМ.

**8.** В графической части расчетно-пояснительной записи должны быть представлены:

- a) Расчетная схема балки в масштабе с указанием размеров и нагрузок;
- b) Эпюра поперечных сил;
- c) Эпюра изгибающих моментов;
- d) Эпюра углов наклона оси балки  $EJ_x\theta$  (по заданию преподавателя);
- e) Эпюры нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении балки (по заданию преподавателя).

ТАБЛИЦА 2 (РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ)

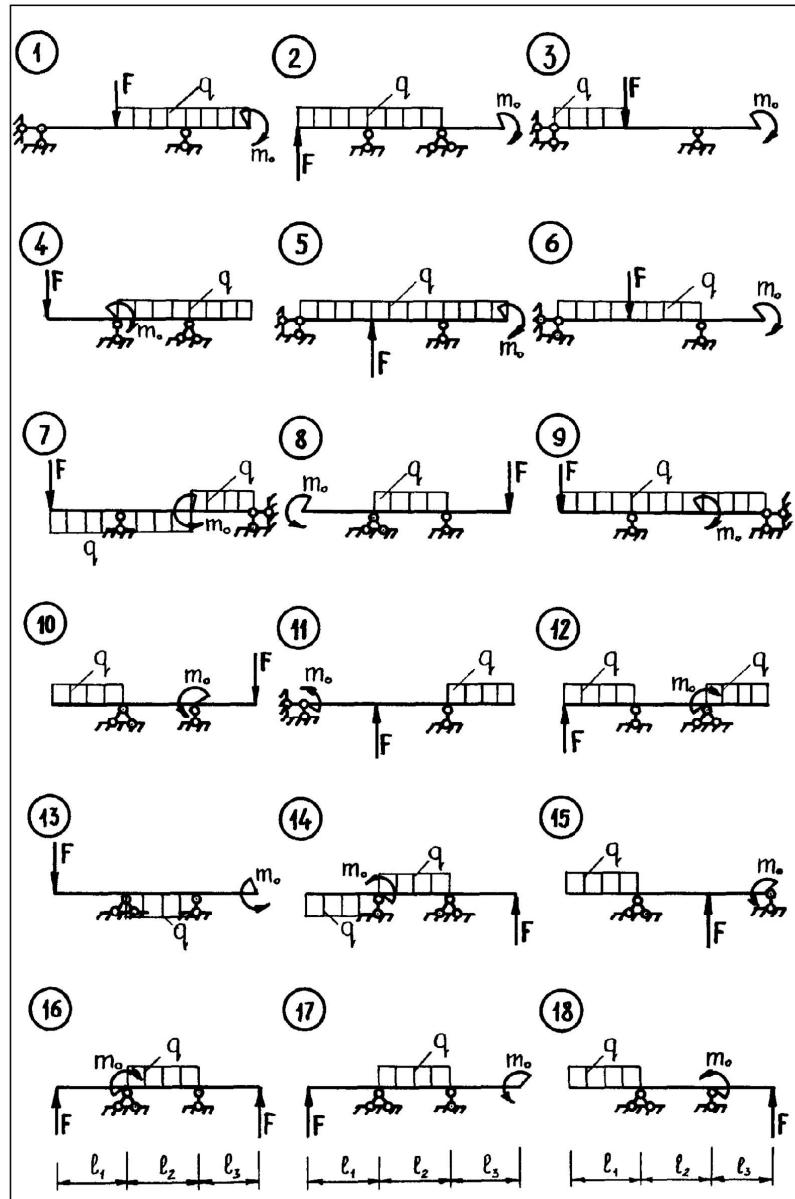


ТАБЛИЦА 2 (РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ)

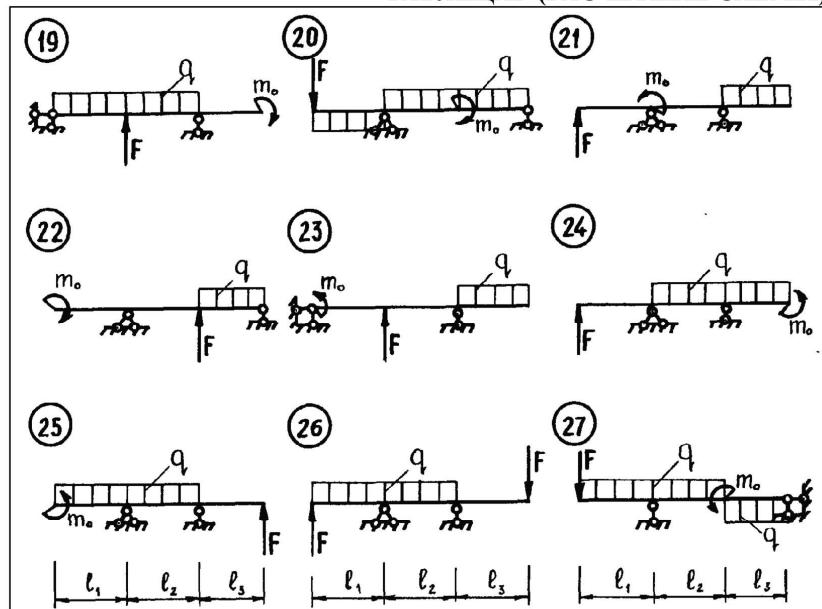


ТАБЛИЦА 3 (ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ)

	A			B	C	D
	$l_1$ (м)	$l_2$ (м)	$l_3$ (м)	$F$ (кН)	$q$ (кН/м)	$m_0$ (кН·м)
1	1.5	4.5	4.0	10	45	10
2	2.0	3.0	3.0	15	40	15
3	3.0	4.0	2.5	20	30	20
4	3.5	5.0	2.0	25	35	25
5	40	6.0	1.5	30	40	30
6	3.0	5.0	2.0	35	45	35
7	2.0	5.0	4.0	40	40	40
8	2.5	4.0	3.0	45	20	45
9	1.5	3.0	2.0	50	25	40
10	3.0	2.0	1.5	55	30	30

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ «РАСЧЕТ БАЛКИ ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ»**

*Исходные данные:*

$F_1 = 20 \text{ kH}$ ,  $F_2 = 50 \text{ kH}$ ,  $l_1 = 2\text{m}$ ,  $l_2 = 4\text{m}$ ,  $l_3 = 2\text{m}$ ,  $M_0 = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $q = 40 \text{ kN/m}$ ,  
 $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ ,  $[\tau] = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

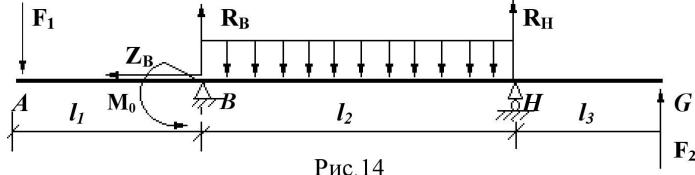


Рис. 14

**1. Определение опорных реакций.**

$$\sum mom_{Bx} = 0 \Rightarrow F_1 \cdot l_1 + M_0 - \frac{q \cdot l_2^2}{2} + R_H \cdot l_2 + F_2 \cdot (l_2 + l_3) = 0 \Rightarrow R_H = -12.5 \text{ kN}.$$

$$\sum mom_{Hx} = 0 \Rightarrow F_1 \cdot (l_1 + l_2) + M_0 + \frac{q \cdot l_2^2}{2} - R_B \cdot l_2 + F_2 \cdot l_3 = 0 \Rightarrow R_B = 142.5 \text{ kN}.$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Z_B = 0.$$

Проверка:  $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 - R_B - R_H + q \cdot l_2 - F_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ .

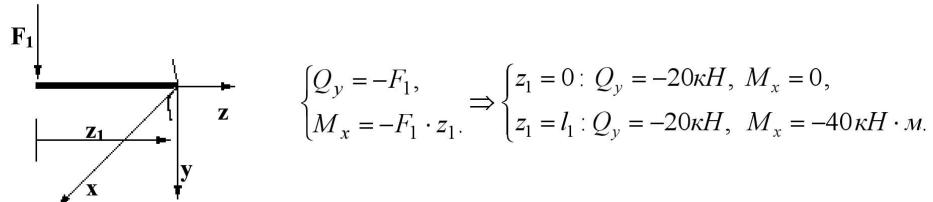
Таким образом, опорные реакции определены верно.

**2. Построение эпюр внутренних силовых факторов  $M_x$  и  $Q_y$ .**

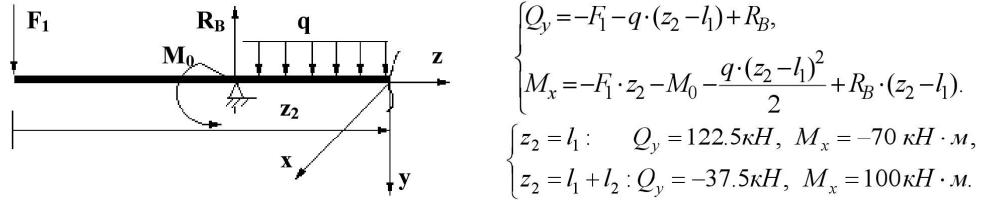
*Определение опасных сечений.*

- а) Запишем для каждого участка выражения для  $M_x$  и  $Q_y$  в виде функций от продольной координаты и вычислим их значения в характерных сечениях балки.

1 участок  $AB$   $0 \leq z_1 \leq l_1$  (рассматривается левая часть)



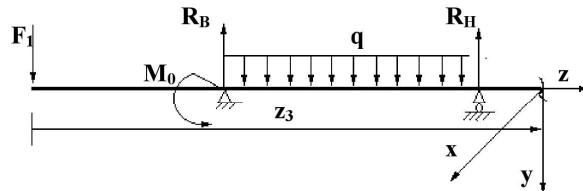
2 участок BH  $l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$  (рассматривается левая часть)



На эпюре  $Q_y$  на 2-ом участке (см. рис.16) происходит смена знака, поэтому по известным правилам в точке  $z^*$ , где  $Q_y = 0$  на эпюре  $M_x$  будет экстремальное значение. Определим этот экстремум:

$$\begin{aligned} -F_1 - q \cdot (z^* - l_1) + R_B &= 0 \Rightarrow z^* = 5.06 \text{ м} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow M_x^* &= -F_1 \cdot z^* - M_0 - \frac{q \cdot (z^* - l_1)^2}{2} + R_B \cdot (z^* - l_1) = 117.58 \text{ kH} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

3 участок HG  $l_1 + l_2 \leq z_3 \leq l_1 + l_2 + l_3$  (рассматривается левая часть)



$$\begin{cases} Q_y = -F_1 - q \cdot l_2 + R_B + R_H, \\ M_x = -F_1 \cdot z_3 - M_0 - q \cdot l_2 \cdot (z_3 - (l_1 + l_2 / 2)) + R_B \cdot (z_3 - l_1) + R_H \cdot (z_3 - (l_1 + l_2)), \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_3 = l_1 + l_2 : Q_y = -50 \text{ kH}, M_x = 100 \text{ kH} \cdot \text{м}, \\ z_3 = l_1 + l_2 + l_3 : Q_y = -50 \text{ kH}, M_x = 0. \end{cases}$$

По известным правилам строим эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$  (см. рис.16). Определим *опасные сечения*. Из эпюр на рис.16 видно, что значение поперечной силы максимально в сечении  $B$ , а значение изгибающего момента максимально в сечении  $N$ . Таким образом,  $Q_y^{\max} = 122.5 \text{ kH}$ ,  $M_x^{\max} = 117.58 \text{ kH} \cdot \text{м}$ .

### **3. Подбор двутавра из условия прочности балки по нормальным и касательным напряжениям.**

**a)** Подбор номера двутавра начинаем с условия прочности по нормальным напряжениям (4), из которого находим условие для подбора момента сопротивления  $W_x$ :

$$W_x \geq \frac{|M_x^{\max}|}{[\sigma]} = \frac{117.58 \text{кН} \cdot \text{м}}{16 \text{кН} / \text{см}^2} = \frac{11758 \text{кН} \cdot \text{см}}{16 \text{кН} / \text{см}^2} = 734.88 \text{см}^3.$$

Из таблицы сортаментов для двутавра № 36, у которого  $W_x^{№36} = 743 \text{см}^3$ , находим  $\sigma_z^{\max}$ :

$$\sigma_z^{\max} = \frac{|M_x^{\max}|}{W_x^{№36}} = \frac{11758 \text{кН} \cdot \text{см}}{743 \text{см}^3} = 15.83 \text{кН} / \text{см}^2 < [\sigma] = 16 \text{кН} / \text{см}^2,$$

Определим недогрузку:

$$\Delta = \frac{|\sigma_z^{\max} - [\sigma]|}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{|15.83 - 16|}{16} \cdot 100\% = 1.06\% < 15\% \Rightarrow \text{допустимо.}$$

**б)** Проверим двутавр № 36 по максимальным касательным напряжениям. Из таблицы сортаментов для двутавра №36 выпишем:

$$J_x = 13380 \text{см}^4, d = 0.75 \text{см}, S_x = 423 \text{см}^3, h = 36 \text{см}, \\ t = 1.23 \text{см}, W_x = 743 \text{см}^3, b = 14.5 \text{см}.$$

Согласно (5):

$$\tau_{zy}^{\max} = \frac{|Q_y^{\max}| S_x^{omc}}{J_x \cdot d} = \frac{122.5 \text{кН} \cdot 423 \text{см}^3}{13380 \text{см}^4 \cdot 0.75 \text{см}} = 5.16 \text{кН} / \text{см}^2 < [\tau] = 10 \text{кН} / \text{см}^2.$$

Следовательно, условие прочности по касательным напряжениям тоже выполняется.

### **4. Построение эпюр нормальных и касательных напряжений. Проверка прочности по IV теории.**

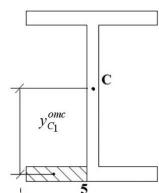
Для данной расчетной схемы максимальные значения  $Q_y^{\max}$ ,  $M_x^{\max}$  действуют в разных сечениях. Рассмотрим сечение, где  $M_x$  и  $Q_y$  близки к максимальным значениям и одновременно не равны нулю. Например, рассмотрим сечение  $B$ :  $Q_y^{(B)} = 122.5 \text{кН}$ ,  $M_x^{(B)} = -70 \text{кН} \cdot \text{м}$ .



Точка 4 (с координатой  $y_4 = h/2 = 18 \text{ см}$ ):  $\tau_{zy}^{(4)} = 0$ ;

**в)** Построим эпюры касательные напряжения  $\tau_{zx}$  в полках двутавра (см. рис.15).

Точка 5:



$$(S_x^{omc})_5 = A_l^{omc} \cdot y_{C1}^{omc} = t \cdot (b/2 - d/2) \cdot (h/2 - t/2) = \\ = 1.23 \cdot (14.5/2 - 0.75/2) \cdot (36/2 - 1.23/2) = 147.012 \text{ см}^3; \\ \tau_{zx}^{(5)} = \frac{Q_y^{(B)} \cdot (S_x^{omc})_5}{J_x \cdot t} = \frac{122.5 \text{ кН} \cdot 147.012 \text{ см}^3}{13380 \text{ см}^4 \cdot 1.23 \text{ см}} = 1.09 \text{ кН/см}^2.$$

Точка 6:  $\tau_{zx}^{(6)} = 0$ .

**г) Проверка по IV теории прочности.**

Стандартные тонкостенные профили как, например, двутавр проверяют по IV теории прочности в точке сопряжения полки и стенки (это точка 3 на рис.15), так как эта точка является *опасной* для данного сечения (нормальные и касательные напряжения в этой точке близки к максимальным значениям).

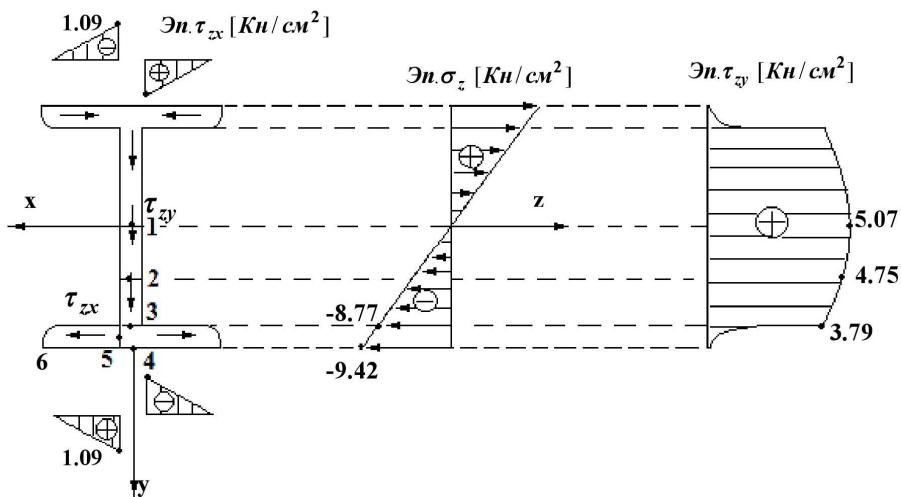


Рис.15. Эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении **B**

Согласно формуле (6):

$$\sqrt{(\sigma_z^K)^2 + 3 \cdot (\tau_{zy}^K)^2} = \sqrt{(8.77)^2 + 3 \cdot (3.79)^2} = 10.95 \text{ кН/см}^2 < [\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2.$$

Таким образом, двутавр №36 отвечает всем условиям прочности.

##### **5. Построение эпюр углов наклона оси и прогибов балки.**

Для построения эпюр  $EJv$  и  $EJ\theta$  можно применять или метод Клебша (см.п.3.1), или интеграл Мора (см.п.3.2). Ниже приводятся оба варианта расчетов.

###### **1 способ (метод Клебша (см. п.3.1))**

Для каждого участка запишем соотношение (8) и дважды его проинтегрируем.

1 участок **AB**  $0 \leq z_1 \leq l_1$  (рассматривается левая часть)

$$\begin{cases} a) EJ_x v'' = -[-F_1 \cdot z_1], \\ b) EJ_x \theta = EJv' = F_1 \cdot z_1^2 / 2 + C, \\ c) EJ_x v = F_1 \cdot z_1^3 / 6 + C \cdot z_1 + D. \end{cases}$$

2 участок **BH**  $l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$  (рассматривается левая часть)

$$\begin{cases} a) EJ_x v'' = -[-F_1 \cdot z_2 + R_B \cdot (z_2 - l_1) - M_0 \cdot (z_2 - l_1)^0 - q \cdot (z_2 - l_1)^2 / 2], \\ b) EJ_x \theta = EJv' = F_1 \cdot z_2^2 / 2 - R_B \cdot (z_2 - l_1)^2 / 2 + M_0 \cdot (z_2 - l_1) + q \cdot (z_2 - l_1)^3 / 6 + C, \\ c) EJ_x v = F_1 \cdot z_2^3 / 6 - R_B \cdot (z_2 - l_1)^3 / 6 + M_0 \cdot (z_2 - l_1)^2 / 2 + q \cdot (z_2 - l_1)^4 / 24 + C \cdot z_2 + D. \end{cases}$$

3 участок **HG**  $l_1 + l_2 \leq z_3 \leq l_1 + l_2 + l_3$  (рассматривается левая часть)

$$\begin{cases} a) EJ_x v'' = -[-F_1 \cdot z_3 + R_B \cdot (z_3 - l_1) - M_0 \cdot (z_3 - l_1)^0 - q \cdot (z_3 - l_1)^2 / 2 + \\ \quad + R_H \cdot (z_3 - l_1 - l_2) + q \cdot (z_3 - l_1 - l_2)^2 / 2], \\ b) EJ_x \theta = EJv' = F_1 \cdot z_3^2 / 2 - R_B \cdot (z_3 - l_1)^2 / 2 + M_0 \cdot (z_3 - l_1) + q \cdot (z_3 - l_1)^3 / 6 - \\ \quad - R_H \cdot (z_3 - l_1 - l_2)^2 / 2 - q \cdot (z_3 - l_1 - l_2)^3 / 6 + C, \\ c) EJ_x v = F_1 \cdot z_3^3 / 6 - R_B \cdot (z_3 - l_1)^3 / 6 + M_0 \cdot (z_3 - l_1)^2 / 2 + q \cdot (z_3 - l_1)^4 / 24 - \\ \quad - R_H \cdot (z_3 - l_1 - l_2)^3 / 6 - q \cdot (z_3 - l_1 - l_2)^4 / 24 + C \cdot z_3 + D. \end{cases}$$

Для определения числовых значений  $C$  и  $D$  рассмотрим граничные условия (12). Прогибы в опоре **B** и опоре **H** равны нулю, тогда

$$\begin{cases} v_B = 0, \Rightarrow EJ_x v_B = F_1 \cdot l_1^3 / 6 + C \cdot l_1 + D = 0, \\ v_H = 0, \Rightarrow EJ_x v_H = F_1 \cdot (l_1 + l_2)^3 / 6 - R_B \cdot (l_2)^3 / 6 + M_0 \cdot (l_2)^2 / 2 + \\ \quad + q \cdot (l_2)^4 / 24 + C \cdot (l_1 + l_2) + D. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим  $D = -106.667 \text{кН} \cdot \text{м}^3$ ,  $C = 40 \text{кН} \cdot \text{м}^2$ .

Теперь можно построить эпюры  $EJ\theta$  и  $EJv$  по их значениям в нескольких точках на каждом участке (см. рис.16). Все результаты можно свести в таблицу 4.

ТАБЛИЦА 4

$z_i, \text{м}$	$EJ_x\theta [\text{кН} \cdot \text{м}^2]$	$EJ_xv [\text{кН} \cdot \text{м}^3]$
0	40	-106.67
0.5	42.5	-86.25
1	50	-63.33
1.5	62.5	-35.42
2	80	0
3	95.42	96.25
4	28.33	163.33
4.28	0	167.40
5	-81.25	138.75
6	-193.33	0
6.5	-237.08	-108.13
7	-268.33	-235
7.5	-287.08	-374.38
8	-293.33	-520

Определение экстремумов.

1) На 2-ом участке экстремум  $M_x$  определен выше:

$$M_x^* = M_x(z^*) = 117.58 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

2) Определим экстремум  $EJ_x\theta$  (по требованию преподавателя). На втором участке из условия  $M_x = 0$  получаем:

$$-F_1 \cdot z^{**} - M_0 - \frac{q \cdot (z^{**} - l_1)^2}{2} + R_B \cdot (z^{**} - l_1) = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, выбираем подходящий для нас корень  $z^{**} = 2.64 \text{м}$ . Теперь можно найти экстремум  $EJ_x\theta$ :

$$\begin{aligned} EJ\theta^{**} &= F_1 \cdot (z^{**})^2 / 2 - R_B \cdot (z^{**} - l_1)^2 / 2 + \\ &+ M_0 \cdot (z^{**} - l_1) + q \cdot (z^{**} - l_1)^3 / 6 + C = 101.46 \text{кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

3) Определим экстремум  $EJ_xv$  из условия  $EJ_x\theta = 0$  на втором участке:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot (z^{***})^2 / 2 - R_B \cdot (z^{***} - l_1)^2 / 2 + \\ + M_0 \cdot (z^{***} - l_1) + q \cdot (z^{***} - l_1)^3 / 6 + C = 0 \end{aligned}$$

Решить это уравнение можно методом подбора. Первое приближение берется из эпюры  $EJ_x\theta$ . Окончательно получим  $z^{***} = 4.28m$ .

Теперь можно найти экстремум  $EJ_xv$ :

$$EJ_xv^{***} = F_1 \cdot (z^{***})^3 / 6 - R_B \cdot (z^{***} - l_1)^3 / 6 + M_0 \cdot (z^{***} - l_1)^2 / 2 + \\ + q \cdot (z^{***} - l_1)^4 / 24 + C \cdot z^{***} + D = 167.40 \text{ kH} \cdot m.$$

### **Примечание**

Расстояния  $z^*, z^{**}, z^{***}$  допускается определять и графически, если эпюры построены в масштабе.

### **2 способ (с применением интеграла Мора (см. п.3.2))**

Просчитаем прогибы балки с помощью интеграла Мора в точках  $A$ ,  $G$  и  $S$  (см. рис.17).

#### a) Рассмотрим точку $A$ .

К балке, свободной от внешних нагрузок, в сечении  $A$  прикладываем единичную силу  $T$ . Разбиваем балку на три участка и строим эпюру  $M_x^{(T)}$  (см. рис.18).

Определим прогиб в сечении  $A$ :

$$EJ_xv_A = \int_{AB} [M_x M_x^{(T)}] dz_1 + \int_{BH} \dots + \int_{HG} \dots = \\ = \frac{2}{6} \cdot [0 + 4 \cdot (-20) \cdot (-1) + (-40) \cdot (-2)] + \\ + \frac{4}{6} \cdot [(-70) \cdot (-2) + 4 \cdot (95) \cdot (-1) + 0] = -106.67 \text{ kH} \cdot m^3.$$

#### б) Рассмотрим точку $G$ .

К балке, свободной от внешних нагрузок, в сечении  $G$  прикладываем единичную силу  $T$ . Разбиваем балку на три участка и строим эпюры  $M_x^{(T)}$  (см. рис.19).

Определим прогиб в сечении  $G$ :

$$EJ_xv_G = \int_{AB} [M_x M_x^{(T)}] dz_1 + \int_{BH} \dots + \int_{HG} \dots = \\ = \frac{2}{6} \cdot 0 + \frac{4}{6} \cdot [(-70) \cdot 0 + 4 \cdot 95 \cdot (-1) + 100 \cdot (-2)] + \\ + \frac{2}{6} \cdot [100 \cdot (-2) + 4 \cdot 50 \cdot (-1) + 0] = -520 \text{ kH} \cdot m^3.$$

#### в) Рассмотрим точку $S$ .

К балке, свободной от внешних нагрузок, в сечении  $S$  прикладываем единичную силу  $T$ . Разбиваем балку на четыре участка и строим эпюры  $M_x^{(T)}$  (см. рис.20).

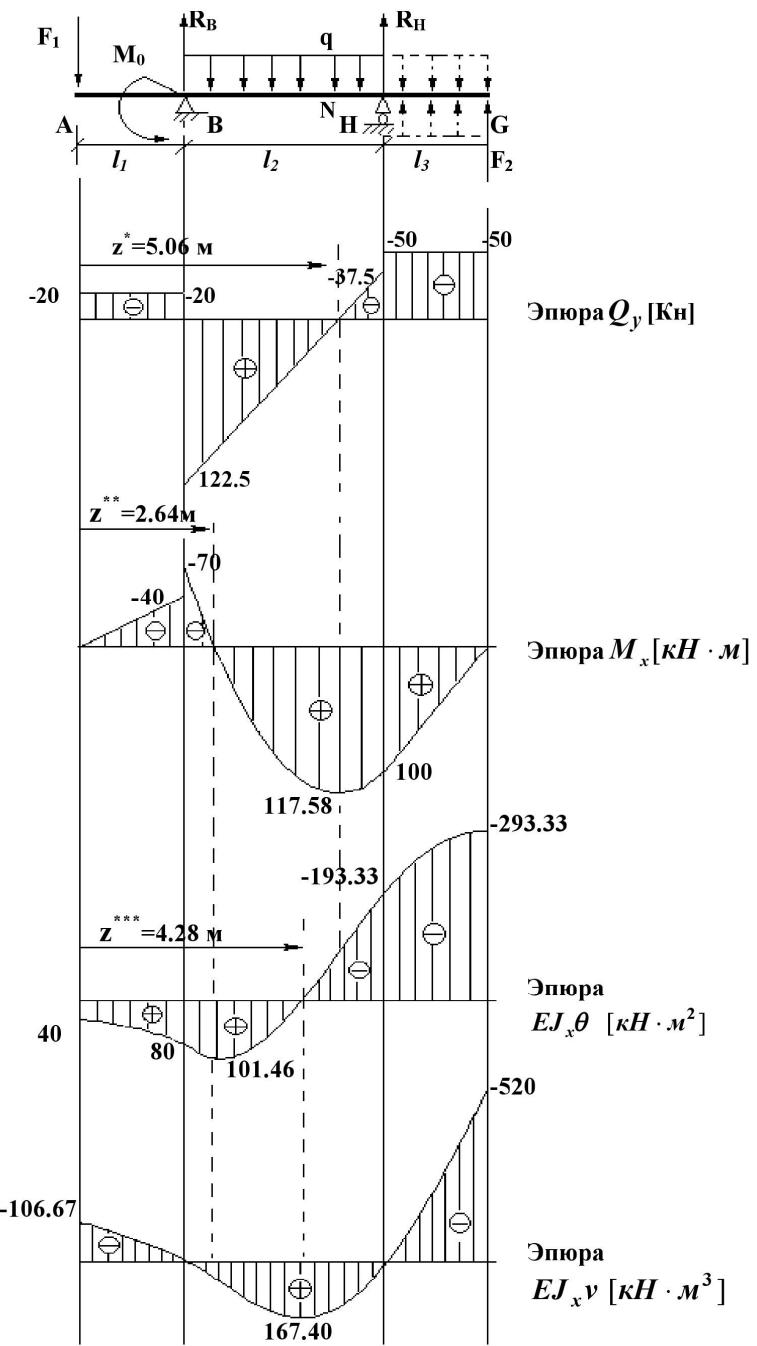


Рис.16. Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, углов поворота и прогибов

Определим прогиб в сечении  $S$ :

$$EJ_x v_S = \int_{AB} [M_x M_x^{(T)}] dz_1 + \int_{BS} \dots + \int_{SH} \dots + \int_{HG} \dots = \frac{2}{6} \cdot 0 + \frac{2}{6} \cdot [(-70) \cdot 0 + 4 \cdot 32.5 \cdot 0.5 + 95 \cdot 1] + \\ + \frac{2}{6} \cdot [95 \cdot 1 + 4 \cdot 117.5 \cdot 0.5 + 0] = 163.33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Просчитав прогибы двумя способами, можно увидеть, что результаты расчетов совпадают.

### **6. Проверка балки на жесткость.**

Вычислим допускаемые величины прогибов левой  $AB$ , правой  $HG$  консолей и в пролете балки  $BH$ :

$$[v]_{конс}^{AB} = l_1 / 150 = 200 / 150 = 1.33 \text{ см},$$

$$[v]_{конс}^{HG} = l_3 / 150 = 200 / 150 = 1.33 \text{ см},$$

$$[v]_{прол}^{BH} = l_2 / 150 = 400 / 300 = 1.33 \text{ см}.$$

Учтем, что  $1 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 = 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3$ . Из таблицы сортаментов для двутавра №36  $J_x = 13380 \text{ см}^4$ .

Определим максимальный прогиб левой консоли  $AB$ :

$$|v_{конс}^{AB}|_{max} = \frac{106.67 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^4 \cdot 13380 \text{ см}^4} = 0.4 \text{ см} < [v]_{конс}^{AB} = 1.33 \text{ см}.$$

Вычислим максимальный прогиб правой консоли  $HG$ :

$$|v_{конс}^{HG}|_{max} = \frac{520 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^4 \cdot 13380 \text{ см}^4} = 1.94 \text{ см} > [v]_{конс}^{HG} = 1.33 \text{ см}.$$

Определим максимальный прогиб пролета  $BH$ :

$$|v_{прол}^{BH}|_{max} = \frac{167.40 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^4 \cdot 13380 \text{ см}^4} = 0.63 \text{ см} < [v]_{прол}^{BH} = 1.33 \text{ см}.$$

Для правой консоли  $HG$  условие жесткости не выполняется. Номер подходящего двутавра можно найти путем перебора. Более коротким является следующий подход.

Запишем условие жесткости для правой консоли  $HG$ :

$$(v_{конс}^{HG})_{max} = \frac{EJ_x v}{EJ_x} = \frac{520 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3}{EJ_x} < 1.33 \text{ см},$$

Отсюда находим условие для момента инерции  $J_x$ :

$$J_x \geq \frac{520 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3}{1.33 \text{ см} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^4} = 19548 \text{ см}^4.$$

Этому условию удовлетворяет двутавр №45, у которого  $J_x = 27696 \text{ см}^4$ .

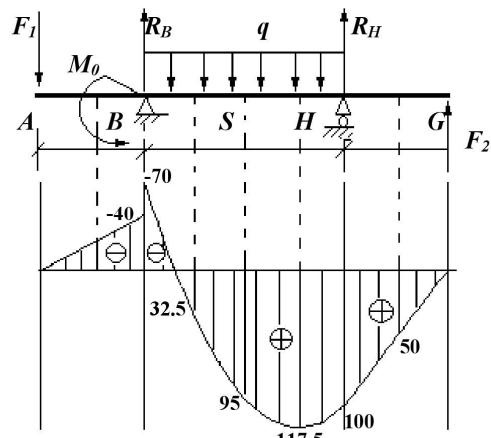


Рис.17. Эпюра изгибающих моментов  $M_x$

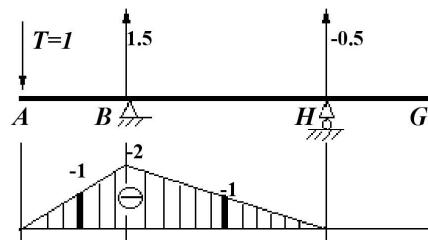


Рис.18. Эпюра моментов  $M_x^{(T)}$  от единичной силы, приложенной в точке А

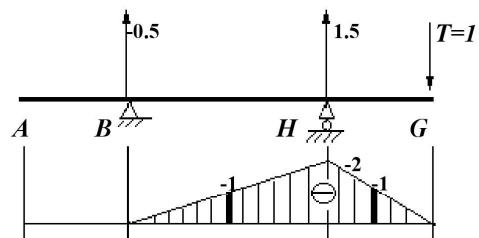


Рис.19. Эпюра моментов  $M_x^{(T)}$  от единичной силы, приложенной в точке Г

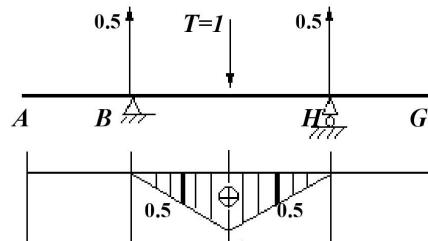


Рис.20. Эпюра моментов  $M_x^{(T)}$  от единичной силы, приложенной в точке S

Проведем проверку жесткости для двутавра №45:

Вычислим максимальный прогиб правой консоли **HG**:

$$(v_{\text{конс}}^{\text{HG}})^{\max} = \frac{520 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^4 \cdot 27696 \text{ см}^4} = 0.94 \text{ см} < [v]_{\text{конс}}^{\text{HG}} = 1.33 \text{ см}.$$

**Вывод:** Подобранный ранее двутавр №36 удовлетворяет условиям прочности, но не удовлетворяет требованиям к жесткости балки. Двутавр №45 удовлетворяет и условиям прочности, и условиям жесткости.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «РАСЧЕТ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ»

1. Что такое поперечная сила? Правило знаков для поперечной силы.
2. Что такое изгибающий момент? Правило знаков для изгибающего момента.
3. Как определить опасное сечение?
4. Нормальные напряжения при изгибе. Момент сопротивления.
5. Формула Журавского для касательных напряжений при изгибе.
6. Как распределены нормальные напряжения в поперечном сечении балки? Зависит ли это распределение от формы сечения?
7. Как распределены касательные напряжения в прямоугольном и двутавровом поперечных сечениях?
8. Условие прочности по нормальным напряжениям.
9. Условие прочности по касательным напряжениям.
10. Проверка прочности по IV теории.
11. Что значит балка жесткая?
12. Условия жесткости для консоли и пролета балки.
13. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
14. Метод Клебша для интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси.
15. Границные условия для определения постоянных интегрирования.
16. Метод определения прогибов на основе интеграла Мора.
17. Общий порядок расчета балки.

## Приложение 1

### ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ДАННОГО ЗАДАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРИКЛАДНОГО ПАКЕТА MATHEMATICA 5

"ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ"

```
<< Graphics`FilledPlot`  
F1=20;  
F2=50;  
m0=30;  
q=40;  
l1=2;  
l2=4;  
l3=2;
```

"ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР RH И RB"

```
Solve[{F1*l1+m0-q*l2^2/2+RH*l2+F2*(l2+l3)==0,  
F1*(l1+l2)+m0-RB*l2+q*l2^2/2+F2*l3==0}, {RB, RH}]  
{RH->-25/2, RB->285/2}  
N[r={RB, RH} /. %];  
N[RB=r[[1, 1]]]  
N[RH=r[[1, 2]]]  
142.5  
-12.5
```

"ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ ОПОР"

```
-RB-RH-F2+F1+q*l2  
0
```

"ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ Qy НА КАЖДОМ УЧАСТКЕ"

```
Qy1[z_]:= -F1;  
Qy2[z_]:= -F1-q*(z-l1)+RB;  
Qy3[z_]:= -F1-q*l2+RB+RH;
```

"ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ Qy НА КАЖДОМ УЧАСТКЕ"

```
grafq1=FilledPlot[Qy1[z],{z,0,l1},Fills->GrayLevel[.7],  
DisplayFunction->Identity]  
-Graphics-  
  
grafq2=FilledPlot[Qy2[z],{z,l1,l1+l2},Fills->GrayLevel[.7],  
DisplayFunction->Identity]  
-Graphics-
```

```

grafq3=FilledPlot[Qy3[z],{z,11+12,11+12+13},
Fills→GrayLevel[.7],DisplayFunction→Identity]
-Graphics-

"ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА Mx НА КАЖДОМ УЧАСТКЕ"

Mx1[z_]:= -F1*z;
Mx2[z_]:= -F1*z + RB*(z-11) - m0 -  $\frac{q*(z-11)^2}{2}$ ;
Mx3[z_]:= -F1*z + RB*(z-11) - m0 - q*12*(z-11-12/2) + RH*(z-11-12);

"ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА Mx НА КАЖДОМ УЧАСТКЕ"

grafm1=FilledPlot[Mx1[z],{z,0,11},Fills→GrayLevel[.7],
DisplayFunction→Identity]
-Graphics-

grafm2=FilledPlot[Mx2[z],{z,11,11+12},Fills→GrayLevel[.7],
DisplayFunction→Identity]
-Graphics-

grafm3=FilledPlot[Mx3[z],{z,11+12,11+12+13},
Fills→GrayLevel[.7],DisplayFunction→Identity]
-Graphics-

"ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДАННОЙ СХЕМЫ НАГРУЖЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ
КОНСТАНТ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С, D"

Solve[{F1*11^3/6+c1*11+d1==0,F1*(11+12)^3/6+m0*(12)^2/2+q*(12)^
4/24-RB*(12)^3/6+c1*(11+12)+d1==0},{c1,d1}]
{{c1→40, d1→- $\frac{320}{3}$ }}
cd={c1,d1} /.%  

{{40, - $\frac{320}{3}$ }}
N[c=cd[[1,1]]]
N[d=cd[[1,2]]]
40.
-106.667

"ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОГИБОВ ЕJY И УГЛОВ НАКЛОНА ОСИ ЕJθ НА КАЖДОМ
УЧАСТКЕ"

EJθ1[z_]:=F1*z^2/2+c;
EJθ2[z_]:=F1*z^2/2+m0*(z-11)+q*(z-11)^3/6-RB*(z-11)^2/2+c;
EJθ3[z_]:=F1*z^2/2+m0*(z-11)+q*(z-11)^3/6-RB*(z-11)^2/2-RH*(z-
11-12)^2/2-q*(z-11-12)^3/6+c;

```

```

grafq3=FilledPlot[Qy3[z],{z,11+12,11+12+13},
Fills→GrayLevel[.7],DisplayFunction→Identity]
-Graphics-

"ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА Mx НА КАЖДОМ УЧАСТКЕ"

Mx1[z_]:= -F1*z;
Mx2[z_]:= -F1*z + RB*(z-11) - m0 -  $\frac{q*(z-11)^2}{2}$ ;
Mx3[z_]:= -F1*z + RB*(z-11) - m0 - q*12*(z-11-12/2) + RH*(z-11-12);

"ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА Mx НА КАЖДОМ УЧАСТКЕ"

grafm1=FilledPlot[Mx1[z],{z,0,11},Fills→GrayLevel[.7],
DisplayFunction→Identity]
-Graphics-

grafm2=FilledPlot[Mx2[z],{z,11,11+12},Fills→GrayLevel[.7],
DisplayFunction→Identity]
-Graphics-

grafm3=FilledPlot[Mx3[z],{z,11+12,11+12+13},
Fills→GrayLevel[.7],DisplayFunction→Identity]
-Graphics-

"ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДАННОЙ СХЕМЫ НАГРУЖЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ
КОНСТАНТ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С, D"

Solve[{F1*11^3/6+c1*11+d1==0,F1*(11+12)^3/6+m0*(12)^2/2+q*(12)^
4/24-RB*(12)^3/6+c1*(11+12)+d1==0},{c1,d1}]
{{c1→40, d1→- $\frac{320}{3}$ }}
cd={c1,d1} /.%  

{{40, - $\frac{320}{3}$ }}
N[c=cd[[1,1]]]
N[d=cd[[1,2]]]
40.
-106.667

"ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОГИБОВ ЕJY И УГЛОВ НАКЛОНА ОСИ ЕJθ НА КАЖДОМ
УЧАСТКЕ"

EJθ1[z_]:=F1*z^2/2+c;
EJθ2[z_]:=F1*z^2/2+m0*(z-11)+q*(z-11)^3/6-RB*(z-11)^2/2+c;
EJθ3[z_]:=F1*z^2/2+m0*(z-11)+q*(z-11)^3/6-RB*(z-11)^2/2-RH*(z-
11-12)^2/2-q*(z-11-12)^3/6+c;

```

```

EJv1[z_]:=F1*z^3/6+c*z+d;
EJv2[z_]:=F1*z^3/6+m0*(z-l1)^2/2+q*(z-l1)^4/24-RB*(z-
l1)^3/6+c*z+d;
EJv3[z_]:=F1*z^3/6+m0*(z-l1)^2/2+q*(z-l1)^4/24-RB*(z-l1)^3/6-
RH*(z-l1-l2)^3/6-q*(z-l1-l2)^4/24+c*z+d;

"ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ЭПЮРЫ Мx НА ВТОРОМ УЧАСТКЕ"
N[Solve[Qy2[z]==0,z]]
{{z→5.0625}}
Mx2[5.0625]
117.578
"ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ЭПЮРЫ ЕJθ НА ВТОРОМ УЧАСТКЕ"
N[Solve[Mx2[z]==0,z]]
{{z→2.63785},{z→7.48715}}
N[EJθ2[2.637]]
101.46
"ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ЭПЮРЫ ЕJv НА ВТОРОМ УЧАСТКЕ"
FindRoot[EJθ2[z]==0,{z,4.}]
{z→4.28203}
N[EJv2[3.86254139]]
158.56

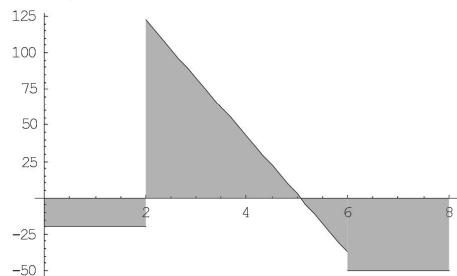
"ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРОГИБОВ ЕJv И УГЛОВ НАКЛОНА ОСИ ЕJθ"
grafEJ01=FilledPlot[EJθ1[z],{z,0,l1},Fills→GrayLevel[.7],
DisplayFunction→Identity]
-Graphics-
grafEJ02=FilledPlot[EJθ2[z],{z,l1,l1+l2},Fills→GrayLevel[.7],
DisplayFunction→Identity]
-Graphics-
grafEJ03=FilledPlot[EJθ3[z],{z,l1+l2,l1+l2+l3},
Fills→GrayLevel[.7],DisplayFunction→Identity]
-Graphics-
grafEJv1=FilledPlot[EJv1[z],{z,0,l1},
Fills→GrayLevel[.7],DisplayFunction→Identity]
-Graphics-
grafEJv2=FilledPlot[EJv2[z],{z,l1,l1+l2},Fills→GrayLevel[.7],
DisplayFunction→Identity]
-Graphics-
grafEJv3=FilledPlot[EJv3[z],{z,l1+l2,l1+l2+l3},
Fills→GrayLevel[.7],DisplayFunction→Identity]
-Graphics-

Show[grafq1,grafq2,grafq3,DisplayFunction→
$DisplayFunction,PlotRange→All]
Show[grafm1,grafm2,grafm3,DisplayFunction→
$DisplayFunction,PlotRange→All]
Show[grafEJθ1,grafEJθ2,grafEJθ3,DisplayFunction→
$DisplayFunction,PlotRange→All]
Show[grafEJv1,grafEJv2,grafEJv3,DisplayFunction→

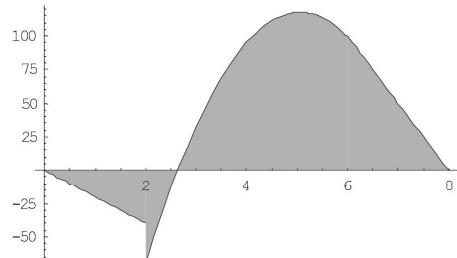
```

```
$DisplayFunction,PlotRange->All]
```

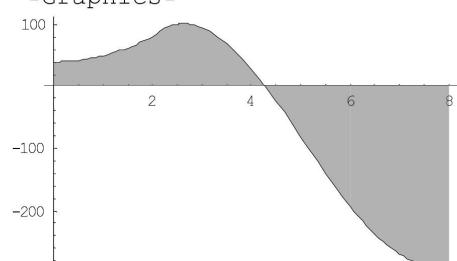
"ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ Q<sub>Y</sub>, M<sub>X</sub>, E<sub>Jθ</sub>, E<sub>JV</sub> ОТЛОЖЕНЫ ВЫШЕ ОСИ АБСЦИСС"



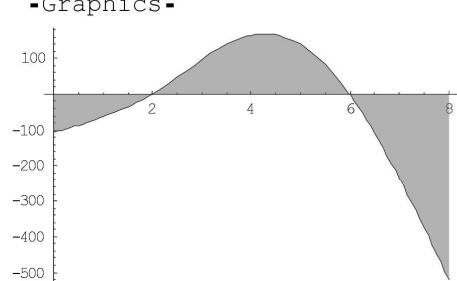
-Graphics-



-Graphics-



-Graphics-



-Graphics-

