**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ

УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания по курсу высшей математики
для самостоятельной работы студентов второго курса
заочного отделения (бакалавриат) направлений подготовки
051000 "Профессиональное обучение", 080200 "Менеджмент",
190100 "Наземные транспортно-технологические комплексы",
190700 "Технология транспортных процессов",
230400 "Информационные системы и технологии",
270800 "Строительство", 280700 "Техносферная безопасность"

КАЗАНЬ
2014

УДК 517
ББК 22.161.6
И23

И23 Дифференциальные уравнения. Ряды. Теория вероятностей. Методические указания по курсу высшей математики для самостоятельной работы студентов второго курса заочного отделения (бакалавриат) направлений подготовки: 051000 "Профессиональное обучение", 080200 "Менеджмент", 190100 "Наземные транспортно-технологические комплексы", 190700 "Технология транспортных процессов", 230400 "Информационные системы и технологии", 270800 "Строительство", 280700 "Техносферная безопасность" / Сост.: Н.А.Иваньшин, П.Л.Шабалин, Ю.А.Шмагин.- Казань: Изд-во Казанск. гос. архитек.-строит. ун-та. 2014, - 35 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов второго курса бакалавриата заочного отделения.

Рецензент
кандидат физико-математических наук
Ф.Г.Габбасов

УДК 517
ББК 22.161.6

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2014
© Иваньшин Н.А.Шабалин П.Л. Шмагин Ю.А., 2014

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Дифференциальное уравнение можно записать так

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где $y' = \dfrac{dy}{dx}, y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение, например,

$m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$ -- уравнение 1-го порядка, $y'' + y = 0$ -- уравнение 2-го порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0,$$

где левая часть F есть заданная функция переменных x, y, y'. Если разрешить это уравнение относительно первой производной, то оно примет вид $y' = f(x, y)$, где f заданная функция переменных x и y.

Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, если:

1)она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C;

2)для любого начального условия $y|_{x=x_0} = y_0$ существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Всякое решение $y = \varphi(x, C_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется частным решением.

Задача, в которой требуется найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$ (x_0, y_0 -- заданные числа), называется **задачей Коши**.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

в котором $y = y(x)$ -- искомая функция, $dy = y'_x dx$ называется уравнением с разделенными переменными. Уравнение вида

$$M_1(x) \cdot M_2(y) + N_1(x) \cdot N_2(y) \cdot y' = 0$$

или

$$M_1(x) \cdot M_2(y)dx + N_1(x) \cdot N_2(y)dy = 0, \qquad (1.1)$$

где $y = y(x)$ -- искомая функция, $dy = y'_x dx$, в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Разделив уравнение (1.1) на $M_2(y) \cdot N_1(x)$, придем к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0.$$

Интегрируя, найдем

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C$$

или, обозначив

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = F_1(x), \qquad \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = F_(y),$$

получим $F_1(x) + F_2(y) = C.$ Это соотношение является общим интегралом дифференциального уравнения.

<u>Пример 1.</u> Решить дифференциальное уравнение

$$x \cdot cos\, y dx + x^2 \cdot sin\, y dy = -sin\, y dy.$$

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными, так как оно приводится к виду (1.1)

$$x cos\, y dx + (x^2 + 1) sin\, y dy = 0.$$

Здесь $M_1(x) = x;$ $M_2(y) = cos\, y;$ $N_1(x) = x^2 + 1;$ $N_2(y) = sin\, y.$ Теперь следует разделить переменные, то есть представить уравнение в таком виде, чтобы при dx стояли функции, зависящие только от x; а при dy -- только от y.

Разделив обе части уравнения на произведение $M_2(y) \cdot N_1(x) == cos\, y \cdot (x^2 + 1)$, получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\frac{x}{x^2 + 1}dx + \frac{sin\, y}{cos\, y}dy = 0.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{xdx}{x^2 + 1} + \int \frac{sin\, y dy}{cos\, y} = C$$

или, так как $d(x^2 + 1) = 2xdx, \quad d\, cos\, y = -sin\, y dy,$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \int \frac{d\, cos\, y}{cos\, y} = C, \quad ln|cos\, y| = \frac{1}{2} ln|x^2 + 1| + lnC_1,$$

где $lnC_1 = C.$ Потенцируя, найдем искомый общий интеграл

$$ln|cos\, y| = ln(C_1 \cdot \sqrt{x^2 + 1}), \quad cos\, y = C_1 \cdot \sqrt{x^2 + 1}.$$

Разрешив полученное равенство относительно y, получим общее решение данного

дифференциального уравнения $y = arccos(C_1 \cdot \sqrt{x^2+1})$. Правильность найденного решения всегда можно проверить подстановкой в исходное уравнение.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$(1+x^2)y' + y = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1} = 1$.

Решение. Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, уравнение запишем так:

$$(1+x^2)dy + ydx = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Интегрируя, будем иметь

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2} + C \quad \text{или} \quad ln|y| = -arctg\,x + C.$$

Это общий интеграл уравнения. Используя начальное условие, найдем C; для этого в общий интеграл подставим значения $x = 1,\ y = 1$. Получим

$$ln1 = -arctg1 + C, \quad 0 = -\frac{\pi}{4} + C, \ тогда \quad C = \frac{\pi}{4}.$$

Найденное значение $C = \dfrac{\pi}{4}$, подставим в общий интеграл уравнения и получим частный интеграл уравнения

$$ln|y| = -arctg + \frac{\pi}{4}.$$

Разрешив относительно y, запишем частное решение дифференциального уравнения

$$y = e^{\frac{\pi}{4} - arctgx}.$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение $y' = f(x,y)$ называется однородным, если функция $f(x,y)$ представима в виде функции отношения своих аргументов $f(x,y) == \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, то есть уравнение $y' = f(x,y)$ приводится к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (1.2)$$

Однородное уравнение подстановкой $\dfrac{y}{x} = t$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Действительно, положим $\dfrac{y}{x} = t$, где $t = t(x)$ -- функция от x. Отсюда $y = x \cdot t$. Дифференцируя это равенство, имеем $y'_x = t + x \cdot t'_x$. Подставим y и y' в исходное

уравнение $t + x \cdot t' = \varphi(x)$, откуда $x \cdot \dfrac{dt}{dx} = \varphi(t) - t$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dt}{\varphi(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части уравнения и обозначая $\int \dfrac{dt}{\varphi(t) - t}$ через $F(t)$, будем иметь $F(t) = ln|x| + C$. Учитывая, что $t = y/x$, получим $F\left(\dfrac{y}{x}\right) == ln|x| + C$. Это общий интеграл уравнения.

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение

$$xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}.$$

Решение. Это однородное уравнение 1-го порядка. Разделив на x, получим

$$y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}} \qquad \text{или} \qquad y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

Положим $\dfrac{y}{x} = t$, тогда $y = x \cdot t$ и $y'_x = t + x \cdot t'_x$. Уравнение примет вид

$$t + x \cdot t'_x = t + e^t.$$

Откуда

$$xt' = e^t \quad \text{или} \quad x \cdot \frac{dt}{dx} = e^t.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dt}{e^t} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем это равенство

$$\int e^{-t} dt = \int \frac{dx}{x} + C, \text{ тогда } \quad -e^{-t} = ln|x| + lnC_1,$$

где $lnC_1 = C$. Заменяя t на $\dfrac{y}{x}$, запишем общий интеграл уравнения

$$-e^{-\frac{y}{x}} = ln|C_1 x| \quad \text{или} \quad \exp\left(-e^{-\frac{y}{x}}\right) = C_1 x.$$

<u>Пример 2.</u> Найти частное решение уравнения

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=2} = 1$.

Решение. Приведем данное уравнение к виду (1.2). Для этого сначала разделим обе части уравнения на dx, а затем, зная, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишем

$$y' = \frac{2xy - y^2}{x^2}, \quad y' = 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Положим $t = \dfrac{y}{x}$ или $y = xt$. Тогда $y'_x = t + x \cdot t'_x$. Подставляя в уравнение выражения для y и y'_x, получим $t + x \cdot t' = 2t - t^2$. Переносим t в правую часть уравнения и разделяем переменные

$$x \cdot \frac{dt}{dx} = t - t^2, \qquad \frac{dt}{t - t^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем уравнение

$$\int \frac{dt}{t(1-t)} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Вычислим интеграл $\int \dfrac{dt}{t(1-t)}$. Так как $\dfrac{1}{t(1-t)} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1-t}$, то

$$\int \frac{dt}{t(1-t)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{d(1-t)}{1-t} = ln|t| - ln|1-t| = ln\left|\frac{t}{1-t}\right|.$$

Окончательно имеем

$$ln\left|\frac{t}{1-t}\right| = ln|x| + lnC_1, \text{ ãäå } lnC_1 = C.$$

Заменяя t на $\dfrac{y}{x}$ и потенцируя, получим общий интеграл

$$\frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = x \cdot C_1 \quad \text{или} \quad \frac{y}{x - y} = C_1 x.$$

Полагая $x = 2,\ y = 1$, будем иметь $1 = C_1 \cdot 2$, откуда находим $C_1 = 1/2$. Подставляя найденное значение C_1 в общий интеграл, получим частный интеграл

$$\frac{y}{x - y} = \frac{1}{2}x \qquad \text{или} \qquad 2y = x \cdot (x - y).$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейно (то есть первой степени) относительно искомой функции y и ее производной y' (y и y' входят в уравнение в первых степенях, не перемножаясь между собой).

Общий вид линейного уравнения

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{1.3}$$

где $p(x), q(x)$ -- заданные функции. Будем искать решение уравнения (1.3) в виде произведения двух функций

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{1.4}$$

Одну из этих функций, например, v выберем произвольно, а другую определим так, чтобы их произведение было решением исходного уравнения.

Так как $y = u \cdot v$, то $y'_x = u'_x \cdot v + u \cdot v'_x$ и уравнение (1.3) запишется так

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot uv = q(x).$$

Отсюда

$$u'v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = q(x). \qquad (1.5)$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, то есть

$$v' + p(x) \cdot v = 0. \qquad (1.6)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Перепишем его

$$\frac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v \qquad \text{или} \qquad \frac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx.$$

Проинтегрировав, получим:

$$ln|v| = -\int p(x)dx + C.$$

Так как функция v находится произвольно, то постоянную C принимаем равной нулю. Тогда

$$ln|v| = -\int p(x)dx.$$

Подставим функцию v в равенство (1.5) и, с учетом (1.6), придем к уравнению с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \qquad \text{или} \qquad du = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx.$$

Интегрируя, получим его общее решение

$$u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Общее решение исходного уравнения (1.3) в силу (1.4) примет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение

$$y' - 2xy = (x+1) \cdot e^{x^2}.$$

Решение. Полагаем $y = uv$, тогда $y'_x = u'_x v + uv'_x$. Данное уравнение преобразуется к виду

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 2xuv = (x+1) \cdot e^{x^2}$$

или

$$u'v + u(v' - 2xv) = (x+1) \cdot e^{x^2}. \qquad (1.7)$$

Для нахождения функции v получаем уравнение $v' - 2xv = 0$. Разделяя переменные $\frac{dv}{v} = 2xdx$ и интегрируя, найдем $v(x)$: $ln|v| = x^2, \quad v = e^{x^2}$.

Подставляя найденную функцию $v(x)$ в равенство (1.7), получим уравнение для нахождения $u(x)$:

$$u' \cdot e^{x^2} = (x+1)e^{x^2}.$$

Решая его, найдем $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}e^{x^2}=(x+1)e^{x^2},\ du=(x+1)dx,\ u=\int(x+1)dx+C=\frac{x^2}{2}+x+C.$$

Зная $u(x)$ и $v(x)$, запишем общее решение исходного уравнения

$$y=e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}+x+C\right).$$

<u>Пример 2.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'_x-sinx\cdot y=2sin2x. \qquad (1.8)$$

Здесь уравнение (1.8) уравнение вида (1.3), где $p(x)=-sinx,\ q(x)=2sin2x,\ y=y(x)$ - - искомая функция. Ищем общее решение данного уравнения в виде $y=u(x)\cdot v(x).$ Тогда $y'_x=u'_x\cdot v+u\cdot v'_x$. Подставляя y и y'_x в уравнение (1.8), получим Функцию $v(x)$ найдем из уравнения

$$v'-v\cdot sinx=0,\quad \frac{dv}{dx}=v\cdot sinx,$$

$$\frac{dv}{v}=sinxdx,\quad ln|v|=-cosx,\quad v=e^{-cosx}.$$

Подставляя найденную функцию $v(x)$ в равенство (1.9), получим уравнение для нахождения $u(x)$: $\qquad u'_x\cdot e^{-cosx}=2sin2x.$

Решая его, найдем $u(x)$

$$du=2sin2x\cdot e^{cosx}dx,\quad u=4\int sinx\cdot cosx\cdot e^{cosx}dx+C.$$

Интеграл правой части находим по формуле интегрирования по частям $\int u_1dv_1=u_1v_1-\int v_1du_1$. Полагая $u_1=cosx,\ dv_1=e^{cosx}sinxdx,$ получим $du_1=-sinxdx,\ v_1=-\int e^{cosx}dcosx=-e^{cosx}$. Тогда

$$u(x)=4(-cosx\cdot e^{cosx}-\int e^{cosx}sinxdx)+C=$$

$$=4(-cosxe^{cosx}+\int e^{cosx}dcosx)+C=4e^{cosx}(1-cosx)+C.$$

Так как $y=u\cdot v$, то общее решение уравнения (1.8) запишется так:

$$y=4(1-cosx)+Ce^{-cosx}.$$

Это соотношение будет общим решением уравнения (1.8).

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (1.10)$$

назвается линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, где p и q заданные числа, а $f(x)-$данная функция. Если в (1.10) $f(x)\equiv 0,$ то соответствующее ему уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1.11)$$

называется однородным. Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ --- два частных решения уравнения (1.11), то Cy_1 и $y_1 + y_2$ также решения этого уравнения, где C -- постоянная.

Определение 1. Даны две функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ на некотором интервале. Определитель 2 -- го порядка

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

называется **определителем Вронского**.

Определение 2. Два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ уравнения (1.11) образуют **фундаментальную систему** частных решений на некотором интервале, если всюду в интервале определитель Вронского отличен от нуля.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного уравнения). *Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ уравнения (1.11) образуют фундаментальную систему частных решений, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad (1.12)$$

где C_1, C_2 --- произвольные постоянные, а y_1, y_2 --- частные решения, образующие фундаментальную систему частных решений на некотором интервале.

Общее решение уравнения (1.10) имеет вид

$$y = \bar{y} + y^*,$$

где $\bar{y}$ --- общее решение однородного уравнения (1.11), y^* --- частное решение неоднородного уравнения (1.10).

Линейные однородные уравнения 2 -- го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение 2 -- го порядка с постоянными коэффициентами (1.11). Общее решение уравнения имеет вид (1.12). Будем искать частные решения этого уравнения в виде $y = e^{kx}$, где k --- постоянная величина. Подставив в уравнение (1.11) $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, придем к уравнению

$$k^2 + pk + q = 0,$$

которое называется характеристическим уравнением для уравнения (1.11). Корни характеристического уравнения находятся по формуле

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Корни могут быть: 1) действительные и различные; 2) действительные и равные; 3) комплексно -- сопряженные. Рассмотрим эти случаи.

1. Если k_1 и k_2 --- корни характеристического уравнения вещественные и различные $(k_1 \neq k_2)$, то функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ являются частными решениями уравнения (1.11), образующими фундаментальную систему частных решений.

Общее решение уравнения (1.11) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (1.13)$$

2. Если k_1 и k_2 --- корни характеристического уравнения вещественные и равные $k_1 = k_2$, то функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = xe^{k_1 x}$ являются частными решениями уравнения (1.11) и образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_1 x} \cdot x \quad \text{или} \quad y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x). \qquad (1.14)$$

3. Если k_1 и k_2 --- корни характеристического уравнения комплексно -- сопряженные $\left(k_{1,2} = \alpha + i\beta, \text{ где } \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, i = \sqrt{-1}\right)$, то функции $y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} sin\beta x$ являются частными решениями уравнения (1.11) и образуют фундаментальную систему частных решений.

Общее решение уравнения (1.11) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x). \qquad (1.15)$$

<u>Примеры.</u> Решить уравнения:

1). $y'' + 3y' - 10y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 3k - 10 = 0.$ Его корни $k_1 = 2, k_2 = -5.$ Частными решениями исходного уравнения являются функции $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{-5x}$. В силу (1.13) общее решение уравнения

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}.$$

2). $3y'' + y' = 0.$

Здесь характеристическое уравнение $3k^2 + k = 0,$ его корни $k_1 = 0$ и $k_2 = -1/3$ и в силу (1.13) общее решение данного уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}.$$

3). $y'' - 8y' + 16y = 0.$

Решая характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 16 = 0,$ находим корни $k_1 = k_2 = 4.$ Частными решениями уравнения будут $y_1 = e^{4x}$ и $y_2 = xe^{4x}$. В силу (1.14) общее решение уравнения

$$y = e^{4x}(C_1 + C_2 x).$$

4). $y'' + 4y' + 20y = 0.$

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 20 = 0.$ Его корни $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-16} =$ $= -2 \pm 4\sqrt{-1} = -2 \pm 4i.$ Здесь $\alpha = -2, \beta = 4.$ В силу (1.15) общее решение уравнения

$$y = e^{-2x}(C_1 cos4x + C_2 sin4x).$$

Метод неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения неоднородного уравнения

Этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, когда правая часть $f(x)$ имеет специальный вид.

Рассмотрим неоднородное уравнение 2 -- го порядка с постоянными коэффициентами (1.10). Соответствующее ему однородное уравнение (1.11). Решение этого уравнения сводится к нахождению корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0.$

Общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Общее решение исходного уравнения (1.10) определяется формулой $y = \bar{y} + y^*$.

1. Пусть правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \qquad (1.16)$$

где α -- заданное число, $P_n(x)$ -- многочлен степени n с заданными коэффициентами. Частное решение y^* неоднородного уравнения будем искать в виде

а) $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$, если α не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^* = x \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}$, если α совпадает с одним из корней характеристического уравнения;

в) $y^* = x^2 \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}$, если α совпадает с равными друг другу корнями характеристического уравнения.

Здесь $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$ -- многочлен степени n с неопределенными коэффициентами. В частности,

$$Q_0(x) = A_0,\ Q_1(x) = A_0 x + A_1,\ Q_2(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \ldots.$$

Для определения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ потребуем, чтобы y^* было решением данного уравнения. Для этого подставим $y^*, y^{*}{}', y^{*}{}''$ в исходное уравнение. В левой части равенства после приведения подобных членов и сокращения всего равенства на $e^{\alpha x}$, получим многочлен степени n, коэффициенты которого содержат искомые неопределенные постоянные. В правой части равнства стоит заданный многочлен $P_n(x)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа в равенстве, получим систему для определения $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

2. Пусть правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x, \qquad (1.17)$$

где β -- заданное число, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ -- многочлены степени n и m с заданными коэффициентами.

Частное решение y^* ищем в виде

а) $y^* = \tilde{P}_k(x)cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)sin\beta x,$ если $\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения;

б) $y^* = x\cdot(\tilde{P}_k(x)cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)sin\beta x),$ если $\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения.

Здесь $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ -- многочлены степени k с неопределенными коэффициентами, k -- наибольшее из чисел n и m.

Рассмотрим часто встречающийся случай, когда правая часть

$$f(x) = acos\beta x + bsin\beta x,$$

где a и b -- заданные числа.

Здесь частное решение y^* ищем в виде

а) $y^* = Acos\beta x + Bsin\beta x,$ если $\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения;

б) $y^* = x\cdot(Acos\beta x + Bsin\beta x),$ если $\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения, где A и B -- неопределенные коэффициенты.

Для определения этих неопределенных коэффициентов подставим y^*, y^*', y^*'' в исходное уравнение. В полученном равенстве, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x отдельно при $cos\beta x$ и отдельно при $sin\beta x$ слева и справа от знака равенства, получим систему уравнений для вычисления коэффициентов A и B.

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение $y'' + y' + y = (x^2 + x)e^x.$

Запишем соответствующее однородное уравнение $y'' + y' + y = 0.$ Его характеристическое уравнение $k^2 + k + 1 = 0$ имеет корни

$$k_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad k_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Общее решение однородного уравнения в силу (1.15) есть

$$\bar{y} = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид (1.16), причем $n = 2; \alpha = 1$ и не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, y^* надо искать в виде $y^* = (A_0x^2 + A_1x + A_2)e^x,$ где A_0, A_1, A_2 подлежат определению. Найдем y^*' и y^*'' :

$$y^*' = (2A_0x + A_1)e^x + (A_0x^2 + A_1x + A_2)e^x,$$

$$y^*'' = 2A_0e^x + 2(2A_0x + A_1)e^x + (A_0x^2 + A_1x + A_2)e^x.$$

Подставляя y^*, y^*', y^*'' в исходное уравнение, получим

$$(x^2 + x)e^x = \left(3A_0x^2 + (6A_0 + 3A_1)x + 2A_0 + 3A_1 + 3A_2\right)e^x.$$

Разделив обе части тождества на e^x и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, будем иметь систему трех уравнений с тремя неизвестными $1 = 3A_0, 1 = 6A_0 + 3A_1, 0 = 2A_0 + 3A_1 + 3A_2,$ из которого найдем

$$A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = -\frac{1}{3},\ A_2 = -\frac{1}{9}.$$

Частное решение примет вид

$$y^* = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)e^x.$$

Общим решением данного неоднородного уравнения будет функция

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)e^x.$$

<u>Пример 2.</u> Решить уравнение $y'' - 7y' = 14x.$

Запишем соответствующее ему однородное уравнение $y'' - 7y' = 0,$ характеристическое для которого $k^2 - 7k = 0,$ $k(k-7) = 0$ имеет корни $k_1 = 0, k_2 = 7.$ Общее решение однородного уравнения в этом случае $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{7x}.$ Правая часть $f(x) = 14x$ вида (1.16),

где $n = 1,$ а коэффициент $\alpha = 0$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение неоднородного ищем в виде $y^* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$ Найдем $y^*{}' = 2Ax + B,$ $y^*{}'' = 2A,$ подставив которые в исходное уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим $A = -1, B = -2/7.$ Частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y^* = -x^2 - 2/7x = -x(x + 2/7)$, а общее представляется формулой

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{7x} - x(x + 2/7).$$

<u>Пример 3.</u> Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}.$

Вначале находим общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0.$ Его характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 3.$ В силу (1.14) общее решение однородного уравнения $\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} x.$

Далее находим частное решение y^* данного неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид (1.16), причем $n = 0; \alpha = 3$ и совпадает с двумя равными корнями характеристического уравнения. Поэтому y^* ищем в виде $y^* = A_0 x^2 e^{3x}.$ Отсюда находим $y^*{}' = 2A_0 x e^{3x} + 3A_0 x^2 e^{3x},$ $y^*{}'' = 2A_0 e^{3x} + 12A_0 x e^{3x} + 9A_0 x^2 e^{3x},$ и, подставляя $y^*, y^*{}', y^*{}''$ в исходное уравнение, после сокращения получим: $e^{3x} = 2A_0 e^{3x},$ откуда $1 = 2A_0$ или $A_0 = 0{,}5.$ Следовательно,

$$y^* = 0{,}5x^2 e^{3x},$$

а общее решение неоднородного уравнения представляется в виде

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + 0{,}5x^2 e^{3x}.$$

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Сумма ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда

Пусть задана бесконечная последовательность чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots. \tag{2.1}$$

Это означает, что задана формула $u_n = f(n)$, по которой можно вычислить любое число из этой последовательности по его порядковому номеру. Например, $u_n = (2/n)^2$, следовательно, $u_1 = 4, u_2 = 1, u_3 = 4/9, \ldots$.

Числовым рядом называется формальная сумма

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{2.2}$$

бесконечного числа слагаемых – членов последовательности (2.1). Теперь числа $u_n, n = \overline{1,\infty}$, будем называть членами ряда (2.2). Для практической реализации бесконечной операции сложения предложена следующая процедура.

Обозначим символом S_n сумму первых n слагаемых ряда (2.2), т.е.

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i .$$

Величина S_n называется $n-$ой **частичной суммой ряда** (2.2).

Если существует конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n , \tag{2.3}$$

то число S называют **суммой** ряда (2.2), а сам ряд (2.2) называют **сходящимся**.

Если S_n при $n \to \infty$ не имеет конечного предела, то ряд (2.2) называют **расходящимся**.

Таким образом, процесс «бесконечного суммирования» заменен нахождением конечной суммы S_n (правда для любого натурального n) и предельным переходом в формуле (2.3). Известным примером сходящегося числового ряда является геометрическая прогрессия со знаменателем $q, |q| < 1$, т.е. числовой ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^n$, $\alpha -$некоторое число. Для $n-$ой частичной суммы доказана формула $S_n = \alpha(1-q^n)/(1-q)$, из которой следует, что в случае, когда $|q| < 1$, предел (2.3) существует и равен $S = \alpha/(1-q)$, т.е. геометрическая прогрессия со знаменателем $q, |q| < 1$, сходится и её суммой является число $\alpha/(1-q)$, если же $|q| > 1$, то предел в формуле (2.3) не существует, значит при $|q| > 1$, геометрическая прогрессия - расходящийся ряд.

Отметим, что при нахождении суммы ряда ключевую роль играет нахождение предела в правой части формулы (2.3). Очень часто этот предел вычислить не удается, поэтому важным является вопрос о том, существует для исследуемого ряда указанный предел или нет, т.е. сходится или расходится этот ряд. Если мы точно знаем, что ряд сходится, то его точную сумму можно заменить на приближенную, взяв несколько первых слагаемых ряда (чем больше, тем ответ точнее). Если же ряд расходится, то у такого ряда суммы не существует, значит и приближенное значение этой суммы находить нельзя. Поэтому весьма важными являются признаки сходимости ряда, по которым было бы нетрудно определить, сходится данный ряд или нет.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости). *Если числовой ряд (2.2)сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{2.4}$$

Практически применяется следствие из теоремы 1.

Следствие. Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, *то ряд (2.2) расходится.*

Следствие из теоремы 1 дает достаточный признак расходимости числового ряда. Именно, если для некоторого числового ряда условие (2.4) не выполнено, то этот ряд расходится.
Пример.
На основании следствия из теоремы 1 легко установить, что геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^n$, в случае $|q| \geq 1$ является расходящимся рядом. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} aq^n = a \lim_{n\to\infty} q^n = \infty,$$

т.е. $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, следовательно, в этом случае геометрическая прогрессия является расходящимся рядом.

Подчеркнем, что при помощи необходимого признака сходимости можно установить лишь расходимость ряда: если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится. Если же оказалось, что $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то эта информация нам ничего не дает: ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Ряды с положительными членами. Признаки сравнения

Будем рассматривать ряд (2.2), все члены которого положительны, т.е. $u_n > 0, n = \overline{1,\infty}$. Такие ряды называются **знакоположительными**. Для исследования сходимости знакоположительного ряда часто оказываются полезными следующие признаки.

Теорема 2 (первый признак сравнения). *Даны два знакоположительных ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *причем для каждого порядкового номера* n *выполнено неравенство* $u_n < v_n, n = \overline{1,\infty}$. *Тогда если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *сходится, если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *расходится, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *расходится.*

Теорема 3 (второй признак сравнения). *Даны два знакоположительных ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. *Если существует предел* $\lim_{n\to\infty} u_n / v_n = a$, $0 < a < \infty$, *то оба ряда или сходятся, или оба расходятся.*

Для того, чтобы применять признаки сравнения для исследования сходимости числового ряда, нужно иметь некоторый набор числовых рядов сходимость или расходимость которых известна. Кроме геометрической прогрессии можно использовать ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta} = 1 + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\beta} + \cdots + \frac{1}{n^\beta} + \cdots, \tag{2.5}$$

который сходится при $\beta > 1$ и расходится, если $\beta \leq 1$. Частный случай ряда (2.5), который получается из (2.5) при $\beta = 1$ называется гармоническим рядом.

Примеры.

1. Исследуем сходимость ряда

$$\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3} + \cdots + \sin\frac{\pi}{n} + \cdots,$$

т.е. $u_n = \sin(\pi/n)$. В качестве второго ряда выберем гармонический, т.е. $v_n = 1/n$. С использованием первого замечательного предела, учитывая, что при $n \to \infty$ число $\pi/n \to 0$, вычислим предел

$$a = \lim_{i\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{1/n} = \pi \lim_{i\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = \pi, 0 < \pi < \infty.$$

Следовательно, по второму признаку сравнения оба ряда ведут себя одинаково, а так как гармонический ряд расходится, то и исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi/n)$ так же расходится.

2. Исследуем сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{125}+\cdots+\frac{1}{(2+n)^n}+\cdots.$$

Здесь $u_n = 1/(2+n)^n$, выберем $v_n = (1/2)^n$. Ряд с общим членом $v_n = (1/2)^n$ является геометрической прогрессией с $\alpha = 1$ и знаменателем $q = 1/2 < 1$, т.е. является сходящимся рядом. Поскольку для $n = 1,2,3,\ldots$ справедливо неравенство $2+n>2$, то

$$\frac{1}{2+n}<\frac{1}{2}\Rightarrow u_n=\left(\frac{1}{2+n}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n=v_n,\quad n=\overline{1,\infty}.$$

Итак, доказали, что для всех целых положительных n выполнено неравенство $u_n < v_n$. По первому признаку сравнения (теорема 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/(2+n)^n$ сходится.

Признаки Даламбера и Коши

Рассмотрим ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Теорема 4 (признак Даламбера). *Пусть существует конечный предел* $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. *Тогда при* $l<1$ *ряд сходится, при* $l>1$ *ряд расходится.*

Пример.

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n/n$. Здесь $u_n = 2^n/n$, следовательно, $u_{n+1}=2^{n+1}/(n+1)$. Вычислим предел

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n}{(n+1)2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=2>1,$$

Следовательно, исследуемый ряд расходится.

Теорема 5 (радикальный признак Коши). *Пусть существует конечный предел* $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$. *Тогда при* $l<1$ *ряд сходится, при* $l>1$ *ряд расходится.*

Пример.

$$u_n=\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n,\Rightarrow l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+2/n}=\frac{1}{3}<1.$$

Ряд сходится.

Теорема 6 (интегральный признак Коши). *Дан знакоположительный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, *причем*

$$u_1\ge u_2\ge\cdots\ge u_n\ge u_{n+1}\ge\cdots. \tag{2.6}$$

Пусть $f(x)$ *– непрерывная, монотонно убывающая функция такая, что* $f(1)=u_1,\ f(2)=u_2,\ldots,\ f(n)=u_n,\ldots$. *Тогда, если несобственный интеграл* $\int_a^{\infty}f(x)dx$ *сходится, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *сходится, если несобственный интеграл* $\int_a^{\infty}f(x)dx$ *расходится, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *расходится (здесь* $a-$ *выбранное нами положительное число).*

Пример.

При помощи этого признака исследуем ряд (2.5) в котором $u_n = 1/n^{\beta}$, $\beta>0$. Очевид-

но, что $u_1 = 1 > u_2 = 1/2^\beta > u_3 = 1/3^\beta > \cdots > u_n = 1/n^\beta > \cdots$, т.е. условие (2.6) выполнено. Определим функцию $f(x)$ формулой $f(x) = 1/x^\beta$. Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна и монотонно убывает на интервале $[1,+\infty)$. Рассмотрим теперь в случае $\beta \neq 1$ несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{M\to\infty}\left.\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right|_1^M = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{M^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta}\right].$$

Теперь ясно, что если $\beta > 1$, то $M^{1-\beta} \to 0$ при $M \to \infty$ и несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta} = -\frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{\beta-1},$$

т.е. сходится. По теореме 6 ряд (2.5) при $\beta > 1$ сходится. Если $\beta < 1$, то $M^{1-\beta} \to \infty$ при $M \to \infty$, следовательно, несобственный интеграл $\int_1^\infty x^{-\beta}dx$ расходится, согласно интегральному признаку Коши ряд (2.5) так же расходится. Наконец в случае $\beta = 1$ имеем

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty}\left.\ln x\right|_1^M = \lim_{M\to\infty}\left[\ln M - \ln 1\right] = \infty,$$

Т.е. интеграл, а значит, по теореме 6 и гармонический ряд расходятся. Итак, ряд (2.5) сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \le 1$.

Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Рассмотрим теперь числовой ряд, знаки членов которого чередуются

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n, \quad u_n \ge 0. \tag{2.7}$$

Такой ряд называется знакочередующимся. Можно показать, что если ряд, составленный из абсолютных величин членов рядя (2.7), т.е. ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, то и сам знакочередующийся ряд (2.7) сходится. В этом случае говорят, что ряд (2.7) сходится абсолютно. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (2.7) расходится, а сам знакочередующийся ряд (2.7) все же сходится, то говорят, что ряд (2.7) сходится условно. Условная сходимость ряда (2.7) может быть установлена при помощи следующего достаточного признака сходимости знакочередующихся рядов.

Теорема 7 (Лейбниц). *Если для знакочередующегося ряда (2.7) выполнены условия*

$$u_1 \ge u_2 \ge \cdots \ge u_n \ge u_{n+1} \ge \cdots, \tag{2.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{2.9}$$

то ряд (2.7) сходится и сумма ряда будет положительным числом меньшим u_1.

Пример.

Дан знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots,$$

т.е. $u_n = 1/n$. Проверим для этого ряда выполнение условий теоремы 7. Очевидно, что $u_1 = 1 > u_2 = 1/2 > u_3 = 1/3 > \cdots > u_n = 1/n > \cdots$, т.е. условие (2.8) выполнено; так как $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, то условие (2.9) выполнено, следовательно, исследуемый ряд сходится, причем условно. Последнее вытекает из того, что ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда, является гармоническим, т.е. расходящимся.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Степенные ряды, область сходимости степенного ряда

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

члены которого являются функциями переменной x, называются **функциональным**. При каждом значении x этот ряд будет представлять собой числовой ряд, который либо сходится, либо расходится.

Множество всех значений x, для которых получившийся из функционального ряда числовой ряд сходится, называется **областью сходимости** данного функционального ряда.

Очевидно, что для всех значений x из области сходимости сумма функционального ряда существует и является некоторой функцией переменной x.

Степенной ряд является частным случаем функционального ряда и имеет вид

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (2.10)$$

(это степенной ряд по степеням x) или

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (2.11)$$

(степенной ряд по степеням $(x-x_0)$). Здесь $x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – заданные числа, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **коэффициентами** степенного ряда.

Положительное число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда (2.10), если этот ряд абсолютно сходится для всех $x, |x|<R$, и расходится для всех $x, |x|>R$.

Положительное число R называется радиусом сходимости степенного ряда. Этот ряд абсолютно сходится для всех $x, |x-x_0|<R,$ и расходится для всех $x, |x-x_0|>R$.

Областью сходимости степенного ряда является **интервал сходимости**. Для ряда (2.10) это интервал $(-R,R)$, а для степенного ряда (2.11) – интервал (x_0-R, x_0+R). На концах интервала сходимости (в точках $x=-R, x=R$ для ряда (10) и в точках $x=x_0-R$, $x=x_0+R$ для ряда (2.11)) степенной ряд может сходиться, а может и расходиться. Этот вопрос исследуется отдельно.

Радиус сходимости степенного ряда определяется по формуле

$$R=\frac{1}{L}, \text{ где } L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ или } L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Примеры.

Найти интервал сходимости следующих степенных рядов

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$, здесь $a_n=\frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$, $|a_n|=\frac{1}{3^{n-1}\sqrt{n}}$, $|a_{n+1}|=\frac{1}{3^n\sqrt{n+1}}$ $\Rightarrow$

$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}\sqrt{n}}{3^n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $R=3$. Для данного ряда интервал сходимости $(-3,3)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2}$, здесь $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$ $\Rightarrow$ $L=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^2}=1$,

следовательно, $R=1$, так как $x_0=-2$, то интервал сходимости $(-2-1,-2+1)$, т.е. $(-3,-1)$.

Ряды Тейлора и Маклорена

Дана функция $y = f(x)$, которая имеет непрерывные производные любого порядка в некоторой окрестности точки x_0. Найдем числа $f(x_0),\ f'(x_0),\ f''(x_0), \dots f^{(n)}(x_0), \dots$ с использованием которых образуем степенной ряд по степеням $(x - x_0)$ вида

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots . \qquad (2.12)$$

Этот ряд, построенный с использованием значений функции $y = f(x)$ и её производных в точке x_0, называется **рядом Тейлора** функции $f(x)$. Поскольку мы знаем коэффициенты этого ряда $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$, то можем вычислить радиус сходимости данного ряда $R = 1/L$ и записать интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$. Ряд (2.12) в каждой точке x своего интервала сходимости будет сходиться к функции $f(x)$, по которой этот ряд был построен (т.е. иметь своей суммой функцию $f(x)$), если выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0 \qquad (2.13)$$

для всех x из интервала сходимости. Здесь ζ – некоторая точка, разделяющая x и x_0. Итак, если выполнено условие (2.13), то для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ имеет место условное равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots .$$

Здесь R – радиус сходимости ряда (2.12). В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ представима своим рядом Тейлора. Если же условие (2.13) не выполнено, то внутри своего интервала сходимости ряд (2.12) будет сходиться, но его суммой будет не функция $f(x)$.

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора для функции $y = f(x)$ принимает вид

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

и называется **рядом Маклорена**. Этот ряд в каждой точке x своего интервала сходимости $(-R, R)$, где R – радиус сходимости ряда, будет сходиться к функции $f(x)$, т.е. будет иметь место условное равенство

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots,$$

если выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0, \qquad (2.14)$$

где ζ – некоторая точка, разделяющая x и начало координат.

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

1) Для функции $f(x) = e^x$ найдем производные $f'(x) = e^x = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots$. Вычислим значения функции и всех её производных при $x = 0$, получим одинаковые значения $f(0) = 1 = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots$. Таким образом, ряд Маклорена для функции $f(x) = e^x$ имеет вид

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

Легко вычислить радиус сходимости этого ряда. Поскольку $a_n=1/n!$, $a_{n+1}=1/(n+1)!$, то $L=\lim_{n\to\infty}\left(n!/(n+1)!\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1/(n+1)\right)=0,\Rightarrow R=\infty$, т.е. ряд сходится для любого значения $x\in(-\infty,+\infty)$. Поэтому согласно необходимого признака сходимости (теорема 1) для любого фиксированного x справедливо соотношение $x^{n+1}/(n+1)!\to 0$ при $n\to\infty$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\varsigma}}{(n+1)!}x^{n+1}=0,$$

т.е. условие (2.14) выполнено для любого ς, разделяющего начало координат и точку x. Последнее доказывает справедливость формулы

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty), \tag{2.15}$$

разложения функции e^x в ряд Маклорена.

2) Для функции $f(x)=\sin x$ можно доказать справедливость следующей формулы разложения в ряд Маклорена

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Если взять $f(x)=\cos x$, то аналогично можно доказать формулу разложения

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

3) Для функции $f(x)=(1+x)^a$, где $a-$любое число, справедливо разложение в ряд

$$(1+x)^a=1+\frac{a}{1!}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,+1),$$

который называется биноминальным.

4) Для функции $f(x)=\ln(1+x)$ справедливо следующее разложение в ряд

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

5) Для функции $f(x)=arctg\,x$ справедлива формула разложения в ряд Маклорена

$$arctg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,\quad x\in[-1,1].$$

6) Для функции $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ справедливо следующее разложение в ряд

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right],\quad x\in(-1,1).$$

Применение рядов к приближенным вычислениям.

Разложение функции вряд применяется при приближенном вычислении значений функций. Для этого берется несколько первых членов разложения функции в ряд Тейлора, остальные слагаемые (их бесконечно много) отбрасываются. Погрешность вычисления равна сумме отброшенного ряда. Если этот ряд знакочередующийся, то согласно теореме Лейбница погрешность меньше абсолютной величины первого отброшенного слагаемого.

Если же отброшенный ряд не является знакочередующимся, то оценка погрешности приближенного вычисления проводится на основе формулы Тейлора. Эта формула справед-

лива для функций, имеющих непрерывные производные до $n+1$ порядка включительно, и имеет вид

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \qquad (2.16)$$

в которой x_0 – число, n – целое положительное число, а остаточный член $R_n(x)$ можно взять в виде

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ς – некоторое число между x и x_0. Теперь ясно, что если взять ровно n членов разложения функции в ряд Тейлора, то абсолютная величина погрешности вычисления равна $|R_n(x)|$, следовательно, для оценки погрешности достаточно оценить сверху выражение для $|R_n(x)|$.

Пример.

С точностью до 0,0001 вычислить $\sqrt[4]{17}$. Для этого число перепишем в виде

$$\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/4}.$$

Применим формулу разложения в биноминальный ряд, полагая $x=1/16,\ a=1/4$, получим

$$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/4}=2\left(1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3}-\cdots\right)=2+0{,}03124-0{,}00074+0{,}00002-\cdots.$$

Для приближенного вычисления с заданной точностью достаточно взять три первых члена разложения в ряд, поскольку для знакочередующихся рядов погрешность оценивается первым отброшенным слагаемым. Таким образом,

$$\sqrt[4]{17}\approx 2+0{,}03124-0{,}00074=2{,}0305,$$

причем погрешность приближенного вычисления не превосходит величины 0,00002, что меньше требуемой точности 0,0001.

Разложение в ряд применяется также при приближенном вычислении определенных интегралов.

Пример.

С точностью до 0,0005 вычислить $\int\limits_0^{0,5} e^{x^2}dx$. Нам понадобится разложение в ряд функции e^{x^2}, которое получится, если в формуле (15) заменить x на x^2. Получим

$$e^{x^2}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Поскольку ряд знакоположительный, то оценка погрешности приближенного вычисления определится оценкой $R_n(x)$ в формуле Тейлора (2.16), которая для функции e^{x^2} примет вид

$$e^{x^2}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+R_n(x^2),\quad R_n(x)=\frac{e^{\varsigma}}{(n+1)!}(x^2)^{n+1}.$$

На основании этой формулы запишем

$$\int\limits_0^{0,5} e^{x^2}dx=\int\limits_0^{0,5}\left(1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+R_n(x^2)\right)dx=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right)\Bigg|_0^{0,5}+\int\limits_0^{0,5}R_n(x^2)dx$$

Возьмем $n=2$ и оценим погрешность $\int\limits_0^{0,5}R_2(x^2)dx=\int\limits_0^{0,5}\frac{e^{\varsigma}}{3!}x^6dx\le\frac{e^{0,5}(0,5)^7}{6\cdot 7}\le 0{,}0003$.

Таким образом, если мы возьмем только три первых члена разложения в ряд (возьмем $n=2$), то погрешность приближенного вычисления данного интеграла будет меньше, чем 0,0003. Следовательно,

$$\int_0^{0,5} e^{x^2}dx \approx \int_0^{0,5}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}\right)dx = \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^{0,5} \approx 0{,}54479.$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные понятия. Классическое и статистическое определения вероятности. Элементы комбинаторики

Случайным событием называется событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта. Например, выпадение герба при бросании монеты, выпадение шестерки при бросании игральной кости. Результаты опыта часто называют исходами, а сами опыты – испытаниями.

События образуют полную группу событий, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Например, при бросании монеты могут появиться лишь два события: выпадение герба или решки. Эти события образуют полную группу событий.

Несколько событий называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе при одном испытании. Например, выпадение грани при броске игральной кости является несовместным по отношению к выпадению любой другой грани в данном опыте.

Если результат опыта можно представить в виде полной группы событий, которые попарно несовместны и равновозможны, то вероятность события равна отношению числа m – благоприятствующих этому событию исходов опыта к общему числу n всех равновозможных исходов, то есть $P(A)=m/n$. Под равновозможными понимаются события, которые в силу тех или иных причин (например, симметрии) не имеют объективного преимущества перед другими. В этой ситуации равновозможные, попарно несовместные события, образующие полную группу событий, называют элементарными исходами (Э.И.)

Например, если событие A - выпадение четного числа очков на игральной кости, то этому событию благоприятствуют следующие элементарные исходы: выпадение двойки, четвертки, шестерки. Таким образом, в этом случае m=3, n=6. Вероятность события A равна $P(A)$=3/6=1/2. Такое определение вероятности называется классическим.

При решении задач теории вероятностей используются элементы комбинаторики. Комбинаторика изучает количество комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок из n элементов $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n!$.

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всевозможных размещений из n элементов по m

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

При $m=n$ получаем перестановки; $1\le m\le n$.

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элемен-

тов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний вычисляется по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Для удобства принято 0!=1.

Примеры.

1.Брошены две игральные кости, найти вероятность p того, что на них появится одинаковое число очков.

Решение. Каждая из шести граней одной кости составляет шесть различных комбинаций с гранями другой.

Выпишем все элементарные исходы:

(1,1), (1,2), …..,(1,6)
(2,1), (2,2), …..,(2,6)
……
(6,1), (6,2), …..,(6,6)

Таким образом, всего элементарных исходов $n = 6 \cdot 6 = 6^2 = 36.$

Число комбинаций, благоприятствующих условию задачи, m=6, $A = \{11,22,33,44,55,66\}$, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

2.Найти вероятность правильного набора номера телефона p, состоящего из 7 цифр, если известно, что все цифры в нем различны.

Решение. Так как, на первом месте может быть любая из 10 цифр, на втором - любая из 9 оставшихся, на третьем - любая из 8 оставшихся и т.д., то n=10·9·8·7·6·5·4= A_{10}^7, очевидно, что $m = 1$.

$$p = \frac{1}{A_{10}^7} = \frac{3!}{10!}.$$

3.В партии, состоящей из k изделий имеется l дефектных. Из партии выбирается для контроля r изделий. Найти вероятность p того, что ровно s из них будут дефектными.

Решение. Общее число случаев $n = C_k^r$, $m = C_l^s \cdot C_{k-l}^{r-s}$ –число случаев, благоприятствующих появлению s дефектных деталей из r отобранных , искомая вероятность

$$p = \frac{C_l^s \cdot C_{k-l}^{r-s}}{C_k^r}.$$

4.В колоде 52 карты. Колода делится на две равные части. Найти вероятности следующих событий:

A - в каждой части по два туза,

B - в одной один туз, в другой 3.

Решение. $P(A) = \dfrac{C_4^2 \cdot C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}$, $P(B) = \dfrac{C_4^1 C_{48}^{25}}{C_{52}^{26}} + \dfrac{C_4^3 C_{48}^{23}}{C_{52}^{26}} = \dfrac{2C_4^1 C_{48}^{25}}{C_{52}^{26}}$.

Теоремы сложения и умножения. Вероятность наступления хотя бы одного события

Суммой двух событий $A+B$ называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. **Произведением** двух событий A и B называется событие C, состоящее в совместном появлении события A и события B: $C = AB$. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теорема сложения вероятностей.

1.Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

2. Вероятность суммы двух совместных событий A и B определяется по формуле

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

3.Если события $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна 1: $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$.

Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию A, если оно состоит в не появлении события A. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1, \quad P(A)=1-P(\overline{A}), \text{ если } P(A)=p, \text{ то } P(\overline{A})=1-p=q.$$

Теорема умножения вероятностей.

Условной вероятностью события A называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $P(A/B)$ или $P_B(A)$.

События A и B называются **независимыми**, если на вероятность наступления события B не влияет факт наступления события A. Вероятность произведения (совместного наступления) двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что первое событие наступило

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B).$$

Для независимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей для нескольких зависимых событий

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Для независимых событий

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

Вероятность появления хотя бы одного из нескольких событий, можно найти следующим образом

$$P(n>1)=1-q_1q_2\ldots q_n, \quad q_i=1-P(A_i).$$

Примеры

1.Два стрелка стреляют по мишени, вероятности попаданий p_1 и p_2 Найти вероятности следующих событий: а) два попадания в мишень,
б) два промаха, в) только одно попадание, г) хотя бы одно попадание.

Решение: а) Пусть событие A – попадание первого стрелка, B - второго. $P(A)=p_1$, $P(B)=p_2$. Тогда вероятность двух попаданий в мишень $P(AB)=P(A)P(B)=p_1p_2$, так как события A и B независимы.

б) Аналогично два промаха: $\overline{A}-$ промах первого стрелка, $\overline{B}-$ второго, тогда

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=q_1q_2, \text{ где } q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2.$$

в) Событие $A\overline{B}$ означает попадание первого стрелка и промах второго, событие $\overline{A}B$- промах первого и попадание второго. Так как эти события являются несовместными,

то к ним можно применить теорему сложения вероятностей несовместных событий $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=p_1q_2+q_1p_2$.

г) Вероятность хотя бы одного попадания определяется по формуле $P(n\geq 1)=1-q_1q_2$.

2.Среди 25 лотерейных билетов 1 выигрышный. Зависит ли вероятность выбора выигрышного билета для трех человек от очередности. Пусть событие A - выбор выигрышного билета для первого игрока, B -второго, C –третьего. Вероятность выигрыша первого игрока $P(A)=\frac{1}{25}$, второго - $P(B)=P(\overline{A})P(B/\overline{A})=\frac{24}{25}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{25}$,

третьего $P(C)=P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})P(C/\overline{A}\overline{B})=\frac{24}{25}\cdot\frac{23}{24}\cdot\frac{1}{23}=\frac{1}{25}$.

3.При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Найти вероятность, того что при n циклах объект будет обнаружен, если обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо друг от друга.

Решение. Вероятность того, что объект не будет обнаружен во всех n циклах $(1-p)^n$.Вероятность обнаружения объекта хотя бы в одном цикле $1-(1-p)^n$.

4.Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно 4 карты. Рассмотрим события

A -среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновая.

B -среди вынутых карт будет хотя бы одна червонная.

Найти вероятность события $C=A+B$.

Решение. Переходя к противоположному событию $\overline{C}$ -нет ни бубновой, ни червонной карты , имеем

$$P(\overline{C})=\frac{26}{52}\cdot\frac{25}{51}\cdot\frac{24}{50}\cdot\frac{23}{49},\quad P(C)=1-P(\overline{C}).$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Событие A может появиться только с одним событием из полной группы несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Заданы вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$ и условные вероятности $P(A/B_1), P(A/B_2), \ldots, P(A/B_n)$ появления события A. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)\,P(A/B_2)+\ldots+P(B_n)P(A/B_n)$$

или $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)$, здесь $\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=1$.

Если вероятности гипотез до опыта были $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$ и в результате опыта появилось событие A, то вероятность гипотезы B_j после появления A можно найти по формуле Байеса

$$P(B_j/A)=\frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)},\qquad 1\leq j\leq n.$$

Примеры.

1.Имеются три одинаковые урны. В первой урне a белых шаров, b –черных, во второй c –белых, d - черных, в третьей l - белых, k - черных. Некто подходит к одной из урн и достает из нее шар. Найти вероятность, что этот шар белый.

Рассмотрим гипотезы:

B_1 - выбор первой урны,

B_2 - выбор второй урны,

B_3 - выбор третьей урны.

В силу равновозможности выбора урн имеем

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}, \quad P(A/B_1) = \frac{a}{a+b}, \quad P(A/B_2) = \frac{c}{c+d}, \quad P(A/B_3) = \frac{l}{l+k}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3}\frac{a}{a+b} + \frac{1}{3}\frac{c}{c+d} + \frac{1}{3}\frac{l}{l+k}.$$

2.Приборы одного наименования изготавливаются двумя заводами; первый завод поставляет $\frac{2}{3}$ всех изделий, поступающих на производство; второй - $\frac{1}{3}$. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом равна p_1, второго - p_2. Определить полную(среднюю) надежность p прибора, поступившего на производство

Решение. Гипотезы: B_1- выбор прибора первого завода, B_2 - выбор прибора второго завода. По условию задачи вероятности гипотез:

$$P(B_1) = \frac{2}{3}, \quad P(B_2) = \frac{1}{3}.$$

По условию, вероятность надежности прибора первого завода $P(A/B_1) = p_1$, второго $P(A/B_2) = p_2$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2.$$

3. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу равна 0,55; а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9: а вторым – 0,98.

При проверке изделие признано стандартным. Найти вероятность, что это изделие проверил второй товаровед.

Решение. Рассмотрим гипотезы: B_1 - изделие попало к первому товароведу, B_2 - изделие попало ко второму товароведу. По условию $P(B_1) = 0{,}55$, $P(B_2) = 0{,}45$. Событие A – изделие стандартно. Условные вероятности равны по условию:

$P(A/B_1) = 0{,}9$, $P(A/B_2) = 0{,}98$. Полная вероятность события

$$P(A) = 0{,}55 \cdot 0{,}9 + 0{,}45 \cdot 0{,}98 = 0{,}936.$$

По формуле Байеса находим

$$P(B_2/A) = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}98}{0{,}936} = 0{,}47.$$

4. Три стрелка стреляют по цели, вероятности попаданий $p_1 = 0{,}3; p_2 = 0{,}4; p_3 = 0{,}5.$ После залпа зафиксировано два попадания. Найти вероятность, что попал первый стрелок.

Решение. Рассмотрим две гипотезы: B_1- первый стрелок попал, B_2- первый стрелок не попал. Вероятности гипотез: $P(B_1)=0{,}3;\ P(B_2)=0{,}7.$

Пусть событие A- два попадания в цель Тогда условные вероятности равны:

$P(A/B_1)=p_2q_3+p_3q_2=0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}6=0{,}5,\quad P(A/B_2)=p_2\cdot p_3=0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}2$.

Полная вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)\,P(A/B_2)=0{,}3\cdot 0{,}5+0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}29$$

Найдем по формуле Байеса вероятность того, что попал первый стрелок:

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}5}{0{,}29}=\frac{15}{29}.$$

Формула Бернулли

Опыты называются независимыми, если вероятности того или иного исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут проводиться как в одинаковых условиях, так и в различных условиях. В первом случае вероятность появления какого то события A во всех опытах одна и та же, во втором случае она меняется от опыта к опыту.

Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них с вероятностью p появляется событие A, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A произойдет в этих опытах ровно m раз находится по формуле Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}.$$

Здесь $q=1-p$, $(m=1,2,3...n)$.

Эта формула выражает так называемое биномиальное распределение вероятности.

Если проводятся n независимых опытов в различных условиях, причем вероятность события A в i-ом опыте равна p_i, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится в этих испытаниях ровно m раз, равна коэффициенту при x^m в разложении по степеням x производящей функции

$$\psi_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(p_ix+q_i)=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)....(p_nx+q_n),$$

где $q_i=1-p_i$.

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Если n велико, то пользуются локальной и интегральной теоремами Лапласа. По локальной теореме Лапласа вероятность появления события A ровно m раз в n испытаниях вычисляется по формуле

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

При этом значение

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ находится по таблице 1; $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Вероятность появления события A не менее m_1 раз и не более m_2 раза находится по интегральной теореме Лапласа

$P_n(m_1,m_2)\cong\hat{O}(\tilde{o}_2)-\hat{O}(\tilde{o}_1)$. Здесь $x_i=\frac{m_i-np}{\sqrt{npq}},\quad i=1,2$.

Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ находятся по таблице 2; $\Phi(-x)=-\Phi(x)$; $\Phi(x>5)\approx\frac{1}{2}$.

Закон Пуассона

Если $p\to 0, n\to\infty$, то используется закон Пуассона. Вероятность того, что событие A произойдет ровно m раз в n опытах вычисляется по формуле

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},\quad \lambda=np.$$

Примеры.

1.Вероятность попадания в цель при одном выстреле p =0,4. Найти вероятность трех попаданий в цель при четырех выстрелах.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли для n =4, m =3, p =0,4. q =0,6.

$$P_4(3)=C_4^3\cdot(0{,}4)^3\cdot 0{,}6=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot 0{,}0064\cdot 0{,}6=0{,}1556$$

2.Вероятность того, что событие произойдет в одном испытании равна 0,6. Какова вероятность, что событие произойдет ровно 15 раз в 24 испытаниях.

Решение. По локальной теореме Лапласа при

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{15-14{,}4}{2{,}4}=0{,}25 \text{ имеем } P_{24}(15)\approx\frac{\varphi(0{,}25)}{2{,}4}=0{,}161.$$

3.Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность, того что число попаданий в цель будет находиться в интервале от 70 до 84, если всего произведено 100 выстрелов.

Решение. По интегральной теореме Лапласа

$$x_1=\frac{70-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-2{,}5,\quad x_2=\frac{84-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=1,$$

$$P_{100}(70,84)\approx\hat{O}(1)-\hat{O}(-2{,}5)=0{,}3413+0{,}4938=0{,}8351.$$

4.На базу отправлено 1000 бутылок, вероятность того, что бутылка будет разбита равна 0,001. Найти вероятность того, что в партии будет три разбитых бутылки.

Решение. По закону Пуассона

$$P_{1000}(3)\approx\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!},\quad \lambda=np=1000\cdot 0{,}001=1,\quad\Rightarrow\quad P_{1000}(3)\approx\frac{e^{-1}}{3!}\approx 0{,}06.$$

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 называется **наивероятнейшим**, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, не меньше вероятности остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число k_0 определяется из двойного неравенства

$$np-q\le k_0\le np+p,$$

причем

а) если число $np-q$ дробное, то существует одно наивероятнейшее k_0;

б) если число $np-q$ целое, то существует два наивероятнейших: k_0, k_0+1;

в) если число np целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Примеры.

1.Вероятность попадания при одном выстреле по движущейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах.

Решение. Здесь $n = 50,\ p = 0{,}9,\ q = 0{,}1.$ Поэтому имеем неравенства

$50 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 \le 50 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$ или $44{,}9 \le k_0 \le 45{,}9.$ Следовательно $k_0 = 45.$

2.Брак составляет 7,5% выпускаемых деталей. Найти наивероятнейшее число исправных деталей в партии из 39 штук.

Решение. Обозначая вероятность выпуска исправной детали через $p,$ будем иметь $q = 0{,}075$ и $p = 1 - q = 0{,}925$. Так как $n = 39$, то

$39 \cdot 0{,}925 - 0{,}075 \le k_0 \le 39 \cdot 0{,}925 + 0{,}925$ или $36 \le k_0 \le 37.$

Наивероятнейшее число исправных деталей равно 36 или 37.

Дискретная и непрерывная случайные величины. Числовые характеристики случайных величин. Нормальный закон распределения

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Дискретной величиной называется величина, число возможных значений которой конечное или бесконечное счетное множество.

Непрерывной случайной величиной называется величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал конечный или бесконечный.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон распределения может иметь различные формы.

Простейшей формой закона является закон распределения дискретной случайной величины, представляющий из себя таблицу, в первой строке которой задаются все возможные значения x_i случайной величины X, во второй строке расположены соответствующие вероятности $p_i = P(X = x_i),$ то есть вероятности, с которыми случайная величина X принимает значения x_i.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Здесь $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность выполнения неравенства $X < x,$ таким образом,

$F(x) = P(X < x)$; $0 \le F(x) \le 1$, $F(-\infty) = 0,$ $F(+\infty) = 1.$

Для дискретной случайной величины функция распределения есть разрывная ступенчатая функция. Для непрерывной – непрерывная функция.

Для непрерывной случайной величины определим **плотность распределения** случайной величины формулой

$$f(x) = F'(x), \quad f(x) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения следующей формулой

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,d\,t\,.$$

Вероятность попадания значений непрерывной случайной величины на интервал от α до β определяется по формуле $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ или, через плотность распределения, по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,d\,x\,.$$

Числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X вычисляется по формуле

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i\ .$$

Для непрерывной случайной величины эта формула выглядит так $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,d\,x$.

Соответственно: **дисперсия** случайной величины вычисляется по формулам

а) для дискретной $D(X) = D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2\,p_i$ или $D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\,p_i - m_x^{\,2}$;

в) для непрерывной

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2\,f(x)\,d\,x \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,d\,x - m_x^{\,2}.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется величина $\sigma_x = \sigma = \sqrt{D(X)}$.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения равна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\ .$$

Здесь $a = M(X)$ и $\sigma = \sqrt{D(X)}$ соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в интервал (α, β) выражается формулой

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ - функция,

значения которой заданы в таблице 2; $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $\Phi(x > 5) \approx \frac{1}{2}$.

1. Дискретная случайная величина X имеет только 2 возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет x_1, равна $p_2 = 0{,}6$. Найти p_2, x_1, x_2, если $M(X) = 1{,}4;\ D(X) = 0{,}24.$

Решение. Так как $p_1 + p_2 = 1,$ то $p_2 = 0{,}4.$ Напишем законы распределения величин X и X^2:

X	x_1	x_2
p	0,6	0,4

Для отыскания x_1 и x_2 используем формулы

$$M(X) = m_x = p_1x_1 + p_2x_2,\ D(X) = M(X^2) - m_x^2 = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 - m_x^2,$$

откуда $0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4;\ 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 - 1{,}4^2 = 0{,}24.$

После элементарных преобразований получим

$$\begin{cases} 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4, \\ 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 = 2{,}2. \end{cases}$$

Эта система имеет 2 решения: $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ и $x_1 = 1{,}8,\ x_2 = 0{,}8.$

Условию $x_1 < x_2$ удовлетворяет только первая пара чисел, значит ответ

$p_2 = 0{,}4,\ \ x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

2.Для непрерывной случайной величины X задана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти $f(x), M(X), D(X)$.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,d\,x = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,d\,x = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,d\,x - m_x{}^2 = \int_0^2 x^2 \frac{x}{2} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

3.Математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате опыта X примет значение, заключенное в интервале (12,14).

Решение. Воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

которая для нашей задачи примет вид

$$P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}1359\ .$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,42	0,1628	0,84	0,2995	1,26	0,3962
0,01	0,0040	0,43	0,1664	0,85	0,3023	1,27	0,3980
0,02	0,0080	0,44	0,1700	0,86	0,3051	1,28	0,3997
0,03	0,0120	0,45	0,1736	0,87	0,3078	1,29	0,4015
0,04	0,0160	0,46	0,1772	0,88	0,3106	1,30	0,4032
0,05	0,0199	0,47	0,1808	0,89	0,3133	1,31	0,4049
0,06	0,0239	0,48	0,1844	0,90	0,3159	1,32	0,4066
0,07	0,0279	0,49	0,1879	0,91	0,3186	1,33	0,4082
0,08	0,0319	0,50	0,1915	0,92	0,3212	1,34	0,4099
0,09	0,0359	0,51	0,1950	0,93	0,3238	1,35	0,4115
0,10	0,0398	0,52	0,1985	0,94	0,3264	1,36	0,4131
0,11	0,0438	0,53	0,2019	0,95	0,3289	1,37	0,4147
0,12	0,0478	0,54	0,2054	0,96	0,3315	1,38	0,4162
0,13	0,0517	0,55	0,2088	0,97	0,3340	1,39	0,4177
0,14	0,0557	0,56	0,2123	0,98	0,3365	1,40	0,4192
0,15	0,0596	0,57	0,2157	0,99	0,3389	1,41	0,4207
0,16	0,0636	0,58	0,2190	1,00	0,3413	1,42	0,4222
0,17	0,0675	0,59	0,2224	1,01	0,3438	1,43	0,4236
0,18	0,0714	0,60	0,2257	1,02	0,3461	1,44	0,4251
0,19	0,0753	0,61	0,2291	1,03	0,485	1,45	0,4265
0,20	0,0793	0,62	0,2324	1,04	0,3508	1,46	0,4279
0,21	0,0832	0,63	0,2357	1,05	0,3531	1,47	0,4292
0,22	0,0871	0,64	0,2389	1,06	0,3554	1,48	0,4306
0,23	0,0910	0,65	0,2422	1,07	0,3577	1,49	0,4319
0,24	0,0948	0,66	0,2454	1,08	0,3599	1,50	0,4332
0,25	0,0987	0,67	0,2486	1,09	0,3621	1,51	0,4345
0,26	0,1026	0,68	0,2517	1,10	0,3643	1,52	0,4357
0,27	0,1064	0,69	0,2549	1,11	0,3665	1,53	0,4370
0,28	0,1103	0,70	0,2580	1,12	0,3686	1,54	0,4382
0,29	0,1141	0,71	0,2611	1,13	0,3708	1,55	0,4394
0,30	0,1179	0,72	0,2642	1,14	0,3729	1,56	0,4406
0,31	0,1217	0,73	0,2673	1,15	0,3749	1,57	0,4418
0,32	0,1255	0,74	0,2703	1,16	0,3770	1,58	0,4429
0,33	0,1293	0,75	0,2734	1,17	0,3790	1,59	0,4441
0,34	0,1331	0,76	0,2764	1,18	0,3810	1,60	0,4452
0,35	0,1368	0,77	0,2794	1,19	0,3830	1,61	0,4463
0,36	0,1406	0,78	0,2823	1,20	0,3849	1,62	0,4474
0,37	0,1443	0,79	0,2852	1,21	0,3869	1,63	0,4484
0,38	0,1480	0,80	0,2881	1,22	0,3883	1,64	0,4495
0,39	0,1517	0,81	0,2910	1,23	0,3907	1,65	0,4505
0,40	0,1554	0,82	0,2939	1,24	0,3925	1,66	0,4515
0,41	0,1591	0,83	0,2967	1,25	0,3944	1,67	0,4525

1,68	0,4535	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969
1,69	0,4545	1,92	0,4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971
1,70	0,4554	1,93	0,4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,71	0,4564	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974
1,72	0,4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0,4582	1,96	0,4750	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0,4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0,4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0,4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0,4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0,4625	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0,4633	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0,4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,81	0,4649	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0,4664	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0,4671	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0,4678	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
1,86	0,4686	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0,4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
РЯДЫ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания по курсу высшей математики
для самостоятельной работы студентов второго курса
заочного отделения (бакалавриат) направлений подготовки
051000 "Профессиональное обучение", 080200 "Менеджмент",
190100 "Наземные транспортно-технологические комплексы",
190700 "Технология транспортных процессов",
230400 "Информационные системы и технологии",
270800 "Строительство", 280700 "Техносферная безопасность"

Составители: Иваньшин Николай Алексеевич
Шабалин Павел Леонидович
Шмагин Юрий Алексеевич

Редактор Л.З. Ханафиева

Издательство
Казанского архитектурно-строительного университета

Подписано в печать 20.11.14		Формат 60x84/16
Заказ № 452	Печать ризографическая	Усл.-печ.л. 2,25
Тираж 100 экз.	Бумага офсетная № 1	Уч.-изд. л. 2,25

Отпечатано в полиграфическом секторе
издательства КГАСУ
420043, г. Казань, ул. Зеленая д.1