МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Методические указания
к выполнению расчетно-графической работы
для студентов направления подготовки
«Строительство»

Казань
2014

УДК 539.3
ББК 22.251

Методические указания к расчетно-графической работе «**Изгиб прямоугольной плиты**» / Составители: Каюмов Р.А., Зиннуров Р.А., Шакирзянов Ф.Р. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2014. – 12 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

Приводятся постановка задачи, формулы для вычисления внутренних силовых факторов, напряжений для шарнирно-опертой по контуру прямоугольной плиты на упругом основании под действием двух сосредоточенных сил и равномерно-распределенной нагрузки.

Определяются общая схема и последовательность выполнения расчетно-графической работы, даются рекомендации для ее самостоятельного выполнения и примеры решения задач.

Ил. 8; табл. 1

Рецензент: к.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» КГАСУ **Шигабутдинов Ф.Г.**

УДК 539.3
ББК 22.251

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2014.
© Каюмов Р.А., Зиннуров Р.А., Шакирзянов Ф.Р., 2014

Рассматривается задача об изгибе шарнирно-опертой по контуру прямоугольной фундаментной бетонной плиты толщины h, лежащей на грунте с коэффициентом постели k (рис.1). Воздействие на плиту представляется в виде сосредоточенных сил P_1, P_2 (например, реакции от колонн) и постоянной распределенной нагрузки q (вес плиты и эксплуатационная нагрузка).

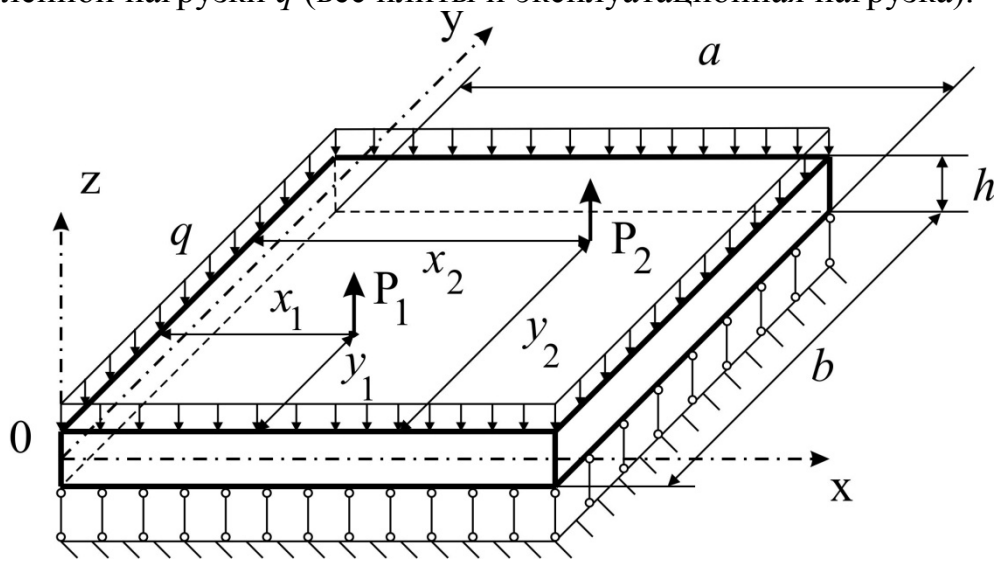

Рис. 1.

Геометрические характеристики (a, b, h, x_1, x_2, y_1, y_2), механические константы (модуль упругости E=2400 *кН/см*^{2} и коэффициент Пуассона ν =0.2) и силовые параметры (P_1, P_2) выбираются по индивидуальному шифру из таблицы 1.

Таблица 1

	А	**Б**	**В**	**Г**	**А**	**Б**	**В**	**Г**	**А**	**Б**	**В**
	a(см)	*b(см)*	*h(см)*	*x_1(см)*	*y_1(см)*	*x_2(см)*	*y_2(см)*	*P_1(кН)*	*P_2(кН)*	*q(кН /см^2)*	*k(кН /см^3)*
1	220	500	10	20	20	190	180	10	-100	0.0001	0.01
2	240	480	15	40	40	170	160	20	-90	0.0002	0.03
3	260	460	20	60	50	150	140	30	-80	0.0003	0.05
4	280	420	30	80	60	130	120	-40	-70	0.0004	0.07
5	300	390	40	100	80	110	100	-50	60	0.0005	0.1
6	320	350	45	120	100	90	80	-60	50	0.0006	0.12
7	340	310	50	140	120	70	60	-70	40	0.0007	0.15
8	360	270	55	160	140	50	50	80	30	0.0008	0.17
9	380	230	60	180	160	30	40	90	20	0.0009	0.18
0	400	200	65	200	180	10	20	100	10	0.001	0.2

Требуется найти выражение для прогиба плиты $W(x,y)$, выражения для нормальных σ_x, σ_y и касательных напряжений τ_{xy} и построить их эпюры. При заданных значениях расчетного сопротивления R_b, R_{bt} проверить прочность плиты по критерию Г.А. Гениева [3].

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА

Дифференциальное уравнение для определения прогиба плиты, лежащей на упругом основании, записывается в виде

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)=P_1\,\delta(x_1,y_1)+P_2\,\delta(x_2,y_2)-kW-q, \qquad (1)$$

где $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость плиты, $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$ – координаты сосредоточенных нагрузок, $\delta(x_p,y_p)$ – дельта-функция Дирака (см. в справочниках по математике [8]), которая везде равна нулю кроме точки $(x_p,\ y_p)$.

Впервые эту задачу решил Навье (1820 г.). Он использовал подход, который фактически является частным случаем метода Бубнова-Галеркина [5, 7]. Ищем прогибы $W(x,\ y)$ в виде двойного ряда:

$$W(x,\ y)=\sum_{m=1,2,3..}^{\infty}\ \sum_{n=1,2,3..}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \qquad (2)$$

Известно [5, 7], что такой вид решения обеспечивает выполнение условия шарнирного закрепления.

Для получения значений коэффициентов A_{mn} подставим соотношения (2) в уравнение (1), умножим на $\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$ и проинтегрируем по области, которую занимает пластина (т.е. в интервале $0\le x\le a,\ 0\le y\le b$). Это приводит к следующему результату:

$$A_{mn}=\frac{P_1\sin\dfrac{\pi m x_1}{a}\sin\dfrac{\pi n y_1}{b}+P_2\sin\dfrac{\pi m x_2}{a}\sin\dfrac{\pi n y_2}{b}-q\dfrac{ab(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{mn\pi^2}}{\left[D\pi^4\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\dfrac{ab}{4}}, \qquad (3)$$

$$m=1,\ 2,\ 3,\ ...;\ n=1,\ 2,\ 3,\ ...$$

Значит, все коэффициенты ряда (2) легко вычисляются по формуле (3).

Выражения для нормальных и касательных напряжений определяются из следующих соотношений:

$$\sigma_x=-\frac{E\cdot z}{(1-\nu^2)}\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right), \qquad (4)$$

$$\sigma_y=-\frac{E\cdot z}{(1-\nu^2)}\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right), \qquad (5)$$

$$\tau_{xy}=-\frac{E\cdot z}{(1+\nu)}\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right). \qquad (6)$$

Здесь $-h/2\le z\le h/2,\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b.$

Расчет на прочность

Согласно критерию Г.А. Гениева, прочность бетона будет обеспечена если

$$f = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)(R_b - R_{bt})}{R_b R_{bt}} < 1. \qquad (7)$$

Здесь f – функция, определяющая уровень напряженности бетона, R_b – расчетное сопротивление бетона сжатию, R_{bt} – расчетное сопротивление бетона растяжению, σ_1, σ_2 – главные напряжения.

Главные напряжения σ_1, σ_2, определяются по формулам:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}. \qquad (8)$$

Максимальные по высоте напряжения в плите возникают, согласно (4)-(6), при $z = \pm h/2$, т.е. на ее поверхности. Подставляя (2) в (4)-(6) при $z = h/2$ строим эпюры напряжений в разных сечениях на верхней поверхности плиты. А подставляя (2) в (4)-(6) при $z = -h/2$ строим эпюры напряжений в разных сечениях на нижней поверхности плиты. Это позволяет определить опасные точки и провести проверку прочности бетона на верхней и нижней поверхности плиты в этих точках.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Исходные данные:

$a = 250$ *см*, $b = 300$ *см*, $h = 20$ *см*,

$E = 2400$ *кН / см*^{2}, $\nu = 0.2$,

$k = 0.01$ *кН / см*^{3}, $q = 0.0005$ *кН / см*^{2},

$P_1 = 30$ *кН*, $x_1 = 50$ *см*, $y_1 = 100$ *см*,

$P_2 = -20$ *кН*, $x_2 = 150$ *см*, $y_2 = 200$ *см*.

Требуется найти выражение для прогиба плиты $W(x,y)$, выражения для нормальных напряжений σ_x, σ_y и касательного напряжения τ_{xy} и построить их эпюры. При заданных значениях расчетного сопротивления R_b, R_{bt} проверить прочность плиты по критерию Г.А. Гениева.

Решение:

1. *Определение прогибов*

Цилиндрическая жесткость плиты равна

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2400 \cdot 20^3}{12 \cdot (1 - 0.2^2)} = 1666666.7 \ \ кН \cdot см.$$

Дифференциальное уравнение изгиба плиты записывается в виде:

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right) = P_1\delta(x_1, y_1) + P_2\delta(x_2, y_2) - kW - q =$$
$$= 30\delta(x-50)\delta(y-100) - 20\delta(x-150)\delta(y-200) - 0.01W - 0.0005. \qquad (9)$$

В соответствии с выше изложенным, прогибы ищем в виде следующего ряда:

$$W(x,\,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (10)$$

где

$$A_{mn}=\frac{P_1\sin\frac{\pi m x_1}{a}\sin\frac{\pi n y_1}{b}+P_2\sin\frac{\pi m x_2}{a}\sin\frac{\pi n y_2}{b}-q\frac{ab(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{mn\pi^2}}{\left[D\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{ab}{4}},$$

Для упрощения расчетов учтем только несколько членов ряда ($m=1,2,3;\ \ n=1,2,3$). Предварительно вычислим коэффициенты A_{mn}:

$$A_{11}=\frac{P_1\cdot\sin\frac{\pi x_1}{a}\cdot\sin\frac{\pi y_1}{b}+P_2\cdot\sin\frac{\pi x_2}{a}\cdot\sin\frac{\pi y_2}{b}-q\cdot\frac{a\cdot b\cdot 4}{\pi^2}}{\left[D\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{a\cdot b}{4}}=-0.00676,$$

$$A_{12}=\frac{P_1\cdot\sin\frac{\pi x_1}{a}\cdot\sin\frac{2\pi y_1}{b}+P_2\cdot\sin\frac{\pi x_2}{a}\cdot\sin\frac{2\pi y_2}{b}}{\left[D\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{a\cdot b}{4}}=0.00281,$$

$$A_{13}=\frac{P_1\cdot\sin\frac{\pi x_1}{a}\cdot\sin\frac{3\pi y_1}{b}+P_2\cdot\sin\frac{\pi x_2}{a}\cdot\sin\frac{3\pi y_2}{b}-q\cdot\frac{a\cdot b\cdot 4}{3\cdot\pi^2}}{\left[D\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{a\cdot b}{4}}=-0.000123,$$

$$A_{21}=\frac{P_1\cdot\sin\frac{2\pi x_1}{a}\cdot\sin\frac{\pi y_1}{b}+P_2\cdot\sin\frac{2\pi x_2}{a}\cdot\sin\frac{\pi y_2}{b}}{\left[D\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{a\cdot b}{4}}=0.00201,$$

$$A_{22}=\frac{P_1\cdot\sin\frac{2\pi x_1}{a}\cdot\sin\frac{2\pi y_1}{b}+P_2\cdot\sin\frac{2\pi x_2}{a}\cdot\sin\frac{2\pi y_2}{b}}{\left[D\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{a\cdot b}{4}}=0.000404,$$

$$A_{23}=\frac{P_1\cdot\sin\frac{2\pi x_1}{a}\cdot\sin\frac{3\pi y_1}{b}+P_2\cdot\sin\frac{2\pi x_2}{a}\cdot\sin\frac{3\pi y_2}{b}}{\left[D\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{a\cdot b}{4}}=0,$$

$$A_{31}=\frac{P_1\cdot\sin\frac{3\pi x_1}{a}\cdot\sin\frac{\pi y_1}{b}+P_2\cdot\sin\frac{3\pi x_2}{a}\cdot\sin\frac{\pi y_2}{b}-q\cdot\frac{a\cdot b\cdot 4}{3\cdot\pi^2}}{\left[D\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{a\cdot b}{4}}=0.000406,$$

$$A_{32}=\frac{P_1\cdot\sin\frac{3\pi x_1}{a}\cdot\sin\frac{2\pi y_1}{b}+P_2\cdot\sin\frac{3\pi x_2}{a}\cdot\sin\frac{2\pi y_2}{b}}{\left[D\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{a\cdot b}{4}}=0.000134,$$

$$A_{33}=\frac{P_1\cdot\sin\frac{3\pi x_1}{a}\cdot\sin\frac{3\pi y_1}{b}+P_2\cdot\sin\frac{3\pi x_2}{a}\cdot\sin\frac{3\pi y_2}{b}-q\cdot\frac{a\cdot b\cdot 4}{9\cdot\pi^2}}{\left[D\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{9}{a^2}+\frac{9}{b^2}\right)^2+k\right]\cdot\frac{a\cdot b}{4}}=0.$$

Тогда из соотношения (10) получим перемещение в виде:

$$W(x_i,\,y_j)=A_{11}\sin\frac{\pi x_i}{a}\sin\frac{\pi y_j}{b}+A_{12}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}+ \\ +A_{13}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}+A_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}+\ldots. \qquad (11)$$

Определим прогибы в сечениях.

Сечение $y=b/2$:

x	0	0.25 a	0.5 a	0.75 a	a
W	0	-0.00248	-0.00706	-0.00782	0

Аналогично находим прогибы в других сечениях и строим эпюру прогибов (рис. 2).

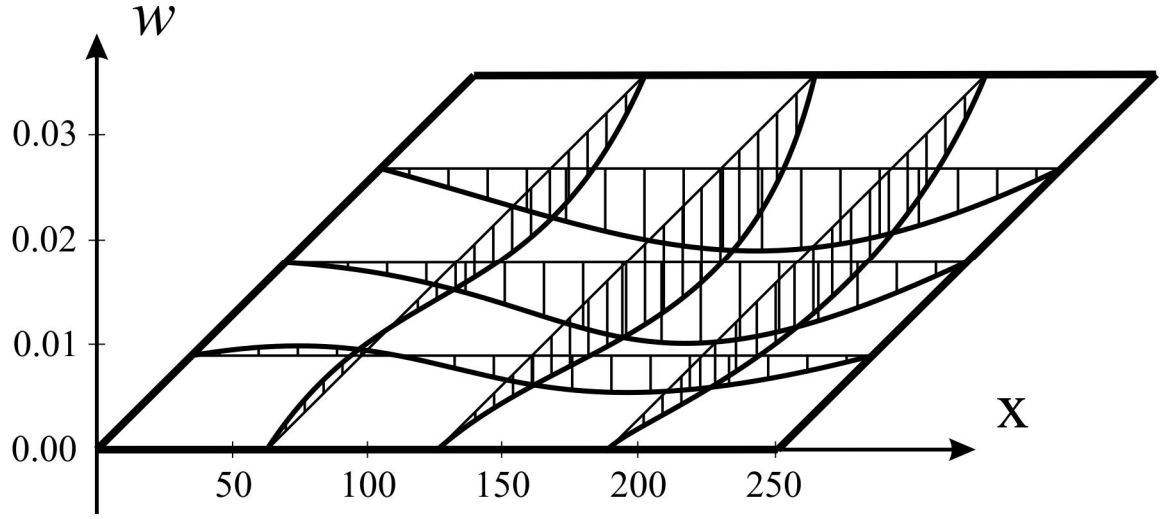

Рис. 2. Эпюра прогибов

2. *Определение напряжений*

Найдем производные от функции прогибов для вычисления напряжений:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2}(A_{11}\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b} + A_{12}\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{2\pi y}{b} +$$

$$+ A_{13}\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{3\pi y}{b} + 4A_{21}\cdot\sin\frac{2\pi x}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b} + ...),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2}(A_{11}\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b} + 4A_{12}\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{2\pi y}{b} +$$

$$+ 9A_{13}\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{3\pi y}{b} + A_{21}\cdot\sin\frac{2\pi x}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b} + ...), \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = \frac{\pi^2}{a\cdot b}(A_{11}\cdot\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\cos\frac{\pi y}{b} + 2A_{12}\cdot\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\cos\frac{2\pi y}{b} +$$

$$+ 3A_{13}\cdot\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\cos\frac{3\pi y}{b} + 2A_{21}\cdot\cos\frac{2\pi x}{a}\cdot\cos\frac{\pi y}{b} + ...).$$

Определим производные от функции прогибов в разных сечениях.

Сечение $y = b/2$:

x	0	0.25 a	0.5 a	0.75 a	a
$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$	0	$9.152\cdot10^{-7}$	$1.639\cdot10^{-6}$	$1.42\cdot10^{-6}$	0
$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$	0	$-5.371\cdot10^{-7}$	$6.739\cdot10^{-7}$	$1.808\cdot10^{-6}$	0
$\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}$	$-7.414\cdot10^{-7}$	$-3.74\cdot10^{-7}$	$2.125\cdot10^{-7}$	$3.74\cdot10^{-7}$	$3.164\cdot10^{-7}$

Напряжения на верхней поверхности плиты (при *z=h/2*) вычисляются из следующих соотношений:

$$\sigma_x = -\frac{E\cdot h}{2(1-\nu^2)}\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma_y = -\frac{E\cdot h}{2(1-\nu^2)}\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right), \qquad (13)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E\cdot h}{2(1+\nu)}\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right).$$

Отметим, из (12) и (13) видно, что выполняются условия равенства нулю нормальных напряжений на контуре пластины.

Определим напряжения в разных сечениях.

Сечение $y = b/2$:

x	0	0.25 a	0.5 a	0.75 a	a
σ_x	0	-0.0202	-0.0443	-0.0445	0
σ_y	0	0.00885	-0.025	-0.0523	0
τ_{xy}	0.0148	0.00748	-0.00425	-0.00748	-0.00633

Аналогично можно найти напряжения во всех сечениях и построить эпюры напряжений на верхней поверхности плиты (рис. 4-6).

Напряжения на нижней поверхности плиты (при $z=-h/2$) являются такими же как и на верхней, но противоположного знака.

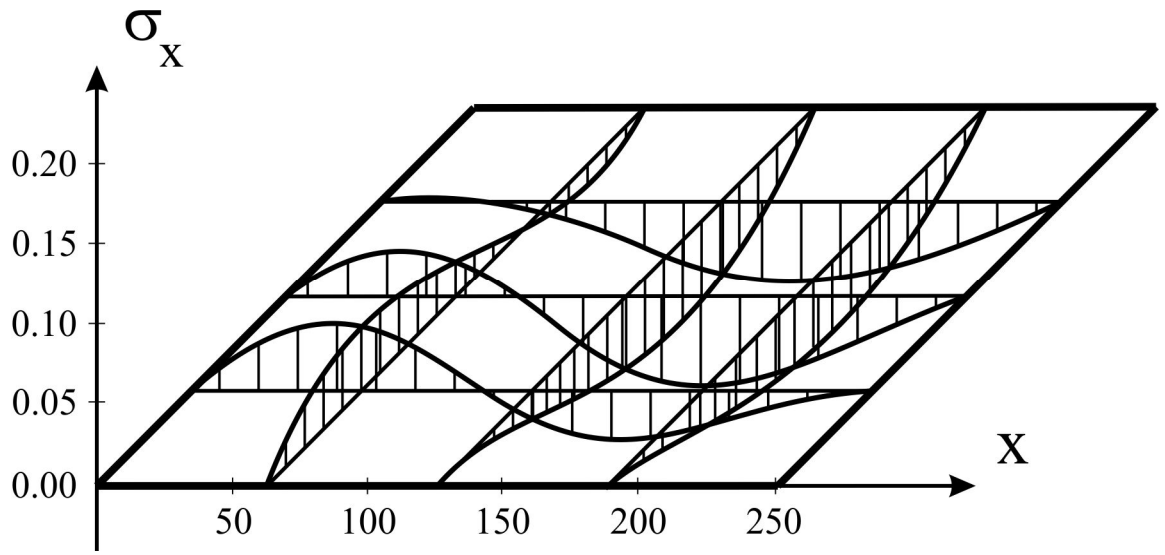

Рис. 4. Эпюра σ_x

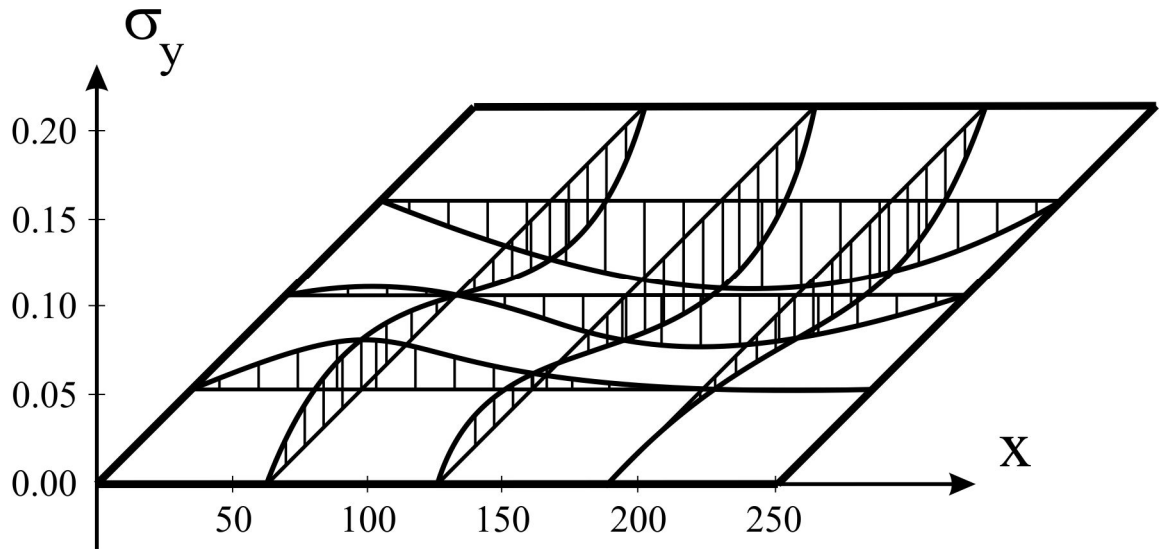

Рис. 5. Эпюра σ_y

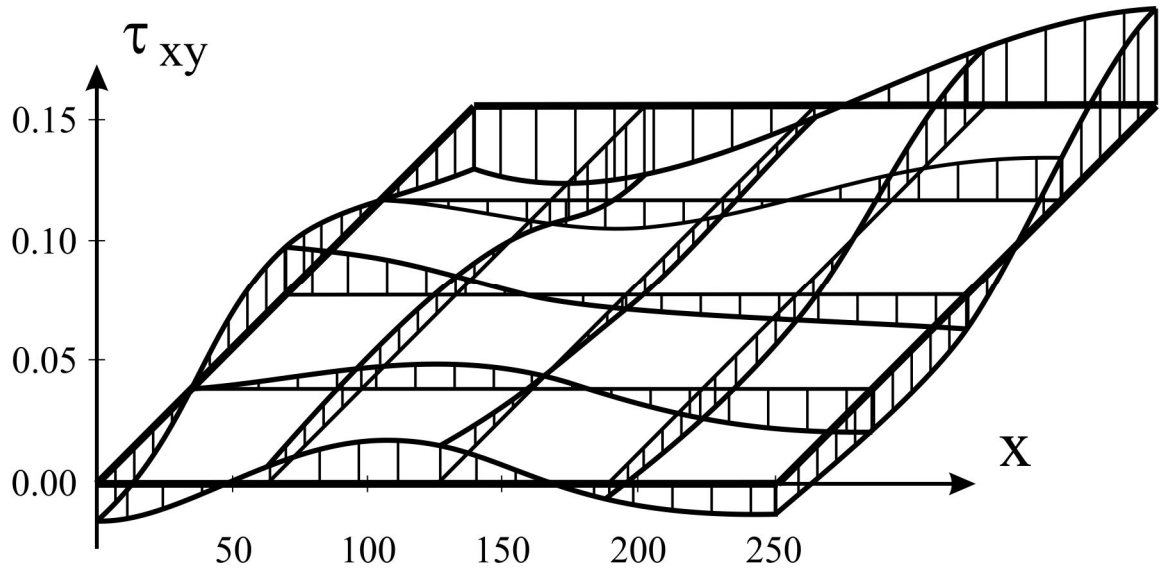

Рис.6. Эпюра τ_{xy}

3. *Расчет на прочность*

Проверим прочность бетонной плиты по критерию Гениева. Примем в расчетах класс бетона *B15*, для которого $R_b = 0{,}85 кН/см^2$, $R_{bt} = 0{,}075\ кН/см^2$.

Для того, чтобы плита была прочной, функция (7), определяющая уровень напряженности малого элемента плиты, должна быть меньше единицы во всех точках на нижней и на верхней поверхностях плиты. Вычислим значения функции *f* для различных сечений.

Сечение $y = b/2$:

x	0	0.25 a	0.5 a	0.75 a	a
$f(z = h/2)$	0.0104	-0.125	-0.819	-1.137	0.00188
$f(z = -h/2)$	0.0104	0.151	0.868	1.217	0.00188

Аналогично можно найти во всех сечениях и построить эпюры (рис. 7-8).

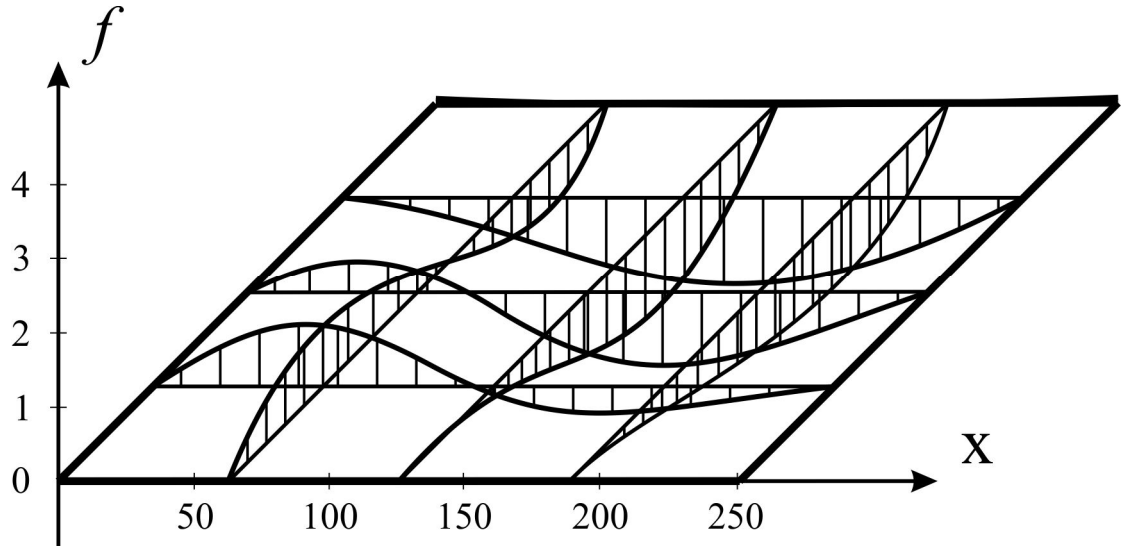

Рис. 7. Функция, определяющая уровень напряженности плиты на верхней поверхности

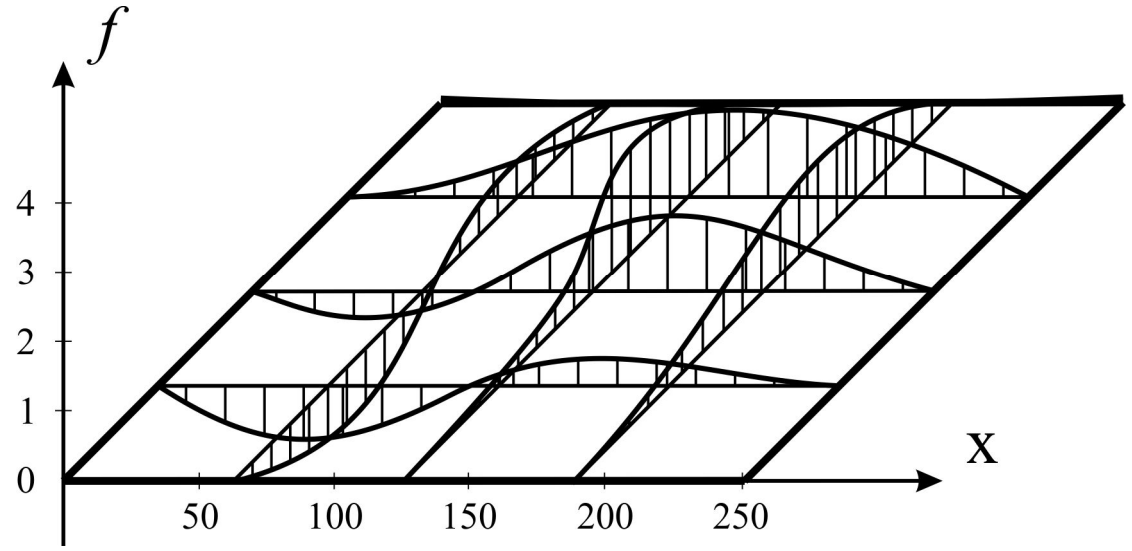

Рис. 8. Функция, определяющая уровень напряженности плиты на нижней поверхности

Определим наибольшее значение функции уровня напряженности на верхней и нижней поверхности плиты по критерию Гениева:

$$f_{\max}(z = h/2) = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)\cdot(R_b - R_{bt})}{R_b \cdot R_{bt}} = 0.814256 < 1.$$

$$f_{\max}(z = -h//2) = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)\cdot(R_b - R_{bt})}{R_b \cdot R_{bt}} = 1.21743 > 1.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что условие прочности на верхней поверхности плиты выполняется, но не выполняется на нижней поверхности плиты.

Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М: Высшая школа, 1990. – 400 с.
2. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М: Инфра-М, 2011. – 480 с.
3. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. – М: Стройиздат, 1974. – 316 с.
4. Каюмов Р.А. Конспект лекций. Теория упругости. Учебное пособие. – Казань: КГАСУ, 2010. – 52 с.
5. Терегулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М: Высшая школа, 1984. – 472 с.
6. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. − Киев: Наукова думка, 1972. – 507 с.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. − М: Наука, 1966. – 636 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М: Наука, 1974. – 832 с.

Методические указания
к расчетно-графической работе

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Составители: д.ф.-м.н., профессор Каюмов Р.А.,
к.т.н., старший преподаватель Зиннуров Р.А.,
к.ф.-м.н., ассистент Шакирзянов Ф.Р.

Редактор

Подписано в печать
Заказ №
Тираж 50 экз.

Печать ризографическая
Бумага офсетная № 1

Формат 60x84/16,
Усл.-печ. л. 1,0
Уч.-изд. л. 1,0

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ.
420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1