МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПО ФИЗИКЕ

«ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕЛА ПРАВИЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ»

Методические указания
к лабораторным работам для студентов всех направлений подготовки

Казань

2014

УДК 535
ББК 22.34
С 31

Методические указания к лабораторным работам по физике для студентов всех направлений подготовки. Лабораторная работа «Измерение плотности тела правильной геометрической формы»/ Сост.: В.И.Сундуков, Казань: КГАСУ, 2014 г. – 12 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

В методических указаниях рассматриваются основы теории измерений и обработок ошибок. Подробно приводится метод измерения плотности тела правильной геометрической формы.

Данные методические указания являются составной частью методического обеспечения аудиторной и самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки.

Рецензент
доцент кафедры теплоэнергетики КазГАСУ
В.Н. Енюшин

УДК 535
ББК 22.34

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОШИБОК

Физика имеет дело с физическими величинами, измеряемыми на опыте. Измерение – это определение опытным путем, какой либо физической величины. На эксперименте производится сравнение данной величины с другой, такого же рода величиной, принятой за единицу меры.

Измерения могут быть прямыми и косвенными. Прямое измерение – это непосредственное сравнение измеряемой величины с единицей измерения с помощью приборов и устройств, проградуированных в соответствующих единицах (измерение линейных размеров линейкой, штангенциркулем, измерение времени секундомером).

Косвенно измеряемая величина рассчитывается с помощью некоторой зависимости (формулы) от других величин, полученных прямыми измерениями (определение скорости $v=s/t$ по пути и времени и т.д.).

Любое измерение не дает абсолютно точного значения измеряемой величины из-за неточности приборов, влияния внешних факторов, – поэтому измеренные значения всегда отклоняются от истинного. Эти отклонения называются ошибками или погрешностями измерений. Исключение составляют целочисленные измерения, например, счет предметов, которые могу быть проведены абсолютно точно.

Поэтому, проделав измерения, необходимо оценить точность измерений. Следовательно, задачей измерения является:

1) получение приблизительного значения измеряемой величины,

2) оценка величины погрешности или ошибки.

Различают абсолютные и относительные ошибки. *Абсолютной ошибкой* называется разница измеренного x и истинного значений X измеряемой величины.

$$\Delta x = x - X. \qquad (1)$$

Абсолютная погрешность является размерной величиной. Она выражается в тех же единицах, что и сама измеряемая величина. Например, абсолютная погрешность измерения длины выражается в метрах. Хотя величина

Δx показывает, насколько измеренное значение отличается от истинного, она не полностью характеризует точность проделанного измерения, поэтому вводят понятие относительной ошибки. Относительная ошибка ε представляет собой отношение модуля абсолютной ошибки к измеряемой величине:

$$\varepsilon = \frac{|\Delta x|}{X} \tag{2}$$

Относительная погрешность – величина безразмерная, чаще всего ее выражают в процентах. Выражения (1) и (2) содержат истинное значение измеряемой величины X, которое точно знать невозможно. Поэтому значения Δx и ε можно лишь оценить, т.е. найти их приближенно с той или иной степенью точности.

Все ошибки можно разделить на *случайные, приборные, систематические и грубые*. Систематическая ошибка зависит от точности измерительных приборов и правильности планирования измерений, учёта всех факторов, влияющих на эксперимент, её очень сложно учитывать. При проведении измерений в некоторых случаях постоянно получают разные числа, это обусловлено *случайными ошибками*. Их название отражает их суть. Если один результат из серии измерений сильно отличается от остальных, то это означает, что имело место *грубая ошибка* и этот результат следует исключить.

Приборной погрешностью в дальнейшем будем называть случайную ошибку, обусловленную измерительными приборами и приспособлениями, а *случайной* – ошибку, причина появления которой неизвестна. Приборную погрешность измерения величины x будем обозначать как δx, случайную – как $\Delta_s x$.

Способы определения приборных ошибок

Основными характеристиками измерительных приборов являются предел измерения и цена деления, а также класс точности.

Предел измерения П – это максимальное значение величины, которое может быть измерено с помощью данной шкалы прибора.

Цена деления Ц – значение измеряемой величины, соответствующее самому малому делению шкалы

Класс точности К представляет собой отношение абсолютной приборной погрешности к пределу измерения шкалы, выраженное в процентах:

$$K = \frac{\delta x}{П} \cdot 100. \tag{3}$$

Значение класса точности (без символа «%») указывается, как правило, на электроизмерительных приборах.

В зависимости от вида измерительного устройства абсолютная приборная погрешность определяется одним из ниже перечисленных способов.

1. Погрешность указана непосредственно на приборе. Так, на микрометре есть надпись «0,01 мм». Если с помощью этого прибора измеряется, например, диаметр шарика d, то погрешность его измерения $\delta d = 0{,}01$ *мм*.

2. На приборе указан класс точности. Согласно определению этой величины, из формулы (3) имеем

$$\delta x = \frac{K \cdot \Pi}{100}. \tag{4}$$

Например, для вольтметра с классом точности 2,5 и пределом измерения 600 *В* абсолютная приборная ошибка измерения напряжения

$$\delta U = \frac{2{,}5 \cdot 600}{100} = 15\,(B).$$

3. Если на приборе не указаны ни абсолютная погрешность, ни класс точности, то в зависимости от характера работы прибора возможны два способа определения величины δx.

а) Указатель значения измеряемой величины может принимать только определенные положения, или прибор имеет цифровую шкалу, например, электронные секундомер. Абсолютная погрешность равна цене деления шкалы $\delta x = Ц$ или равна единице последнего разряда.

б) Указатель значения измеряемой величины может занимать любое положение на шкале (линейки, термометры). В этом случае абсолютная приборная погрешность равна половине цены деления: $\delta x = Ц/2$.

4. Если какая-либо величина не измеряется в данном опыте, а была измерена независимо и известно лишь ее значение, то она является *заданным параметром*. Погрешность заданного параметра принимается равной половине единицы последнего разряда числа, которым задано значение этого параметра. Например, если число π=3,14, то его погрешность $\delta\pi = 0{,}005$ *мм*.

Способы определения случайных ошибок

Методика оценки случайной погрешности основана на положениях теории вероятностей и математической статистики. Оценить случайную ошибку можно только в том случае, когда проведено несколько измерений одной и той же величины и получены различные результаты.

Пусть в результате проделанных измерений получено n значений величины x: x_1, x_2, …, x_n. Обозначим через $x_{ср}$ среднеарифметическое значение

$$x_{cp} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (5)$$

Доказано, что при увеличении числа измерений n среднеарифметическое значение измеряемой величины приближается к истинному:

$$\lim_{n\to\infty} x_{cp} = X.$$

При небольшом числе измерений ($n \le 10$) среднее значение может существенно отличаться от истинного. Цель измерения – найти такой интервал, в котором с наперед заданной вероятностью α ($0 < \alpha < 1$) находится истинное значение измеряемой величины. Этот интервал называется *доверительным интервалом*, а неразрывно связанная с ним величина α – *доверительной вероятностью* (или *коэффициентом надежности*). За середину интервала принимается среднее значение, рассчитанное по формуле (5). Половина ширины доверительного интервала представляет собой случайную погрешность $\Delta_s x$ (рис. 1).

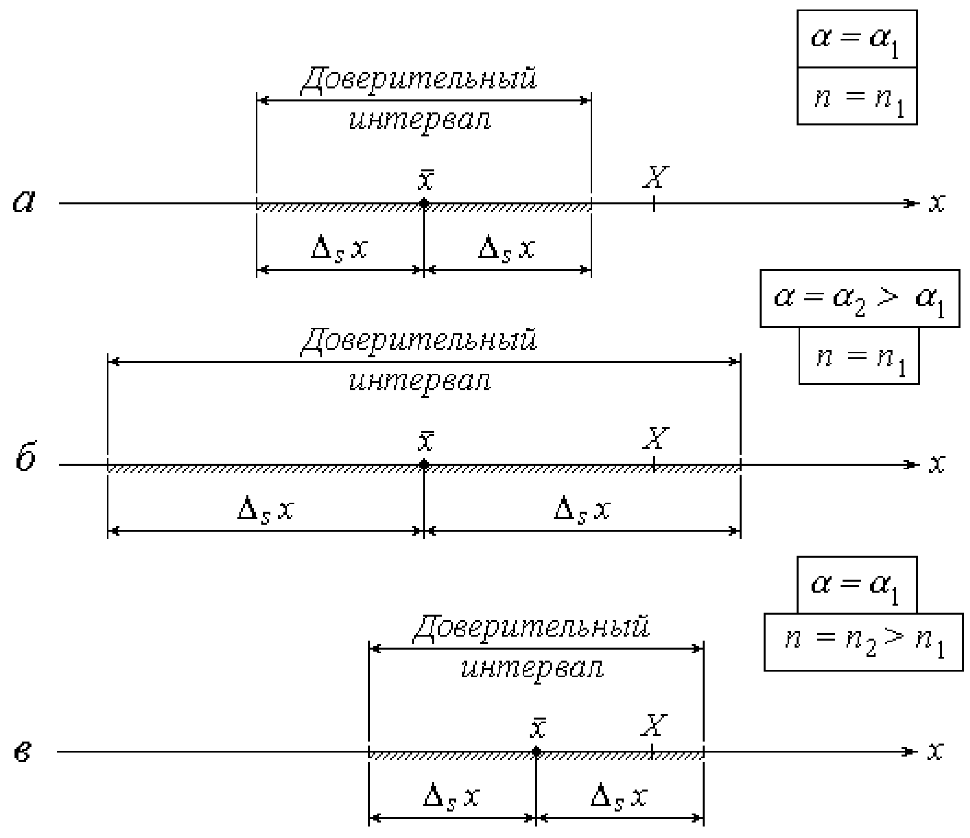

Рис.1. Зависимость доверительного интервала от числа измерений и доверительно вероятности

Очевидно, что ширина доверительного интервала (а следовательно, и ошибка $\Delta_s x$) зависит от того, насколько сильно отличаются отдельные измерения величины x_i от среднего значения x_{cp}. «Разброс» результатов измерений относительно среднего характеризуется *среднеквадратичной ошибкой* σ, которую находят по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}, \qquad (6)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{ср}$.

Ширина искомого доверительного интервала прямо пропорциональна среднеквадратичной ошибке:

$$\Delta_s x = t_{n,\alpha}\cdot\sigma. \qquad (7)$$

Коэффициент пропорциональности $t_{n,\alpha}$ называется *коэффициентом Стьюдента*, он зависит от числа опытов n и доверительной вероятности α.

На рис. 1, *а, б* наглядно показано, что при прочих равных условиях для увеличения вероятности попадания истинного значения в доверительный интервал необходимо увеличить ширину последнего (вероятность «накрывания» значения X более широким интервалом выше). Следовательно, величина $t_{n,\alpha}$ должна быть тем больше, чем выше доверительная вероятность α.

С увеличением количества опытов среднее значение приближается к истинному, поэтому при той же вероятности α доверительный интервал можно взять более узким (см. рис. 1, *а,в*). Таким образом, с ростом n коэффициент Стьюдента должен уменьшаться. Таблица значений коэффициента Стьюдента в зависимости от n и α дана в следующей таблице.

Таблица1. Значения коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$

α	Число измерений n										
	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
0,90	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,90	1,86	1,83	1,76	1,73	1,71
0,95	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,14	2,09	2,06
0,99	9,92	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	2,98	2,86	2,80

Следует отметить, что доверительная вероятность никак не связана с точностью результата измерений. Величиной α задаются заранее, исходя из требований к их надежности. В большинстве технических экспериментов и в лабораторном практикуме значение α принимается равным 0,90.

Расчет случайной погрешности измерения величины x проводится в следующем порядке:

1) вычисляется сумма измеренных значений, а затем – среднее значение величины x_{cp} по формуле (5),

2) для каждого i-го опыта рассчитываются разность между измеренным и средним значениями $\Delta x_i = x_i - x_{cp}$, а также квадрат этой разности (отклонения) $(\Delta x_i)^2$,

3) находится сумма квадратов отклонений, а затем – среднеквадратичная ошибка σ по формуле (6),

4) по заданной доверительной вероятности α и числу проведенных опытов n из таблицы 1 выбирается соответствующее значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$ и определяется случайная погрешность $\Delta_s x$ по формуле (7).

Для удобства расчетов и проверки промежуточных результатов данные заносятся в таблицу, столбцы которой заполняются по образцу табл.2.

*Пример***.** Для определения ускорения движения тела измерялось время t прохождения им пути без начальной скорости. Результаты измерения времени приведены во втором столбце таблицы 2. Найдем их сумму, которую запишем под этим столбцом в ячейку « Σ = ». Затем рассчитаем среднее значение t_{cp} по формуле (3)

$$t_{cp} = \frac{8{,}11}{4} \approx 2{,}03 \text{ (с).}$$

Таблица 2. Измерение времени движения.

Номер опыта	t, c	Δt, c	$(\Delta t)^2$, c^2
1	2,07	0,04	0,0016
2	1,95	-0,08	0,0064
3	2,13	0,10	0,0100
4	1,96	-0,07	0,0049
	$\sum = 8{,}11$		$\sum = 0{,}0229$

Вычитая из каждого значения t_i среднее, найдем разности Δt_i и занесем их в третий столбец таблицы. Возводя эти разности в квадрат, заполним последний столбец. Затем рассчитаем сумму квадратов отклонений и запишем ее во вторую ячейку « Σ = ». По формуле (4) определим средне-квадратичную погрешность:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,0229}{4(4-1)}} \approx 0,0437(c).$$

Задавшись величиной доверительной вероятности $\alpha = 0,95$, для числа опытов $n = 4$ из таблицы 1 выбираем значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha} = 3,18$, с помощью формулы (5) оценим случайную погрешность измерения времени

$$\Delta_s t = 3,18 \cdot 0,0437 \approx 0,14\ (c).$$

Определения полных ошибок прямых измерений

В результате оценки случайной и приборной ошибок измерения величины x получено два доверительных интервала, характеризуемые значениями $\Delta_s x$ и δx. Результирующий доверительный интервал характеризуется *полной абсолютной ошибкой* Δx, которая, в зависимости от соотношения между величинами $\Delta_s x$ и δx, находится следующим образом.

Если одна из погрешностей более чем в три раза превышает другую (например, $\Delta_s x > 3\delta x$), то полная ошибка Δx принимается равной этой большей величине. Если же величины $\Delta_s x$ и δx близки между собой, то полная ошибка вычисляется как

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta_s x)^2 + (\delta x)^2}. \qquad (8)$$

На практике чаще всего за ошибку прямых измерений принимается приборная ошибка, если при нескольких измерениях получают одно и то же число. В том случае, если числа разные, то за окончательную ошибку принимают рассчитанную ошибку косвенных измерений, тем самым предполагая, что приборной ошибкой можно пренебречь.

Запись окончательного результата измерений должна включать в себя следующие обязательные элементы.

1) Доверительный интервал вида

$$x = x_{cp} \pm \Delta x$$

с указанием значения доверительной вероятности α. Величины x_{cp} и Δ выражаются в одних и тех же единицах измерения, которые выносятся за скобку.

2) Значение *полной относительной погрешности*

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{cp}} \cdot 100\%,$$

выраженное в процентах и округленное до десятых долей.

Полная ошибка Δx округляется до одной значащей цифры. После этого среднее значение $x_{ср}$ округляется с той же точностью.

Способы определения ошибок косвенных измерений

В большинстве физических экспериментов искомая величина u не измеряется непосредственно каким-либо одним прибором, а рассчитывается на основе измерения ряда промежуточных величин $a,b,c,\ldots$ Расчет проводится по определенной формуле, которую в общем виде можно записать как

$$u = u(a,b,c...). \qquad (9)$$

В этом случае говорят, что величина u представляет собой результат *косвенного измерения* ($a,b,c,\ldots$ являются результатами *прямых измерений)*

Абсолютная погрешность косвенного измерения Δu зависит от погрешностей прямых измерений Δa, Δb, $\Delta c,\ldots$ и от вида функции (9). В общем случае, величину Δu можно оценить по формуле вида

$$\Delta u = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial a}\Delta a)^2 + (\frac{\partial u}{\partial b}\Delta b)^2 + (\frac{\partial u}{\partial c}\Delta c)^2 + \ldots}, \qquad (10)$$

где $\frac{\partial u}{\partial a}, \frac{\partial u}{\partial b}, \frac{\partial u}{\partial c}$ — частные производные функции u, по соответствующей переменной.

На практике зависимость (9) чаще всего имеет вид степенной функции

$$u(x,y,z,...) = C \cdot a^k \cdot b^m \cdot c^n \cdot \ldots, \qquad (11)$$

показатели степеней которой k, m, n,… – вещественные (положительные или отрицательные, целые или дробные) числа, C – постоянный коэффициент. В этом случае абсолютная погрешность Δu оценивается по формуле

$$\Delta u = u_{ср}\sqrt{(k\varepsilon_a)^2 + (m\varepsilon_b)^2 + (n\varepsilon_c)^2 + \ldots}, \qquad (12)$$

где $u_{ср}$ – среднее значение величины u, $\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a}, \varepsilon_b = \frac{\Delta b}{b}, \varepsilon_c = \frac{\Delta c}{c}$ – относительные полные погрешности прямых измерений величин $a,b,c,\ldots$

При расчетах по формулам типа (12) необходимо помнить следующее.

1. Измеряемые величины и их абсолютные погрешности (например, a и Δa) должны быть выражены в одних и тех же единицах.

2. Расчеты не требуют высокой точности вычислений и должны иметь оценочный характер. Так, входящие в подкоренное выражение и возводимые в квадрат величины обычно округляются с точностью до двух значащих цифр Далее, если одна из этих величин по модулю превышает наибольшую из остальных более чем в три раза, то можно, не прибегая к вычислениям по формуле (12), принять абсолютную ошибку равной этой величине. Если же одна из них более чем в три раза меньше наименьшей из остальных, то при расчете ею можно пренебречь.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ

Цель работы:

1. Научиться проводить измерения линейкой и штангенциркулем, находить ошибки прямых и косвенных измерений.
2. Измерить плотность тела правильной геометрической формы (цилиндра).

Плотностью изотропного тела ρ по определению называется отношение его массы m к его объёму V.

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad (13)$$

Для определения плотности материала, из которого сделано твердое тело необходимо измерить массу образца и его объем. Объем твердого тела правильной формы определяется по соответствующей формуле. Например, для цилиндра объём равен

$$V = \frac{\pi d^2 l}{4}, \qquad (14)$$

где $\pi = 3{,}14$, d – диаметр цилиндра, l – длина образующей цилиндра. Массу определяют взвешиванием на аналитических весах, но в данной работе масса предварительно определена и её значение нанесено на цилиндр. За ошибку определения массы принимается половина последней цифры, то есть 0,5 г. За ошибку числа π, аналогично —0,005. Длину цилиндра в данной работе измеряют миллиметровой линейкой, а диаметр – штангенциркулем. Точность линейки составляет ±0,5 мм. Штангенциркуль позволяет измерять с точностью до десятых долей миллиметра. Штангенциркуль представляет собой устройство с миллиметровой шкалой, по которой движется обойма, с дополнительной шкалой, называемой «нониусом». У нониуса цена деления на 1/10 долю меньше, чем цена деления основной шкалы штангенциркуля. Целое число делений основной шкалы определяется по левому краю нониусной шкалы. Десятые доли миллиметра определяют по шкале нониуса. Смотрят, какое деление нониусной шкалы совпадает с любым делением основной шкалы. Допустим, что совпадает «к» -ое деление нониуса. К целому числу делений основной шкалы нужно добавить «к» десятых миллиметра.

Например, на рис. 2 крайнее левое деление нониуса (нижней шкалы) находится немного правее 12 мм основной шкалы и у нониусной шкалы 2-ое деление совпадает с каким то делением основной шкалы. В этом случае, значение длины, измеренное штангенциркулем равно 12,2 мм.

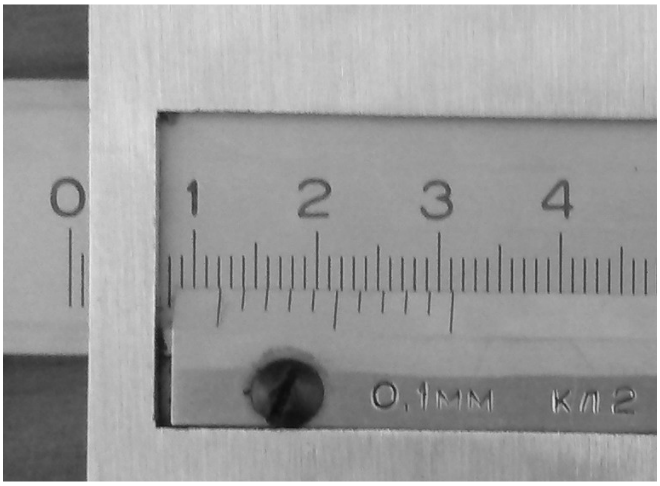

Рис.2 Шкала штангенциркуля

Порядок выполнения работы

1) Измерьте диаметр цилиндра штангенциркулем. Поскольку форма тела отличается от идеального цилиндра измерения следует проводить не менее 5 раз в разных местах, получая при этом разные числа. Результаты занести во 2й столбик таблицы 3.

2) Заполните другие ячейки таблицы, обрабатывая результаты по методике изложенной выше (учитывая формулы 5,6,7 и пример в таблице 2) найдите среднее значение диаметра d и абсолютную ошибку измерений Δd. Коэффициенты Стьюдента возьмите из таблица 1 для доверительной вероятности 0,9.

3) Образующую цилиндра (его длину) l измерьте линейкой один раз, записывая результат в протокол. Ошибка $\Delta l=0{,}5$ *мм.*

4) Далее подсчитайте среднее значение объёма по формуле (14) и плотности по формуле (13).

5) Определите ошибку измерения плотности как ошибку косвенного измерения по формуле

$$\Delta\rho = \rho\sqrt{(\frac{\Delta m}{m})^2 + (\frac{\Delta\pi}{\pi})^2 + (\frac{\Delta l}{l})^2 + (2\frac{\Delta d}{d})^2}$$

Окончательный результат запишите в виде $\rho = \rho_{cp} \pm \Delta\rho$, выразив плотность в кг/м^3

Талица 3. Измеренные значения диаметра цилиндра.

Номер опыта	d_i	Δd_i	$(\Delta d_i)^2$
1			
2			
…			
n			
	$\sum=$		$\sum=$

Контрольные вопросы

1. Что называется измерением?
2. Какие измерения называются прямыми, и какие — косвенными?
3. Какие бывают ошибки измерений?
4. Что такое абсолютная и относительная погрешности или ошибки?
5. Как определить приборную погрешность?
6. Что является лучшим приближением истинного значения серии измерений физической величины?
7. Дать определение среднего квадратичного отклонения.
8. Что такое доверительная вероятность и доверительный интервал?
9. Каким образом вычисляется случайная ошибка прямого измерения.
10. Каким образом вычисляется ошибка косвенного измерения?
11. С какой точностью можно измерить длину: а) штангенциркулем, б) линейкой.
12. Что такое нониус и как им пользоваться?
13. Дать определения физических величин: масса, вес, плотность.
14. В каких единицах выражаются масса, плотность, объем?