**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики, электротехники и автоматики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ФИЗИКЕ
для студентов всех направлений подготовки

Лабораторная работа № 72

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Казань 2023

УДК 530.1
ББК 22.34
П34

П34 Методические указания к лабораторным работам по физике для студентов всех направлений подготовки. Лабораторная работа № 72. ″Распределение Больцмана" / Сост: Л. И. Потапова. –Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектурно-строит. ун-та, 2023 г., 12 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Данные методические указания являются составной частью методического обеспечения аудиторной и самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки.

В работе изложены некоторые вопросы МКТ. С помощью программы ЭВМ моделируется поведение молекул газа в гравитационном поле с целью изучения закона распределения молекул по высоте над поверхностью Земли.

Рис. 4, табл. 2.

Рецензент: к.т.н., доцент кафедры технологии строительных материалов, изделий и конструкций Казанского государственного архитектурно-строительного университета Аюпов Д.А.

УДК 530.1
ББК 22.34

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Существует множество событий, которые могут произойти или не произойти. Их называют ***случайными***. Рост юноши, явившегося на воинский призыв, или число прохожих, пересекающих определённый перекресток в определённые часы, — всё это примеры случайных событий. Наблюдая множество однотипных событий, можно отчёт о таких наблюдениях оформить в виде кривых распределения.

Если построить график, по горизонтальной оси которого отложена случайная величина, а по вертикальной — число случайных событий, то полученная кривая представляет собой кривую распределения (рис. 1).

Рис. 1.

Замечательной особенностью кривых распределения является их воспроизводимость. Так, если построить кривые распределения, анализирующие рост призывников ряда лет, то можно убедиться в их полном подобии. В то же время такого подобия нельзя будет найти, изучая кривые распределения роста на основании лишь небольшого числа измерений, т. е. ограничившись наблюдениями, к примеру, на одном участке сбора призывников. Если же увеличивать материал (число юношей-призывников), положенный в основу построения каждой кривой, то кривые разных лет будут становиться всё более и более похожими.

Закон распределения той или иной случайной величины, выполняющийся тем лучше, чем для большего числа событий построена кривая распределения, носит название **статистического закона**.

Понятие статистического закона используется не только в мире общественных явлений, но и в физике. Физические закономерности, которые возникают в больших собраниях однородных объектов (например, атомов или молекул) являются статистическими.

Наилучшим примером большой неупорядоченной совокупности однородных объектов, в которой обнаруживаются различного рода статистические закономерности, являются атомы и молекулы, из которых состоит газ. Само слово «газ» происходит от греческого «chaos» (хаос).

Молекулы газа непрерывно движутся, сталкиваются друг с другом, меняя при каждом столкновении свою скорость по величине и направлению. При нормальных условиях (температуре 0°С и давлении 1 атм = $1{,}013 \cdot 10^5$ Па), когда в 1 $м^3$ газа содержится $2{,}68 \cdot 10^{25}$ молекул (число Лошмидта), каждая молекула испытывает несколько миллиардов столкновений в секунду. При столь беспорядочном характере теплового движения в газе невозможно изучить отдельно движение каждой молекулы.

Для объяснения различных свойств газа, например, температуры или давления, с точки зрения теплового движения атомов и молекул используются статистические предсказания о поведении молекул. Огромное число молекул, приходящееся на самый малый объём вещества, делает такого рода предсказания особо точными. Некоторые представления о распределении молекул сразу же следуют из хаотичности теплового движения. Это относится к распределению молекул по направлениям скоростей или к распределению молекул по объёму, когда на газ не действуют какие-либо силы. В этом случае все направления движения молекул равновероятны, и молекулы равномерно распределены по занимаемому газом объёму.

При тепловом движении молекулы газа непрерывно сталкиваются между собой. Это приводит к тому, что скорости молекул при любой температуре различны. Методы статистической физики, основанные на применении теории вероятности к изучению поведения огромного числа молекул, позволили Максвеллу установить закон распределения молекул идеального газа по скоростям. Этот закон записывается в виде:

$$dN = AN\upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \cdot d\upsilon = Nf(\upsilon)d\upsilon, \qquad (1)$$

где N — общее число молекул, dN — число молекул, скорости которых находятся в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$, m — масса молекулы, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, $A = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}$ — коэффициент, зависящий от массы молекулы и температуры газа. Из этой формулы видно, что

$$f = A\upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}. \qquad (2)$$

Соотношение (2) называется ***распределением Максвелла***, а $f(\upsilon)$ — функцией распределения. Используя функцию распределения, можно найти долю молекул dN из общего числа молекул N, скорости которых находятся в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$, поскольку из (1) следует $\frac{dN}{N} = f(\upsilon)d\upsilon.$ Распределение Максвелла графически изображено на рис. 2. Из графика видно:

1) доля молекул, обладающих очень малыми и очень большими скоростями, мала; ($f(\upsilon) \to 0$ при $\upsilon \to 0$ и $\upsilon \to \infty$).

2) имеется одно значение скорости, с которой движется наибольшее число молекул ($\frac{dN}{N}$ максимально). Эту скорость называют ***наивероятнейшей*** и обозначают $\upsilon_{н}$. Её находят из условия экстремума функции $f(\upsilon)$ (найти производную по υ и приравнять её нулю), т.е. $\frac{df}{d\upsilon} = A\upsilon\left(2 - \frac{m\upsilon^2}{kT}\right)e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} = 0$. Так как $\upsilon \neq 0$ и $e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \neq 0$, то скорость $\upsilon_{н}$ находится из равенства нулю выражения, стоящего в скобках. Это даёт

$$\upsilon_{н} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что с повышением температуры наиболее вероятная скорость возрастает (рис. 3). Кроме того, из этого рисунка видно, что с повышением температуры газа доля молекул, обладающих малыми скоростями, уменьшается, а доля молекул с большими скоростями увеличивается, а также распределение скоростей становится более широким.

Используя распределение (1), вычислим среднюю скорость движения молекул. Разобьём молекулы на группы, в которых молекулы имеют практически одинаковые скорости. Пусть i-ая группа состоит из ΔN_i молекул со скоростями υ_i. Найдём сумму скоростей всех молекул. Она равна $\sum\limits_i \upsilon_i \cdot \Delta N_i$, где суммирование производится по всем группам молекул. Для нахождения средней скорости $<\upsilon>$ молекул надо эту сумму разделить на общее число молекул N ,т.е. $\langle\upsilon\rangle = \frac{1}{N}\sum\limits_i \upsilon_i \cdot \Delta N_i$. Эту сумму заменим интегралом, поскольку суммирование малых величин представляет собой интегрирование:

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{1}{N}\int\limits_0^\infty \upsilon \cdot dN. \tag{4}$$

Подставляя выражение (1) в (4), находим: $\langle\upsilon\rangle = A\int\limits_0^\infty \upsilon^3 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \cdot d\upsilon$. Вычисляя этот интеграл получаем, что

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \tag{5}$$

Аналогичным образом для среднего значения квадрата скорости $\langle\upsilon^2\rangle$ получается выражение: $\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \frac{1}{N}\int\limits_0^\infty \upsilon^2 dN.$ которое после подстановки dN (см. (1)) и вычислений даёт следующее значение

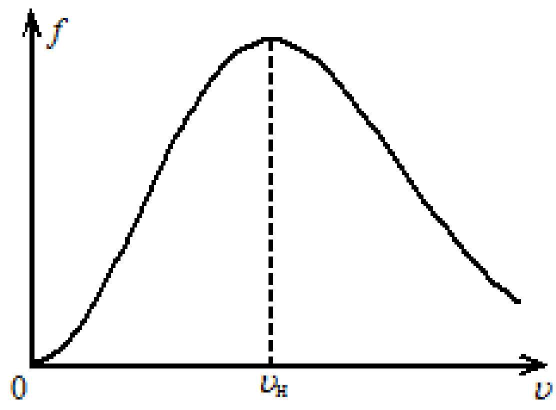

Рис. 2

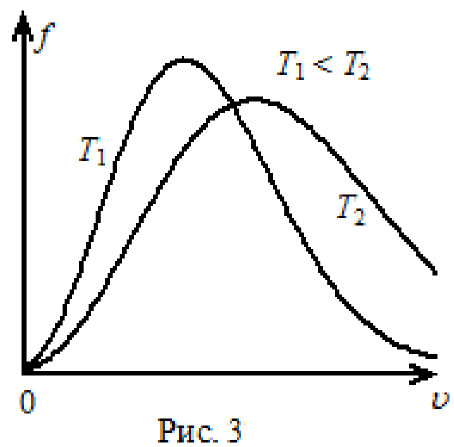

Рис. 3

$$\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \frac{3kT}{m}. \qquad (6)$$

Квадратный корень из $\langle\upsilon^2\rangle$ называют средней квадратичной скоростью $\upsilon_{кв}$. Поэтому

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad (7)$$

Таким образом, существуют три скорости, характеризующие состояние газа: наивероятнейшая, средняя и средняя квадратичная (см., соответственно, формулы (3), (5) и (7)). Введение этих скоростей обусловлено тем, что физические величины, рассматриваемые в молекулярной физике, связаны с разными скоростями. Так, например, средняя кинетическая энергия молекул термодинамической системы определяется средней квадратичной скоростью, а средняя длина свободного пробега молекул в газе — средней скоростью.

Наиболее вероятная скорость $\upsilon_в$ движения молекул, зависит от молярной массы μ газа и его температуры T:

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \qquad (7а)$$

где R = 8,31 Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная. Физический смысл наиболее вероятной скорости очевиден уже из названия: молекулы со скоростями, близкими к $\upsilon_в$, встречаются в газе наиболее часто.

Развивая идеи Максвелла, австрийский физик-теоретик Людвиг Больцман обобщил закон распределения молекул по скоростям на случай, когда молекулы движутся в силовом поле (например, в гравитационном поле). Полученный им результат можно обозначить как закон распределения молекул по потенциальным энергиям E_p:

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right). \qquad (8)$$

Здесь n — концентрация молекул, т. е. число молекул в единице объёма, в том месте пространства, где потенциальная энергия молекулы имеет значение E_p; n_0 — концентрация молекул при $E_p = 0$; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; T — температура по шкале Кельвина. Суть закона Больцмана сводится к следующему: *среди большой совокупности молекул, движущихся в силовом поле и обладающих различной потенциальной энергией, наибольшей энергии соответствует наименьшее число молекул.*

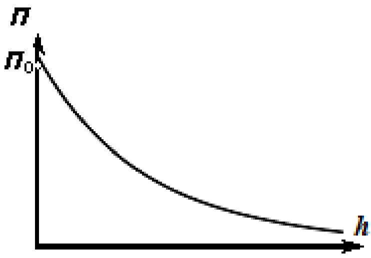

Рис. 4

В данной работе рассматривается применение закона Больцмана к решению вопроса о том, как изменяется равномерное распределение молекул по объёму газа, находящегося в гравитационном поле.

Предположим, что в жидкости находятся маленькие частички, видимые только в микроскоп. Их называют броуновскими частицами. Плотность этих частиц больше плотности жидкости, и они не растворяются в ней. На первый взгляд может показаться, что рано или поздно под действием силы тяжести эти частицы должны опуститься на дно. В действительности же всё происходит иначе. Под действием силы тяжести частицы действительно движутся вниз. Однако хаотическое тепловое движение броуновских частиц непрерывно препятствует действию силы тяжести. Так, какая-либо частица, двигаясь вниз, непременно испытывает столкновение с другой частицей, которое изменяет её направление движения. После этого частица опять продолжает движение вниз, но очередное столкновение вновь отбрасывает частицу вверх или в сторону. Если какой-то частице всё же удаётся добраться до дна сосуда, то взамен неё за счёт случайных ударов другая частица может быть поднята со дна и случайными толчками доведена до высоких слоёв жидкости. В результате будет установлено некоторое неравномерное распределение частиц по высоте сосуда. В верхних слоях жидкости частиц будет меньше, ближе ко дну сосуда — больше всего.

Потенциальная энергия E_p частицы массой m, находящейся в поле тяготения Земли на высоте h над её поверхностью, равна:

$$E_p = mgh, \qquad (9)$$

где g — ускорение свободного падения. Следовательно, формула распределения (8) запишется в виде:

$$n(h) = n(0) \cdot \exp(-\frac{mgh}{kT}). \qquad (10)$$

Здесь $n(h)$ и $n(0)$ — концентрации частиц на высоте h над поверхностью Земли и на нулевой высоте («на уровне моря») соответственно. Закон убывания числа частиц с высотой в гравитационном поле показан на рис. 4.

Из формулы (10) следует, что чем больше масса частиц и чем меньше температура, тем быстрее спадает кривая распределения. Кроме того, из этой формулы следует, что быстрота убывания зависит от ускорения свободного падения. Это означает, что на разных планетах частицы должны быть по-разному распределены с высотой.

При внимательном анализе закона (10) нетрудно увидеть, что какое-то, пусть очень малое, число молекул имеется на любой высоте над поверхностью Земли. Вследствие столкновений молекулы могут приобрести скорость 11,2 км/с, достаточную для ухода из сферы земного притяжения, и улететь в мировое пространство. Поэтому можно сказать, что Земля постепенно теряет свою атмосферу. Оценки скорости рассеяния атмосферы показывают, что потери ничтожно малы, и за всё время существования Земли было потеряно ничтожное количество воздуха. Другое дело на Луне, где скорость преодоления притяжения порядка 2 км/с. Такая невысокая скорость достигается молекулами с большой лёгкостью, поэтому на Луне и нет атмосферы.

Закон убывания числа частиц с высотой можно записать и для давления газа. Так как давление p газа пропорционально числу n частиц в единице объёма, то формулу (10) перепишем в виде:

$$p(h) = p(0) \cdot \exp(-\frac{mgh}{kT}), \qquad (11)$$

где $p(h)$ и $p(0)$ — давления на высотах h и $h = 0$ соответственно. Полученную формулу называют *барометрической*. С её помощью метеорологи, производящие измерения атмосферного давления на больших высотах, приводят результаты своих измерений «к уровню моря».

Необходимо отметить ещё одно важное применение закона распределения частиц по высоте в гравитационном поле. В начале двадцатого столетия этот закон был использован французским учёным Жаном Перреном для экспериментального определения числа Авогадро, т. е. числа молекул в одном моле любого вещества. Он изучал эмульсию, получающуюся при растворении в воде частиц гуммигута (разновидности смолы деревьев, растущих в Ост-Индии и на Цейлоне). При помощи центрифуги Перрен сортировал зёрнышки гуммигута по размеру и готовил эмульсию таким образом, чтобы в ней содержались частицы одинакового размера, следовательно, и массы. Опыт сводился к определению отношения концентраций частиц, измеренных на различных по высоте уровнях эмульсии. Делалось это путём фокусирования микроскопа на достаточно тонкий слой эмульсии и подсчёта числа частиц в поле зрения за одинаковые промежутки времени. Если концентрации частиц в слоях, лежащих на высотах h_1 и h_2, соответственно равны $n(h_1)$ и $n(h_2)$, то согласно (10) искомое отношение равно

$$\frac{n(h_1)}{n(h_2)} = \exp\left(-\frac{mg(h_1 - h_2)}{kT}\right). \tag{12}$$

Меняя в широких пределах вязкость эмульсии и размеры зёрен, Перрен всякий раз наблюдал, что отношение концентраций соответствовало закону (12). Этот результат позволил ему сделать следующий шаг и рассчитать число Авогадро $N_{\text{А}}$, которое в неявном виде присутствует в этом законе. Действительно, если учесть, что постоянная Больцмана $k = R/N_{\text{А}}$, то показатель экспоненты в последней формуле можно переписать как $\frac{mg(h_1 - h_2)}{kT} = \frac{N_A mg(h_1 - h_2)}{RT}$. Тогда, логарифмируя уравнение (12), а затем решая его относительно $N_{\text{А}}$, получим:

$$N_A = \frac{RT \cdot \ln \dfrac{n(h_1)}{n(h_2)}}{mg(h_2 - h_1)}. \tag{13}$$

Все величины, стоящие в правой части формулы (13), известны из опыта. Произведённые Перреном вычисления показали, что число Авогадро — величина порядка $6 \cdot 10^{23}$ молекул на моль. В дальнейшем это значение было уточнено, и по современным данным $N_{\text{А}} = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

ОПИСАНИЕ РАБОТЫ ПРОГРАММЫ ЭВМ

В данной работе с помощью программы ЭВМ, моделирующей поведение молекул газа в гравитационном поле, предлагается повторить опыт Перрена. Конечно, такая аналогия в определённой степени условна и справедлива лишь в отношении конечной цели (определения числа Авогадро) и способа её достижения (построение графиков функции (10)).

Программа выводит на экран графического дисплея ЭВМ хаотично движущиеся точки, которые изображают реальные молекулы. Точки, перемещаясь по экрану, имитируют движение группы молекул, выделенной для наблюдения среди множества других, невидимых на экране, молекул газа. Точки-молекулы непрерывно сталкиваются между собой и после каждого столкновения отскакивают в случайных направлениях.

Задача работы заключается в подсчёте числа точек-молекул, попадающих в квадрат наблюдения при расположении его на различных высотах h. При этом нужно иметь в виду следующее. Если многократно подсчитывать количество молекул в каком-то ограниченном объёме газа, то в силу хаотического теплового движения молекул газа при различных подсчётах будут получены несколько отличные цифры. Поэтому, когда говорят о числе молекул, находящихся в определённом объёме, равно как о числе молекул, имеющих такие-то скорости или движущихся туда-то, всегда подразумевают *среднее значение* соответствующего числа. Если число молекул газа велико, то отклонения мгновенных значений от средних будут ничтожными. Такие отклонения называют *флуктуациями.* В сильно разреженных газах они могу стать значительными.

Для того чтобы среди столь малого числа молекул выявить закон распределения частиц по высоте в гравитационном поле, необходимо при каждом значении высоты производить несколько (не менее пяти) отсчётов числа n_i точек-молекул, попавших в выделенный квадрат наблюдения. По окончании серии отсчётов рассчитайте среднее значение $n_{ср}$ числа молекул в поле наблюдения на данной высоте:

$$n_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i}{N}, \qquad (14)$$

где N — число произведённых отсчётов в серии.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Включите или перезагрузите компьютер.
2. Откройте папку «Работа №72».
3. На экране монитора ЭВМ высвечивается титульное изображение с названием работы. Введите свои данные и нажмите на кнопку "ОК".
4. Введите температуру T (в К) из интервала от 200 до 500 К.
5. По указанию преподавателя из таблицы 1, в которой представлен средний химический состав сухого атмосферного воздуха (на уровне моря), выберите значение молярной массы μ, соответствующие им массы m молекул, а также максимально допустимые высоты наблюдения h_{max}.
6. Проведите измерение параметров модели — среднего числа $n_{ср}$ точек-молекул, попавших в квадрат наблюдения, наблюдая процесс теплового хаотического движения молекул.

ЗАДАНИЯ К РАБОТЕ

1. При температуре T из интервала от 200 до 500 К и двух различных значениях молярной массы μ получите зависимости среднего числа $n_{ср}$ точек-молекул, попавших в квадрат наблюдения, от высоты h. При получении указанных зависимостей необходимо использовать 5 ÷ 10 значений h, равномерно распределённых в интервале от 0 до h_{max}. На каждой высоте параметр $n_{ср}$ должен быть определён из статистики, включающей не менее пяти измерений n_i. Результаты оформите в виде таблицы 2.
2. Проверьте закон распределения частиц по высоте в гравитационном поле (уравнение (10)). С этой целью для обоих значений μ постройте графики зависимостей $\ln(n_{ср})$ от h. Если зависимости окажутся линейными, это будет означать, что они соответствуют данному закону.

3. Проследите, как влияет молярная масса газа на распределение частиц по высоте (для этого обе полученные зависимости $\ln(n_{ср})$ от h удобно построить на одном графике). Вывод запишите.
4. Используя одну из построенных зависимостей $\ln(n_{ср})$ от h, рассчитайте число Авогадро N_A по формуле (13). Сравните полученное значение N_A с табличным значением

Таблица 1

Компонент воздуха	Содержание по объёму, %	μ, кг/моль	m (кг)	h_{max}, м
N_2	78,09	$28{,}01\cdot10^{-3}$	$4{,}85\cdot10^{-26}$	17000
O_2	20,95	$32{,}00\cdot10^{-3}$	$5{,}31\cdot10^{-26}$	14900
Ar	0,933	$39{,}95\cdot10^{-3}$	$6{,}63\cdot10^{-26}$	11900
CO_2	0,03	$44{,}01\cdot10^{-3}$	$7{,}31\cdot10^{-26}$	10800
Ne	$1{,}8\cdot10^{-3}$	$20{,}18\cdot10^{-3}$	$3{,}35\cdot10^{-26}$	23600
He	$4{,}6\cdot10^{-4}$	$4{,}00\cdot10^{-3}$	$0{,}33\cdot10^{-26}$	32700
CH_4	$1{,}52\cdot10^{-4}$	$16{,}04\cdot10^{-3}$	$2{,}68\cdot10^{-26}$	29700
Kr	$1{,}14\cdot10^{-4}$	$83{,}80\cdot10^{-3}$	$13{,}91\cdot10^{-26}$	5600
H_2	$5\cdot10^{-5}$	$2{,}02\cdot10^{-3}$	$0{,}33\cdot10^{-26}$	32700
NO	$5\cdot10^{-5}$	$44{,}01\cdot10^{-3}$	$7{,}30\cdot10^{-26}$	10800
Xe	$8{,}6\cdot10^{-8}$	$131{,}3\cdot10^{-3}$	$21{,}80\cdot10^{-26}$	3600
O_3	$1{,}7\cdot10^{-8}$	$48{,}00\cdot10^{-3}$	$7{,}97\cdot10^{-26}$	9900
Rn	$6\cdot10^{-10}$	$222{,}00\cdot10^{-3}$	$38{,}86\cdot10^{-26}$	2100

Таблица 2

T =…К			
Газ …, μ_1 = …, кг/моль		**Газ …, μ_2 = …, кг/моль**	
h (м)	**$n_{ср}$**	**h (м)**	**$n_{ср}$**
…	…	…	…
…	…	…	…

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется статистическим законом? Почему для объяснения свойств газа используются статистические предсказания?
2. Как распределены молекулы газа по направлениям скоростей движения, по объёму, когда на газ не действуют какие-либо внешние силы?
3. В чём смысл закона, устанавливаемого распределением Максвелла? Дайте определение наиболее вероятной скорости движения молекул газа.
4. Запишите формулу распределения Больцмана и объясните суть этого закона.

5. Поясните, как распределяются по высоте молекулы газа или броуновские частицы, находящиеся в гравитационном поле? Какой закон описывает это распределение?
6. Что определяет формула, называемая барометрической?
7. Расскажите об опыте Перрена.

ФИЗИКА
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 72
“РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА”
для студентов всех направлений подготовки

Составитель: Потапова Людмила Ильинична

Редактор Л.З. Ханафиева

Издательство
Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Подписано в печать 15.09.23		Формат 60x84/16
Заказ№380	Печать ризографическая	Усл. печ. л. 0,75
Тираж 50 экз.	Бумага тип № 1	Уч. - изд. л. 0,75

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ.
4200043, Казань, Зеленая, 1