МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра механики

Задания и краткие методические указания для выполнения расчетно-графических работ по теоретической механике

Учебно-методическое пособие для студентов обучающихся по направлению «Строительство»

Казань
2022

Задания и краткие методические указания для выполнения расчетно-графических работ по теоретической механике. Учебно-методическое пособие для студентов обучающихся по направлению «Строительство»/ Сост.: А.В. Гумеров, Ф.Г. Шигабутдинов. Под редакцией Ф.Г. Шигабутдинова. Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2022. – 96 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Учебно-методическое пособие предназначена для выполнения заданий **С1**, **С2**, **С4**, **К2**, **К3**, **К4**, **Д2**, **Д3**, **Д4** расчетно-графической работы по статике, кинематике и динамике курса «Теоретическая механика» студентами обучающихся по направлению «Строительство». В пособии все задания содержат примеры ее выполнения, приведены краткие сведения из теории и практические рекомендации, даются вопросы для самоконтроля.

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Основы конструирования и прикладная механика» КНИТУ
М.Н. Серазутдинов

Кандидат технических наук, доцент кафедры металлических конструкций и испытаний сооружений КГАСУ
О.И. Ефимов

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Программой курса предусмотрено выполнение расчетно-графической работы (РГР) по статике (С1, С2 и С4), кинематике (К2, К3, К4) и динамике (Д2, Д3, Д4) студентами дневной и очной формы обучения.

Каждое задание выполняется по одной из приведенных схем. Номер схемы и исходные данные определяются по шифру студента, который студентам дневной формы обучения выдается преподавателем, ведущим практические занятия.

Студенты заочной формы обучения формируют шифр по двум последним цифрам номера зачетной книжки, как описано ниже.

Двузначная часть шифра совпадает с порядковым номером первой буквы в фамилии студента. Четырехзначная часть шифра строится двухкратной записью последних двух цифр и номере зачетной книжки студента.

Например, студент Ибрагимов, номер зачетной книжки которого оканчивается числом 28, будет иметь шифр 09-2828. Здесь число 9 – порядковый номер буквы «И» (первая буква фамилии) в таблице 1. Студенту, номер зачетной книжки которого оканчивается цифрами 00, определяется цетырехзначная часть шифра в виде числа 4852.

Таблица 1

Буквы	**А**	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е,Ё**	**Ж**	**З**	**И,Й**	**К**	**Л**	**М**	**Н**	**О**
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Буквы	**П**	**Р**	**С**	**Т**	**У**	**Ф**	**Х**	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**О**	**Ю**	**Я**
№	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Как пользоваться шифром, видно из приведенного ниже примера.

Пусть студенту определен шифр 28-4852. Для выполнения работ С1, С2, С4, К2, К3, К4, Д2, Д3, Д4 из рисунков, приведенных к работам, нужно выбрать 28 схему. Исходные данные формируются по второй части шифра (4852).

Запишем первые четыре буквы русского алфавита строго под цифрами

4	8	5	2
А	**Б**	**В**	**Г**

В таблицах, приведенных для каждого задания из колонки А, необходимо взять число, стоящее в четвертой строке, из колонки Б – число, стоящее в восьмой строке, из В – число, стоящее в пятой строке, а из Г – число, стоящее во второй строке.

Выполненные задания РГР принимаются последовательно, т.е. после сдачи предыдущих. При сдаче задания студент обязан предъявить РГР (конкретного задания) в оформленном виде, ответить на вопросы теории, использованной при расчете и показать умение решать задачи по соответствующему разделу курса. Расчетно-графическая работа оформляется на листах формата А4.

Задание № 1 (С1)

РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Цель работы: Изучить равновесие абсолютно твердого тела под действием плоской системы сил. Закрепить занятия об основных формах условий равновесия, связях и их реакциях, получить навыки в составлении уравнений равновесия для плоской системы сил.

Постановка задачи. Абсолютно жесткая плоская рама (схемы 1-30 на стр. 10-13) закреплена на одном конце при помощи шарнирной неподвижной опоры, а на другом конце прикреплена к невесомому стержню с шарнирами по концам или к шарнирной опоре на катках (подвижный шарнир). В некоторой точке к раме привязан трос, перекинутый через блок, и несущий на конце груз Р. Все действующие на раму нагрузки показаны на соответствующих рисунках. Значения нагрузок и геометрические размеры рамы приведены в таблице 1.1 Пренебрегая силами сопротивления в блоке, определить реакции связей в опорных закреплениях (реакции опор).

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

К решению поставленной задачи можно приступить, изучив методы решения задач на равновесие абсолютно твердого тела под действием плоской системы сил (например, [1]: §14, 15, 16, 17; [2]: §30, 34; [4]: §3; [5]: §2).

Для решения указанной системы сил приложенной к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\overline{R}$ и главный алгебраический момент M_0 произвольной плоской системы сил относительно произвольного центра *O*, лежащего на плоскости действия этих сил, были равны нулю, т.е.

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0,\ M_O = \sum_{k=1}^{n} m_o(\overline{F}_k) = 0. \qquad (1.1)$$

Систему условий равновесия можно назвать смешанной системой условий равновесия произвольной плоской системы сил, так как первое из них – геометрическое (там речь идет о сложении векторов), а второе алгебраическое (там речь идет об алгебраическом сложении чисел).

Смешанной системе условий равновесия (1.1) соответствуют три аналитические формы условий равновесия:

а) Первая (основная) форма аналитических условий равновесия

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum m_o(\overline{F}_k) = 0. \qquad (1.2)$$

б) Вторая форма аналитических условий равновесия

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,\ \sum m_B(\overline{F}_k) = 0,\ \sum F_{kx} = 0. \qquad (1.3)$$

Здесь *A* и *B* – два произвольных равноправных центра, лежащих в плоскости действия сил, которые выбираются так, чтобы прямая, мысленно проведенная через эти точки, не была перпендикулярна к выбранной оси *Ox*.

в) Третья форма аналитических условий равновесия

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0,\ \sum m_B(\overline{F}_k)=0,\ \sum m_C(\overline{F}_k)=0. \qquad (1.4)$$

Здесь A, B, C – три произвольно равноправных центра, лежащих в плоскости действия сил, которые выбираются так, чтобы они не лежали на одной прямой.

Еще раз отметим, *произвольная плоская система сил будет эквивалентна нулю, а твердое тело под действием этой системы сил будет находится в равновесии тогда и только тогда, когда выполняются условия (1.1) т.е. любая тройка условий (1.2)-(1.4).*

Силы $\overline{F}_k$, действующие под некоторым углом к осям координат, удобно предварительно разложить на составляющие $\overline{F}_{kx}$ и $\overline{F}_{ky}$, параллельные осям координат, и при вычислении алгебраического момента силы $\overline{F}_k$ относительно некоторого центра воспользоваться теоремой Вариньона:

$$\sum m_O(\overline{F}_k)=\sum m_O(\overline{F}_{kx})+\ \sum m_O(\overline{F}_{ky}).$$

<u>Вопросы для контроля и самоконтроля</u>

1. Сформулируйте принцип освобождаемости связей.
2. Перечислите основные виды связей, покажите на рисунках их реакции.
3. Что называется проекцией силы на ось? Перечислите ее свойства.
4. Какая система сил называется плоской системой сил?
5. Какая система сил называется произвольной плоской системой сил, плоской системой сходящихся сил, плоской системой параллельных сил?
6. Дайте определение векторного момента силы относительно центра.
7. Перечислите свойства векторного момента силы относительного центра.
8. Дайте определение алгебраического момента силы относительно центра.
9. Что называется плечом силы относительно центра?
10. Как определяется знак алгебраического момента силы относительно центра?
11. Запишите условия равновесия произвольной плоской системы сил.
12. Запишите условия равновесия плоской системы сходящихся сил.
13. Запишите условия равновесия плоской системы параллельных сил.
14. Сформулируйте теорему Вариньона об алгебраическом моменте равнодействующей относительно центра и продемонстрируйте ее применение.
15. Что механически характеризует момент силы относительно центра?

Таблица 1.1

Исходные данные к заданию С1

	А	**Б**					**В**		**Г**	
№	P	F_1	F_2	F_3	F_4	q_{max}	M	α	a	b
п/п	кН	кН	кН	кН	кН	кН/м	кН·м	град	м	м
1	10	10	–	50	–	5,8	13	30	0,5	0,7
2	12	–	15	40	–	3,7	16	45	0,6	0,8
3	14	–	30	–	15	6,1	11	60	0,7	0,9
4	16	–	–	45	40	2,8	8	30	0,8	1,0
5	18	–	15	–	50	4,3	9	45	0,9	1,1
6	20	50	–	–	10	6,5	7	60	1,0	1,2
7	22	35	60	–	–	8,8	14	30	1,1	1,3
8	24	25	–	65	–	2,4	12	45	1,2	1,4
9	26	–	30	45	–	7,5	13	60	1,3	1,5
0	28	5	–	–	75	9,0	15	30	1,4	1,6

ПРИМЕР НА ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЯ С1

Постановка задачи. На рис.1.1 изображен абсолютно твердый ломаный стержень, на который действуют: сосредоточенная сила $\overline{F}$, пара сил с моментом M и распределенная сила q. В точке B к телу прикреплен трос, перекинутый через блок и несущий на конце тело P. Нагрузки имеют следующие значения: $F = 50$ кН, $P = 20$ кН, $M = 30$ кН·м, $q_{\max} = 20$ кН/м.

Геометрические размеры тела: $a = 2{,}0$ м; $b = 4{,}0$ м.

Требуется: определить реакции связей (опор) в точках A и E.

Решение.

Пусть начало системы координат расположено в точке A, ось Ax направлена вправо, ось Ay – вверх.

1. Заменяем связи реакциями. В точке A тело прикреплено к основанию через цилиндрический шарнир, направление реакций которого заранее не известно. Реакцию опоры A представим через компоненты $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$. В точке E тело опирается на шарнирную опору на катках. Реакция силы $\overline{N}$ у такой связи направлена перпендикулярно поверхности. Реакции показаны на рис. 1.2.

Распределенную по линейному закону силу с максимальной интенсивностью $q = q_{\max}$ надо заменить равнодействующей сосредоточенной силой $\overline{Q}$, приложенной в основании перпендикуляра к отрезку DE, проходящего через центр тяжести треугольника, изображающего распределенную силу. Модуль силы $\overline{Q}$ равен $Q = q_{\max} \cdot DE/2$. В результате

получим свободное тело, с действующими на него силами и моментом пары сил, которое показано на рис. 1.2.

2. Определим силы реакций связей X_A, Y_A и N из условий равновесия. Правильный выбор формы уравнений равновесия и центров, относительно которых вычисляются моменты, существенно облегчает вычисления. В нашем случае существенных упрощений вычислений удается добиться, если выбрать первую форму условий равновесия (система уравнений (2)).

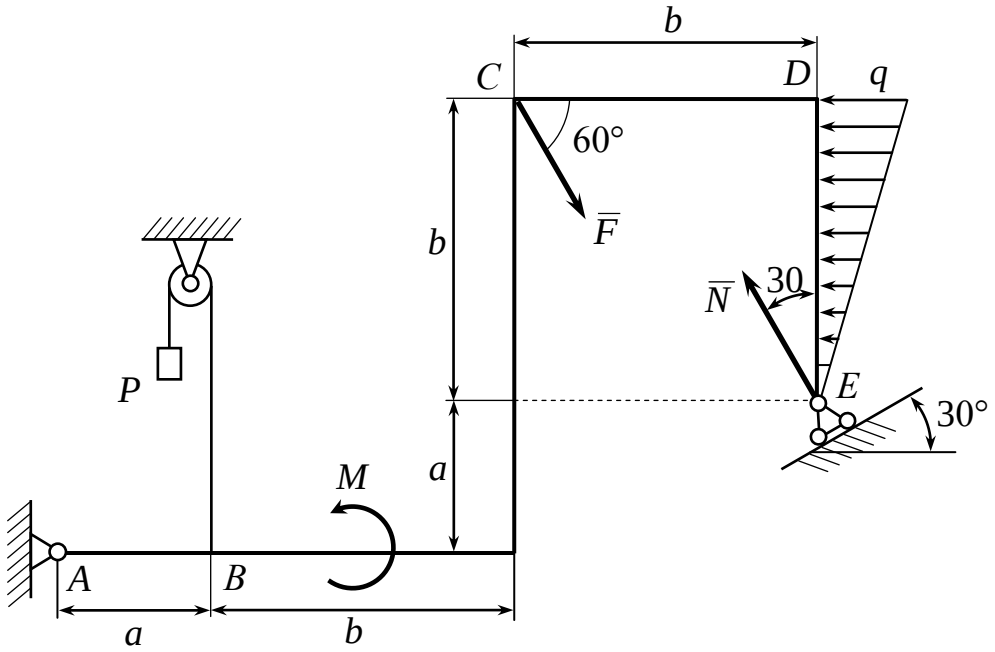


Рис. 1.1

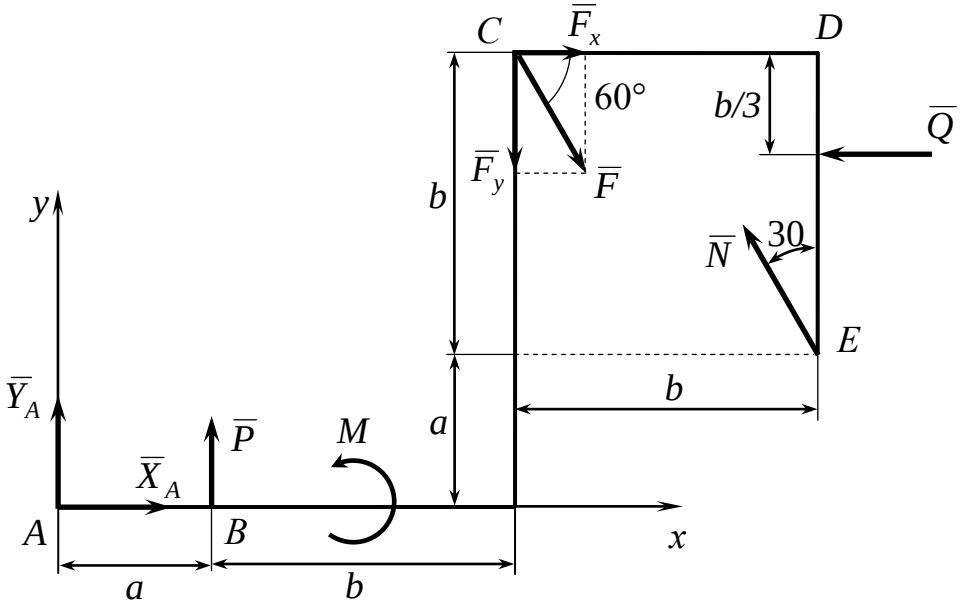


Рис. 1.2

Определим реакцию подвижного цилиндрического шарнира N. Чтобы исключить учет неизвестных реакции X_A и Y_A составим уравнение моментов сил относительно центра *A*.

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0: \quad P\cdot a+M-F_y\cdot(a+b)-F_x\cdot(a+b)+Q\cdot(a+2b/3)+$$
$$+N\cos 30^\circ\cdot(a+2b)+N\sin 30^\circ\cdot a=0.$$

Учитывая: $F_x=F\cos 60^\circ=50\cdot 0{,}5=25$ кН, $F_y=F\sin 60^\circ=50\cdot 0{,}866=43{,}3$ кН, $Q=q_{\max}\cdot b/2=20\cdot 1/2=10$ кН, получаем

$$N=\frac{-P\cdot a-M+F\sin 60^\circ\cdot(a+b)+F\cos 60^\circ\cdot(a+b)-Q\cdot(a+2b/3)}{(a+2b)\cdot\cos 30^\circ+a\cdot\sin 30^\circ}=30{,}345\text{ кН}.$$

Определим горизонтальную X_A и вертикальную Y_A реакций неподвижного цилиндрического шарнира. Для этого составим уравнения равновесия сил по осям *Ax* и *Ay* соответственно:

$$\sum F_{kx}=0: \quad X_A+F\cos 60^\circ-Q-N\sin 30^\circ=0, \text{ откуда}$$
$$X_A=-50\cdot 0{,}5+10+30{,}345\cdot 0{,}5=0{,}172\text{ кН}.$$
$$\sum F_{ky}=0: \quad Y_A+P-F\sin 60^\circ+N\cos 30^\circ=0, \text{ откуда}$$
$$Y_A=-20+50\cdot 0{,}866-30{,}345\cdot 0{,}866=-2{,}979\text{ кН}.$$

Окончательно: $X_A=0{,}172$ кН; $Y_A=-2{,}979$ кН; $N=30{,}345$ кН.

Знак минус у Y_A указывает на то, что действительное направление этой силы противоположно, показанной на рис. 2.

<u>Проверка решения.</u>

Составим уравнение моментов, например, относительно центра *C*.

$$\sum m_C(\overline{F}_k)=X_A(a+b)-Y_A(a+b)-Pb+M-Qb/3+N\cos 30^\circ b-N\sin 30^\circ b.$$

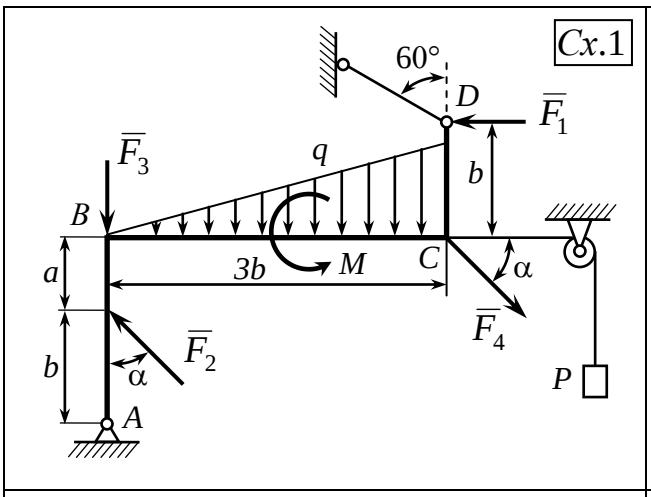
Подставляя числовое значение заданных сил, момента и найденных реакций связей, будем иметь:

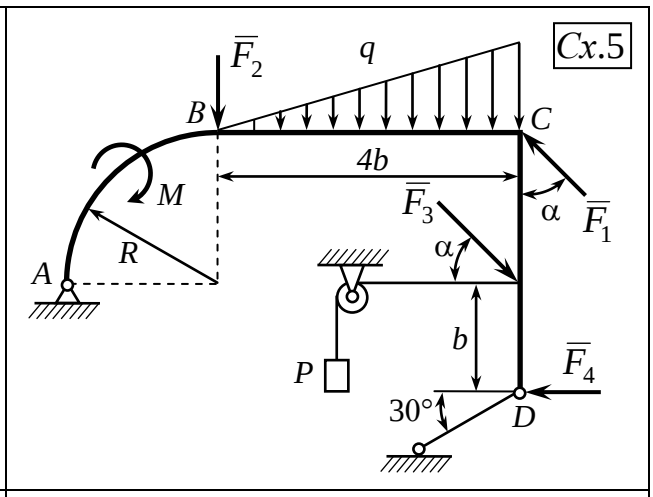
$$0{,}172\cdot 6-(-2{,}979)\cdot 6-20\cdot 4+30-10\cdot 1{,}333+30{,}345\cdot 4\cdot(0{,}866-0{,}5)=$$
$$=0{,}172\cdot 6+17{,}868-80+30-13{,}333+105{,}115-60{,}690=$$
$$=154{,}015-154{,}023=-0{,}008\text{ кН}\cdot\text{м}. \qquad (1.5)$$

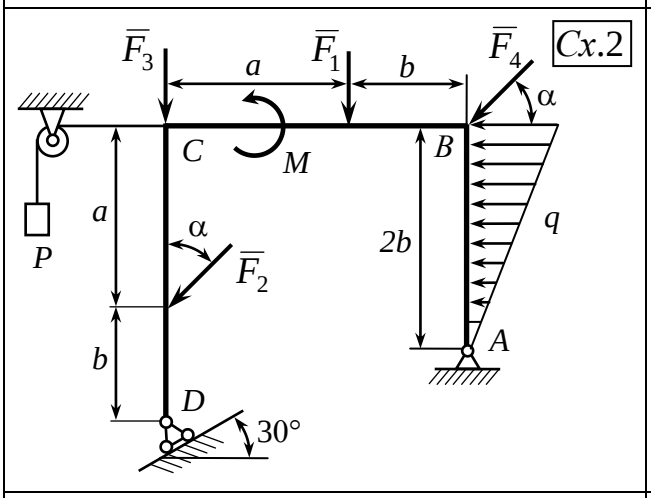
Полученный момент отличный от нуля на величину 0,008 связан с ошибками округления при вычислении X_A, Y_A и N. Относительную ошибку ψ в процентах можно оценить, относя 0,008 к модулю меньшего (154,015) из слагаемых в (1.5):

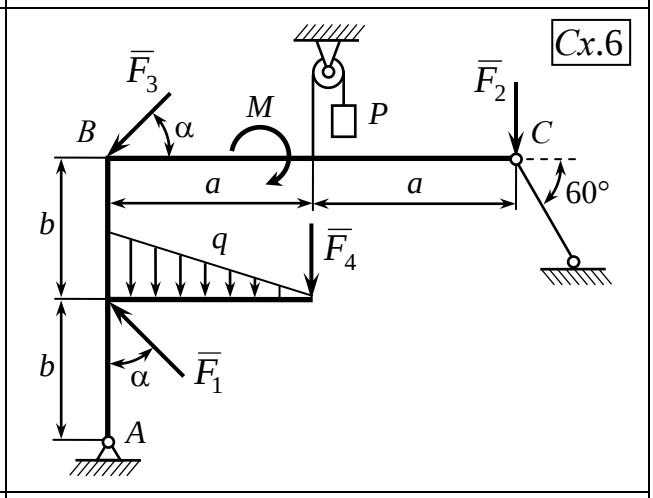
$$\psi=\frac{0{,}008}{154{,}015}\cdot 100\%=0{,}005\%.$$

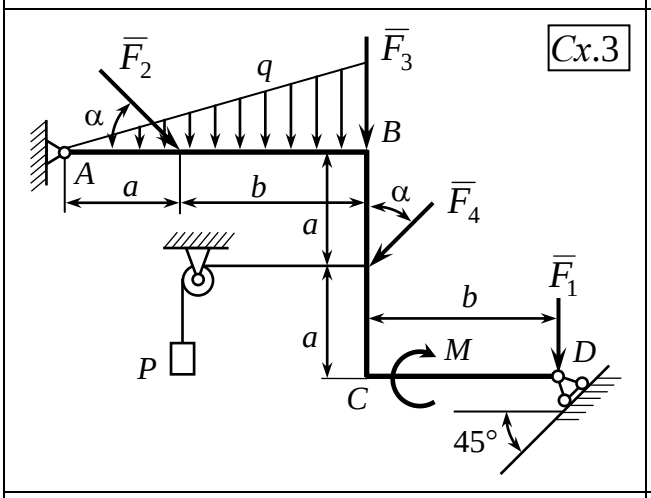
Если принять допустимую ошибку в пределах 0,5%, точность вычисления реакции связей можно признать достаточно высокой.

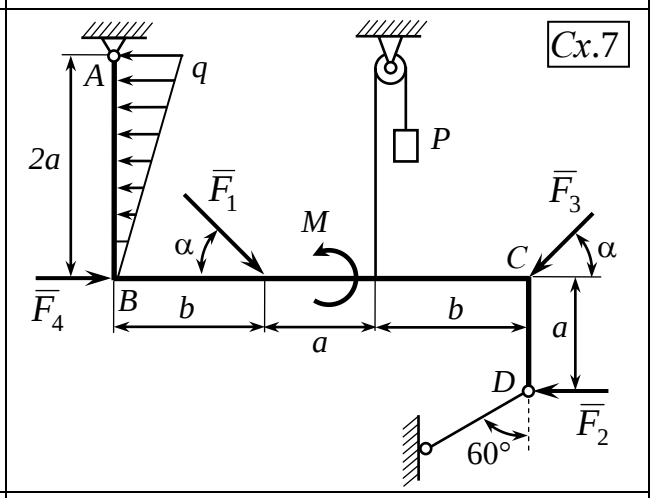

Cx.1
60°
D
F1
F3
q
b
B
a
3b
M
C
α
F4
F2
b
α
P
A

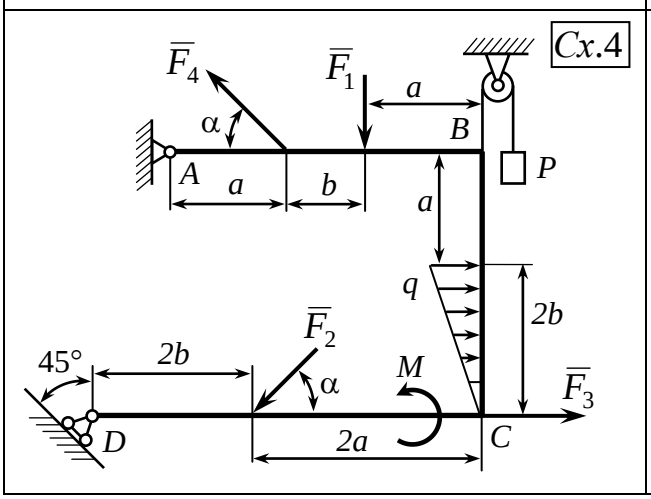

Cx.5
F2
q
B
C
4b
M
F3
α
F1
R
α
A
b
P
F4
30°
D

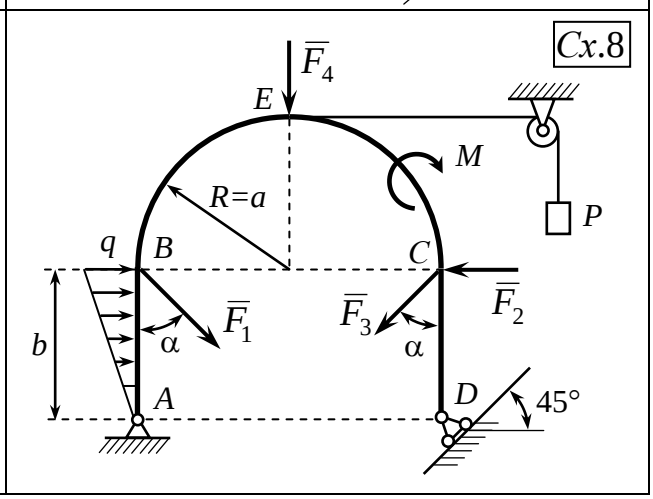

Cx.2
F3
a
F1
b
F4
α
C
M
B
a
q
α
2b
P
F2
A
b
D
30°

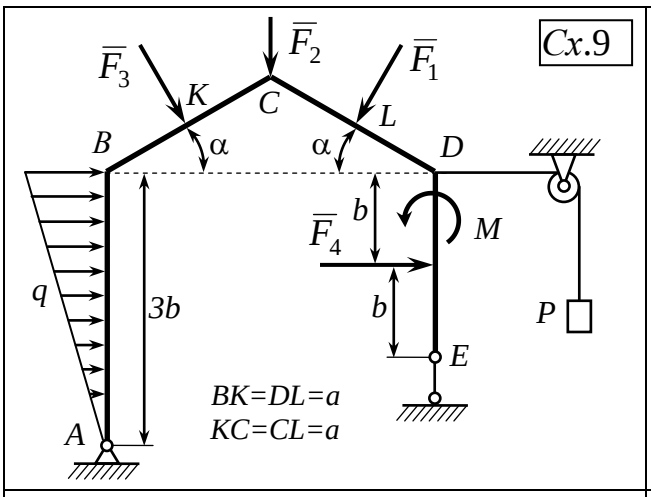

Cx.6
F3
α
M
P
F2
B
C
a
a
60°
b
q
F4
b
α
F1
A

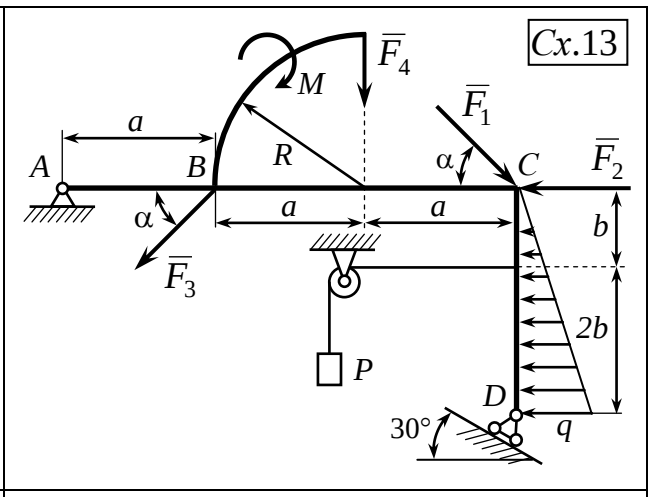

Cx.3
F2
q
F3
α
B
A
a
b
α
F4
a
F1
b
P
a
M
D
C
45°

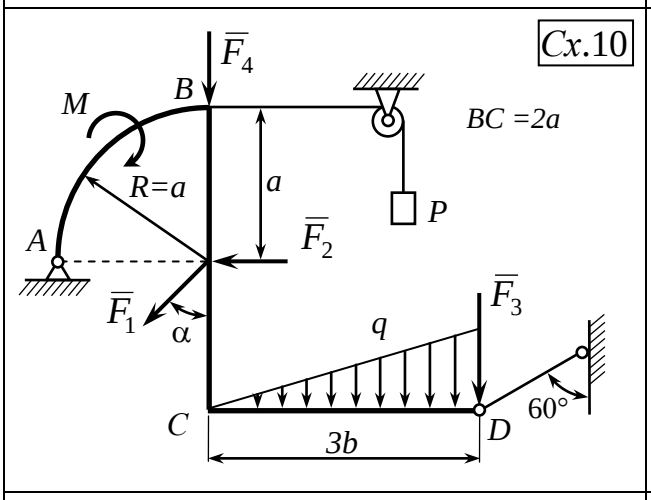

Cx.7
A
q
P
2a
F1
F3
M
α
C
α
F4
B
b
b
a
a
D
F2
60°

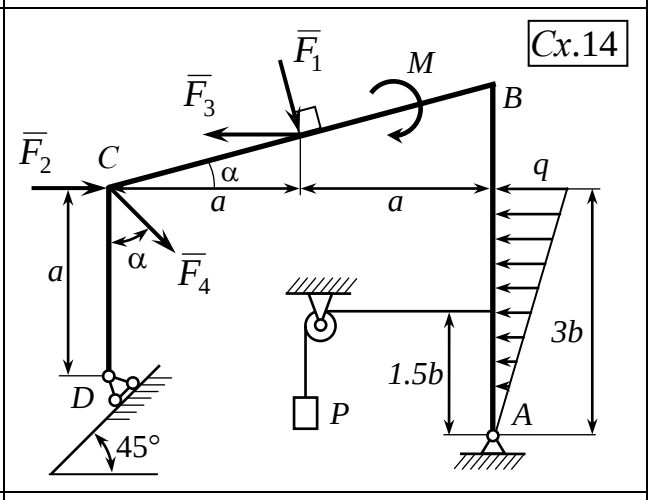

Cx.4
F4
F1
a
α
B
P
A
a
b
a
q
2b
F2
45°
2b
α
M
F3
D
2a
C

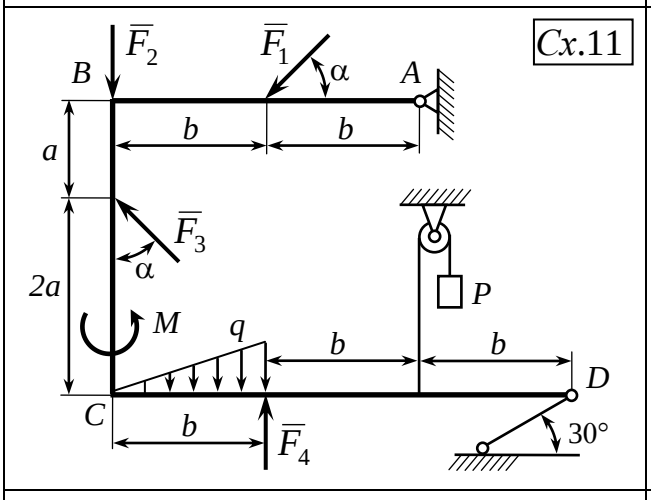

Cx.8
F4
E
M
R=a
P
q
B
C
F1
F3
F2
b
α
α
A
D
45°

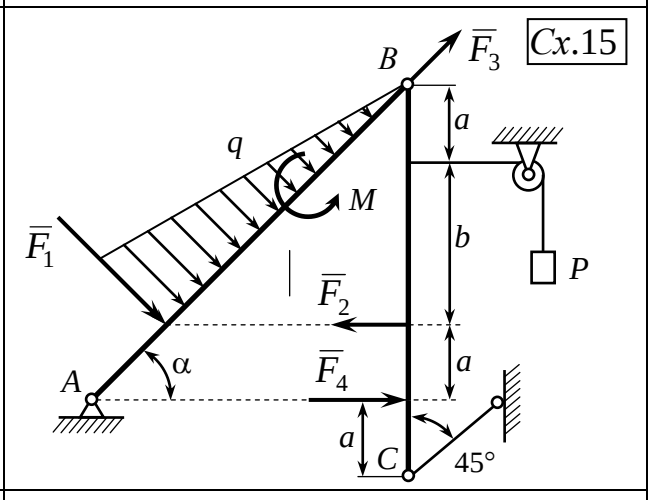

Cx.9
F3
F2
F1
K
C
L
B
α
α
D
b
F4
M
q
3b
b
P
E
BK=DL=a
KC=CL=a
A

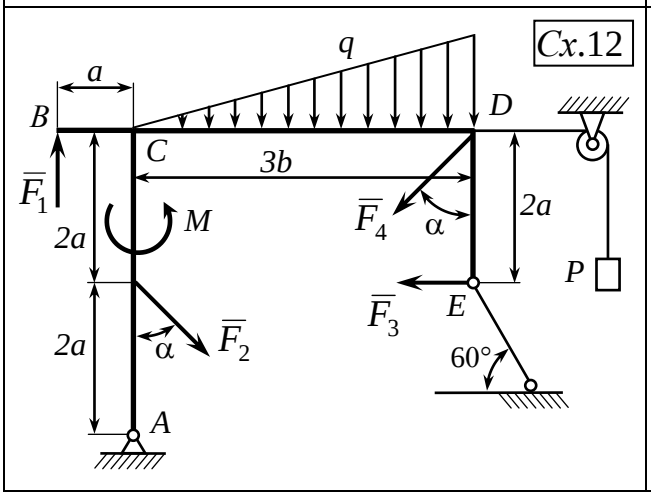

Cx.13
F4
M
F1
a
R
α
C
F2
A
B
α
a
a
b
F3
2b
P
D
30°
q

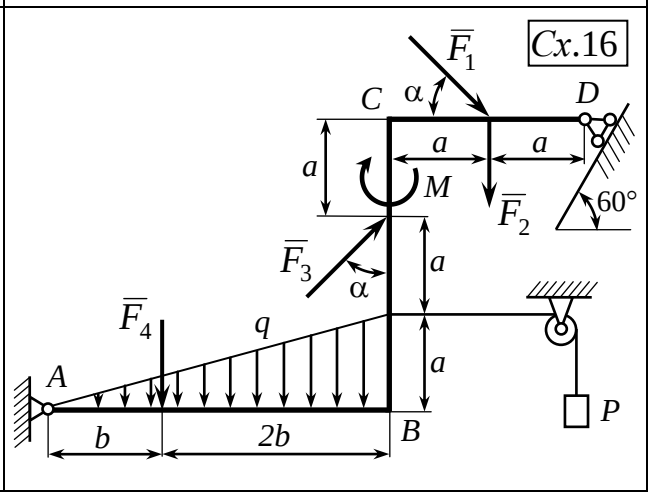

Cx.10
F4
B
M
BC =2a
R=a
a
P
A
F2
F1
α
F3
q
60°
C
3b
D

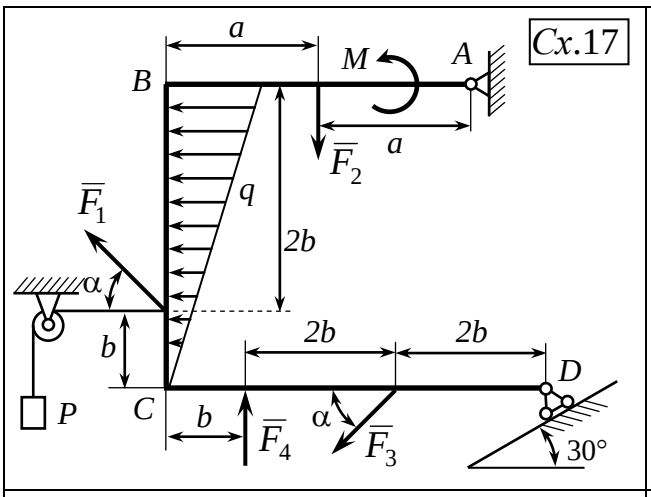

Cx.14
F1
M
F3
B
F2
C
α
q
a
a
a
α
F4
3b
1.5b
D
P
A
45°

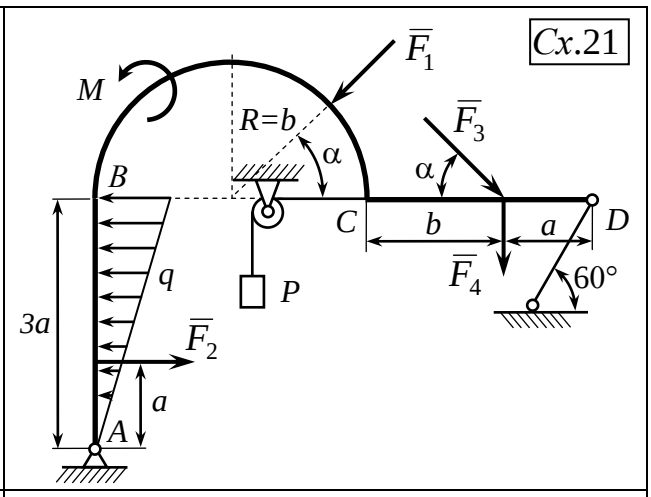

Cx.11
F2
F1
α
B
A
b
b
a
F3
α
P
2a
M
q
b
b
D
C
b
F4
30°

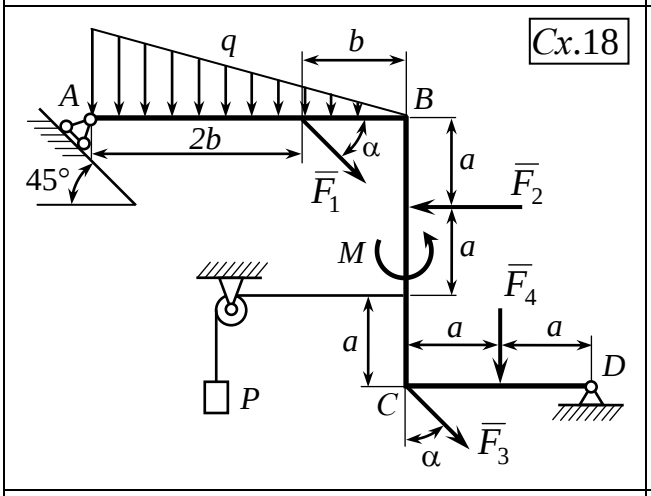

Cx.15
B
F3
a
q
M
b
P
F1
F2
A
α
F4
a
a
C
45°

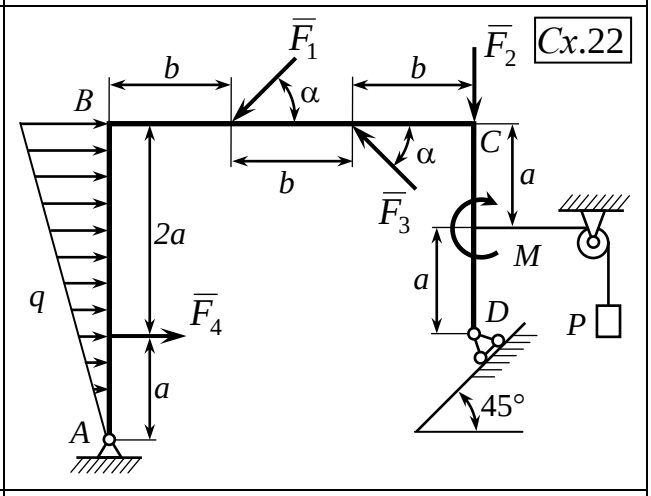

Cx.12
q
a
B
D
C
3b
F1
2a
M
F4
α
2a
P
F3
E
2a
α
F2
60°
A

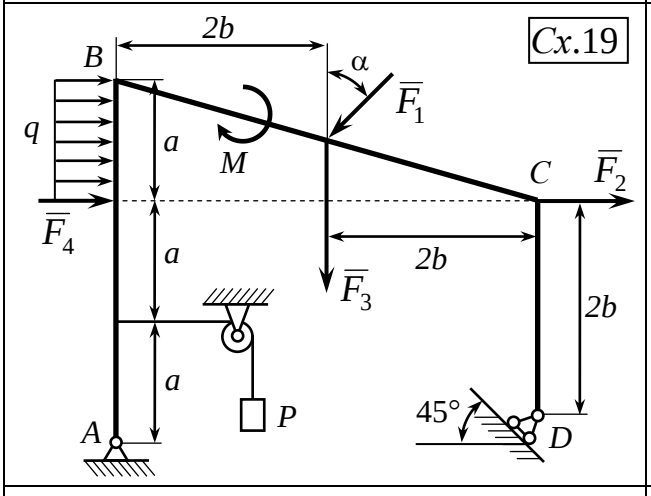

Cx.16
F1
C
α
D
a
a
a
M
F2
60°
F3
a
α
F4
q
a
A
P
b
2b
B

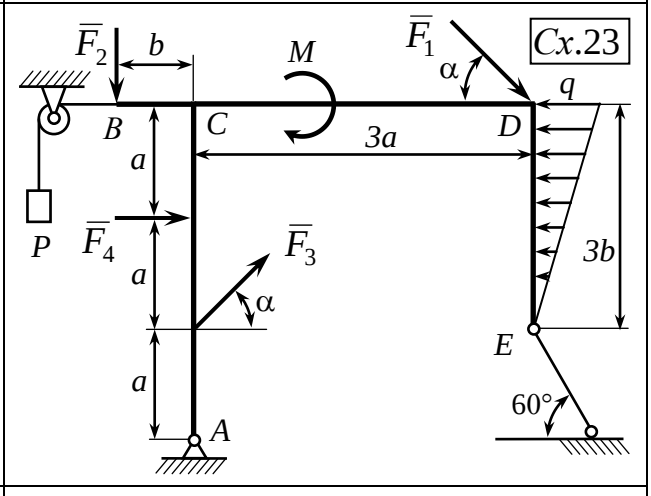

Cx.17
a
M
A
B
a
F2
q
F1
2b
α
b
2b
2b
D
P
C
b
F4
α
F3
30°

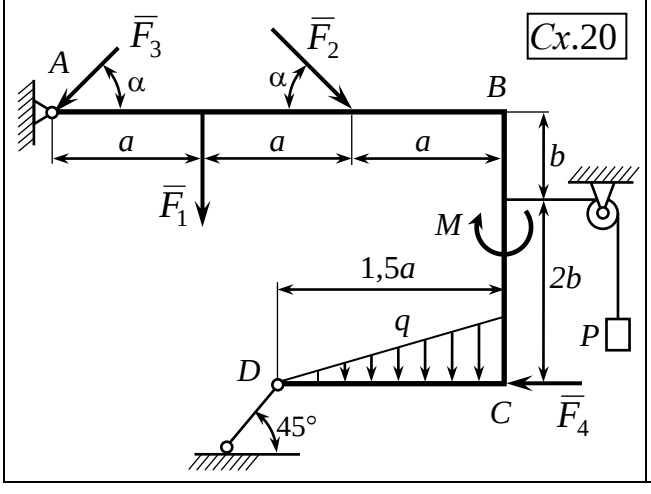

Cx.21
F1
M
R=b
F3
α
α
B
C
b
a
D
q
P
F4
60°
3a
F2
a
A

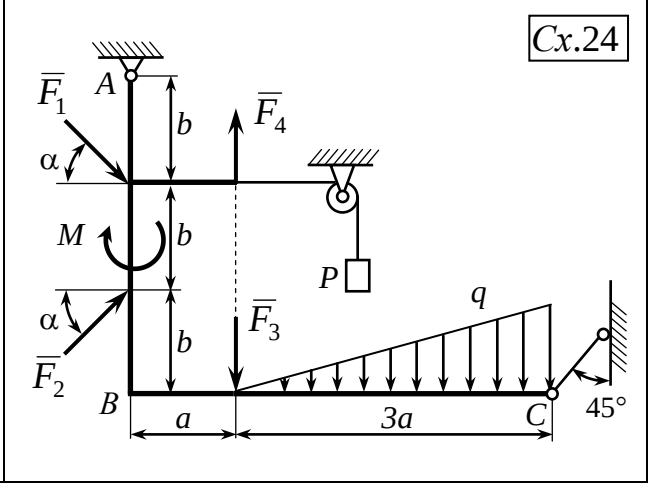

Cx.18
q
b
A
B
2b
α
45°
F1
a
F2
M
a
F4
a
a
a
D
P
C
α
F3

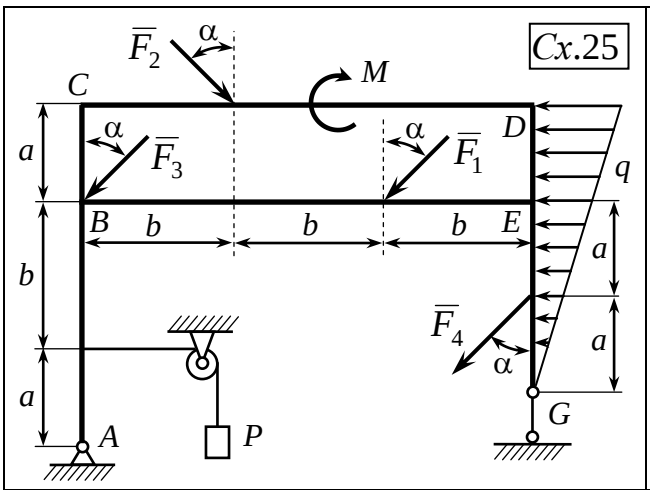

Cx.22
F1
F2
b
b
B
α
C
b
α
a
F3
2a
M
a
q
F4
D
P
a
45°
A

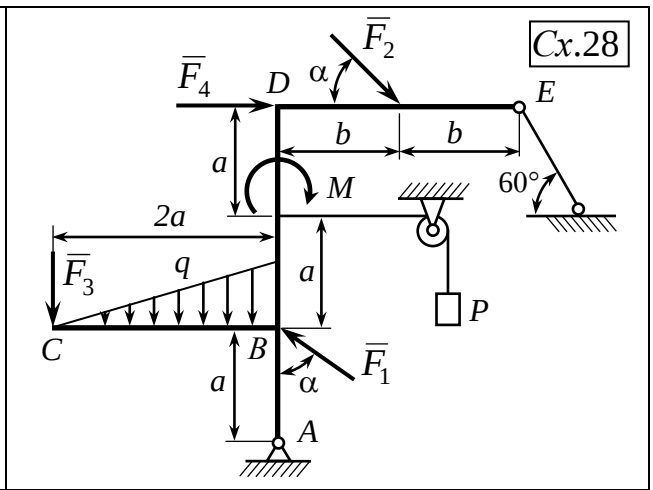

Cx.19
2b
B
α
F1
q
a
M
C
F2
F4
a
2b
F3
2b
a
P
45°
A
D

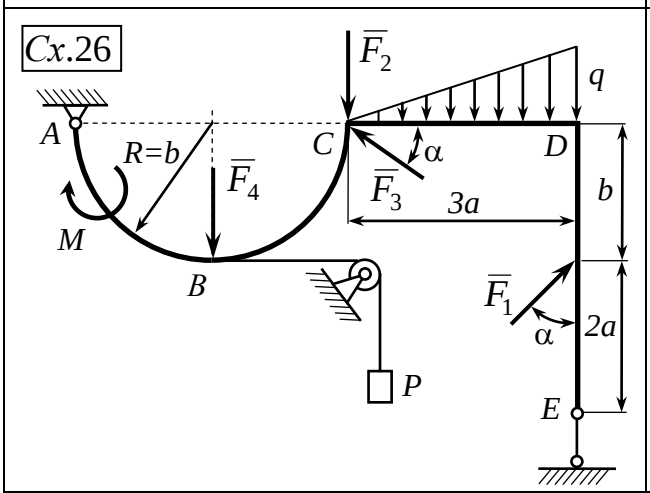

Cx.23
F2
b
M
F1
α
q
B
C
3a
D
a
P
F4
F3
3b
a
α
E
a
60°
A

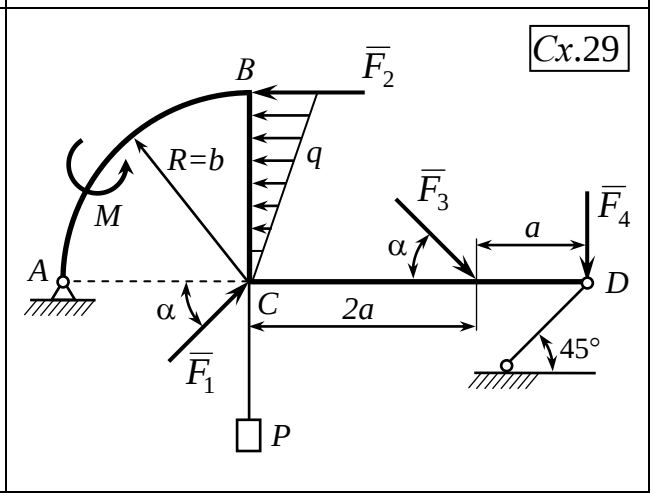

Cx.20
F3
F2
A
α
α
B
a
a
a
b
F1
M
1,5a
2b
q
P
D
C
F4
45°

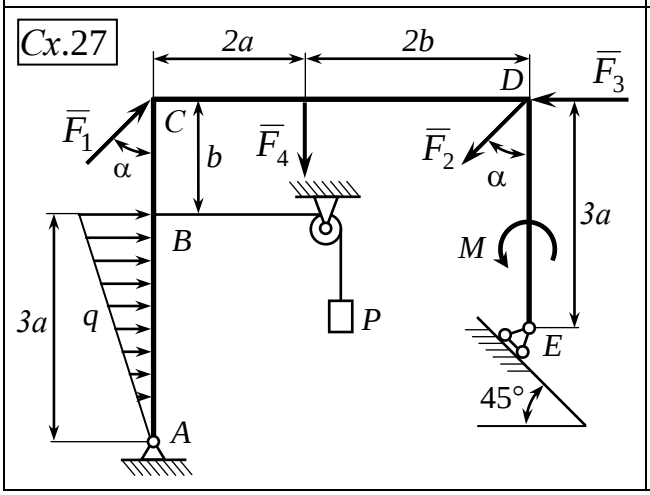

Cx.24
A
F1
b
F4
α
M
b
P
α
F3
q
b
F2
B
a
3a
C
45°

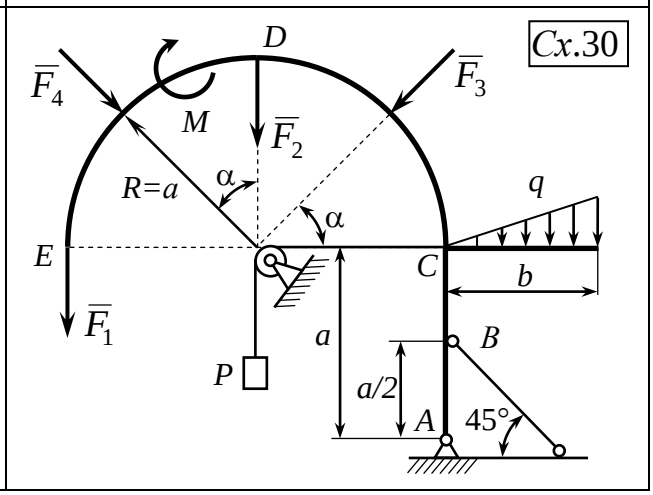

Cx.25
F2
α
M
C
D
a
α
F3
α
F1
q
B
b
b
b
E
a
b
F4
a
α
a
G
A
P


Cx.28
F2
F4
D
α
E
b
b
a
M
60°
2a
F3
q
a
P
C
B
F1
a
α
A


Cx.26
F2
q
A
R=b
C
α
D
F4
F3
3a
b
M
B
F1
α
2a
P
E


Cx.29
B
F2
R=b
q
M
F3
F4
a
α
A
D
α
C
2a
45°
F1
P


Cx.27
2a
2b
D
F3
F1
C
b
F4
F2
α
α
3a
B
M
3a
q
P
E
45°
A


Cx.30
D
F4
F3
M
F2
R=a
α
q
α
E
C
b
F1
a
B
P
a/2
A
45°

Задание № 2 (С2)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Цель работы: Исследовать равновесие системы, состоящих из двух абсолютно твердых тел, находящихся под действием плоской системы сил. Закрепить знания о связях и их реакциях. Закрепить навыки в составлении уравнений равновесия для плоской системы сил и освоить методы определения реакций внутренних связей.

Постановка задачи. Отдельные части конструкции выполнены в виде абсолютно жестких ломанных (в том числе разветвленных) прямолинейных, криволинейных и отдельных прямолинейных стержней, которые в точке *C* соединены друг с другом шарнирно или свободно опираются друг о друга. В одной точке конструкция жестко заделана. В одной точке конструкция жестко заделана. В другой точке внешними связями, наложенными на конструкцию, являются или невесомый стержень, или шарнирная опора на катках, или гладкая плоскость (стр. 19 ÷ 22). На конструкцию действуют пара сил с моментом *M*, распределенная сила интенсивности *q* и сосредоточенные силы $\overline{F}_k$, показанные на соответствующих рисунках. Определить реакции внешних связей (опорных закреплений) и реакции внутренних связей в точке *C*. Значения нагрузок и геометрические размеры конструкции приведены в таблице 2.1 на странице 15.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

К решению поставленной задачи можно приступить, изучив методы решения задач на равновесие систем абсолютно твердых тел под действием плоской системы сил (например, [1]: §18; [4]: §4; [5]: §3 и др.).

На практике часто приходится рассматривать конструкции, состоящие из системы твердых тел. При этом наряду с известными уже внешними силами, т.е. силами, возникающими в результате взаимодействия рассматриваемой системы тел с окружающими телами, не входящими в рассматриваемую систему, вводится понятие внутренних связей, т.е. связей, соединяющих отдельные тела системы друг с другом, и внутренних сил, т.е. сил взаимодействия тел системы между собой. В рассматриваемом ниже примере внутренняя связь расположена в точке *C*, в которой два тела заданной конструкции взаимодействуют между собой.

По закону о равенстве действия и противодействия внутренние силы всегда попарно равны по модулю и прямо противоположны по направлению. Приложены эти силы к взаимодействующим между собой телам системы (частям исходной конструкции).

Для решения задачи на равновесие системы тел (составной конструкции) используется метод расчленения системы тел (исходной конструкции), при этом задача будет иметь решение, если общее число неизвестных будет не более 3*k*. (Пример для системы, состоящей из двух тел, дается ниже). Можно

поступить следующим образом. Расчленить систему на части по количеству тел, составляющих систему, и записать уравнения равновесия для каждого тела в отдельности. Получится $3k$ уравнений. Действительно, если система твердых тел находится в равновесии, то и отдельные тела системы также находятся в равновесии. Решая систему $3k$ уравнений, определяются искомые неизвестные. Другой возможный путь заключается в составлении 3 уравнений равновесия для системы в целом. В эти уравнения войдут только внешние силы, в том числе реакций внешних связей. Полученные уравнения необходимо дополнить уравнениями равновесия для $(k-1)$ отдельных тел, входящих в рассматриваемую систему тел. Общее число уравнений равновесия, содержащих все искомые неизвестные, будет как и прежде $3+3\cdot(k-1)=3k$.

Задачи, в которых неизвестных больше, чем $3k$ (статически неопределимые задачи), нами здесь не рассматриваются.

Вопросы для контроля и самоконтроля

1. Что называется связью? Что называется внешней связью, внутренней связью?
2. Дайте понятие статически определимых и статически неопределимых задач.
3. Что Вы понимаете под термином «Составная конструкция»?
4. Опишите словами операции, которые надо произвести для решения задачи о равновесии составной конструкции.
5. Сформулируйте аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил.
6. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей относительно центра. Приведите пример её использования из Вашего задания.
7. Что называется парой сил, что называется плечом пары?
8. Дайте определение алгебраического момента пары сил.
9. Сформулируйте теорему об эквивалентности пар сил на плоскости.
10. Перечислите свойства пар сил. Сформулируйте условия равновесия произвольной плоской системы сил в смешанной форме.
11. Дайте 3 аналитические формы условий равновесия произвольной плоской системы сил.
12. Расскажите о частных случаях приведения произвольной плоской системы к центру.

Таблица 2.1

Исходные данные к заданию С2

	А				**Б**		**В**		**Г**
№	F_1	F_2	F_3	F_4	M	q	a	b	α
п/п	кН	кН	кН	кН	кН·м	кН/м	м	м	град
1	9	–	–	40	11	4,5	2,0	1,5	30
2	–	11	50	–	13	5,0	1,5	3,0	60
3	13	–	45	–	15	3,5	1,4	2,0	45
4	15	20	–	–	17	2,4	0,8	1,2	60
5	17	–	–	25	19	7,1	0,7	2,1	30
6	–	19	–	30	21	9,5	1,9	0,8	45
7	–	–	21	35	23	6,2	1,7	1,1	30
8	–	23	–	15	25	8,3	1,3	0,9	45
9	–	25	45	–	27	1,7	1,1	0,5	60
0	27	–	15	–	29	10,3	0,5	0,8	45

ПРИМЕР НА ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЯ С2

Постановка задачи. Пусть задана конструкция, состоящая из ломаного стержня *ADC* и прямолинейного стержня *CB*, соединенных шарниром в точке *C* (рис. 2.1). В точке *A* ломаный стержень жестко заделан, а прямолинейный стержень *CB* в точке *B* свободно опирается на гладкую горизонтальную поверхность. Действующие силы, момент и геометрические размеры показаны на рис. 1.

$F = 40$ кН, $M = 15$ кН·м, $q = 20$ кН/м, $a = 1$ м; $b = 2$ м.

Требуется: Определить реакции внешних связей в точках *A, B* и реакции внутренней связи в точке *C*.

Решение. Изобразим заданную конструкцию и покажем все действующие на нее силы (рис. 2.1). Действие распределенной силы $\overline{q}$ заменим сосредоточенной силой $\overline{Q}$, приложенной в середине отрезка *DC*, перпендикулярно к последнему:

$$Q = q \cdot CD .$$

Начало прямоугольной системы координат поместим в точке *A*, ось *Ax* направим вправо, ось *Ay* – вверх. Используя принцип освобождаемости от связей, заменим действие мысленно отброшенных внешних опорных связей в точках *A* и *B* соответствующими силами реакций связей. Реакция в точке *B* направлена по нормали к опорной гладкой поверхности; направление реакции в точке *A* заранее неизвестно. Поэтому реакцию в точке *A* представим через составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, как показано на рис. 2.1. Направления искомых реакций $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, пусть совпадают с положительными направлениями осей координат. Направление искомого реактивного момента M_A принято против хода часовой стрелки. Число внешних реакций связей $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, M_A, $\overline{Y}_B$ больше трех. Следуя сделанным ранее рекомендациям, для определения шести неизвестных $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, M_A, $\overline{Y}_B$, $\overline{X}_C$, $\overline{Y}_C$ воспользуемся методом расчленения (рис. 2.2, 2.3) и составим уравнения равновесия.

1 способ.

Расчленим конструкцию на две части: ломаный стержень *ADC* (тело 2) и стержень *CB* (тело 1), показанные на рисунке 2.2 и 2.3. Рассмотрим равновесие каждой части. Начнем с тела 1, поскольку в нем число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия.

Для тела 1 из условий равновесия найдем X_C, Y_C и Y_B (рис. 2.3).

$$\sum m_C(\overline{F}_k) = 0: \; Y_B \cdot 3l \cdot \cos\alpha - Fl = 0, \; Y_B = \frac{F}{3\cos\alpha} = \frac{80}{3} = 26{,}67 \text{ кН}. \qquad (2.1)$$

$$\sum F_{kx} = 0: \; X_C - F \cdot \sin\alpha = 0, \; X_C = F \cdot \sin 60° = 20\sqrt{3} = 34{,}64 \text{ кН}. \qquad (2.2)$$

$$\sum F_{ky} = 0: \; Y_C + Y_B - F \cdot \cos\alpha = 0, \; Y_C = -Y_B + F \cdot \cos 60° = -\frac{20}{3} = -6{,}67 \text{ кН}. \qquad (2.3)$$

Для тела 2 найдем X_A, Y_A и M_A. Найденные реакций для шарнира C $\bar{X}_C$ и $\bar{Y}_C$ по выражениям (2.2) и (3.3) будут иметь противоположные направления для тела 2, поскольку они являются внутренними силами рис 2.2. Учитывая $Q = q \cdot 2a = 10 \cdot 2 = 20$ Н, находим искомые реакции.

$$\sum F_{kx} = 0: \; X_A + Q \cdot \sin 30° - X_C = 0 \;\Rightarrow \tag{2.4}$$

$$X_A = -Q \cdot \sin 30° + X_C = -20/2 + 34{,}64 = 24{,}64 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{ky} = 0: \; Y_A - Q \cdot \cos 30° - Y_C = 0 \;\Rightarrow \tag{2.5}$$

$$Y_A = Q \cdot \cos 30° + Y_C = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-6{,}67) = 10{,}65 \text{ кН}$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0: \; M_A + M + X_C \cdot (6\sin 60° + 2\sin 30°) - Y_C(6\cos 60° + 2\cos 30°) -$$
$$- Q\cos 30° \cdot (6\cos 60° + 1\cos 30°) - Q\sin 30° \cdot (6\sin 60° + 1\sin 30°) = 0$$

$$M_A = -15 - 34{,}64 \cdot (6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}) + (-6{,}67)(6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) + \tag{2.6}$$
$$+ 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) + 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) = -137{,}27 \text{ кН·м.}$$

<u>2-й способ.</u>

Составляем уравнение равновесия для всей конструкции в целом, не расчленяя её на части и дополним эту систему уравнениями равновесия для одного из тел.

Для нашей конструкции будет легче вначале рассмотреть равновесие правой части 1 (рис. 2.3) и далее равновесие всей конструкции (рис. 2.1). Составив уравнения равновесия для **тела 1** (2.1)-(2.3), находим X_C, Y_C и Y_B. Составим уравнения равновесия для **всей конструкций** и найдем X_A, Y_A, M_A:

$$\sum F_{kx} = 0: \; X_A - F\sin\alpha + Q\sin 30° = 0,$$

$$X_A = F\sin 60° - Q\sin 30° = 40\frac{\sqrt{3}}{2} - 20/2 = 24{,}64 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{ky} = 0: \; Y_A + Y_B - F\cos\alpha - Q\cos 30° = 0,$$

$$Y_A = -Y_B + F \cdot \cos 60° + Q\cos 30° = -26{,}67 + 40/2 + 20\sqrt{3}/2 = 10{,}65 \text{ кН.}$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0:$$

$$M_A + M - Q\cos 30° \cdot (6\cos 60° + 1\cos 30°) - Q\sin 30° \cdot (6\sin 60° + 1\sin 30°) +$$
$$+ F\sin 60° \cdot 2l\sin 60° - F\cos 60°(AB - 2l\sin 30°) + Y_B \cdot AB = 0,$$

где $AB = 3b\cos 60° + 2a\cos 30° + 3l\cos 60° = 8{,}3093$ м,

$l = (3b\sin 60° + 2a\sin 30°)/(3\cos 30°) = 2{,}3849$ м.

$$M_A = -15 + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) + 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) - 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 2{,}38 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} +$$
$$+ 40 \cdot \frac{1}{2}(8{,}3 - 2{,}38) - 26{,}67 \cdot 8{,}3 = -137{,}29 \text{ кН·м.}$$

Решение можно проверить так же, как делалось при выполнении задания С1 или сравнивая решения, полученные двумя способами.

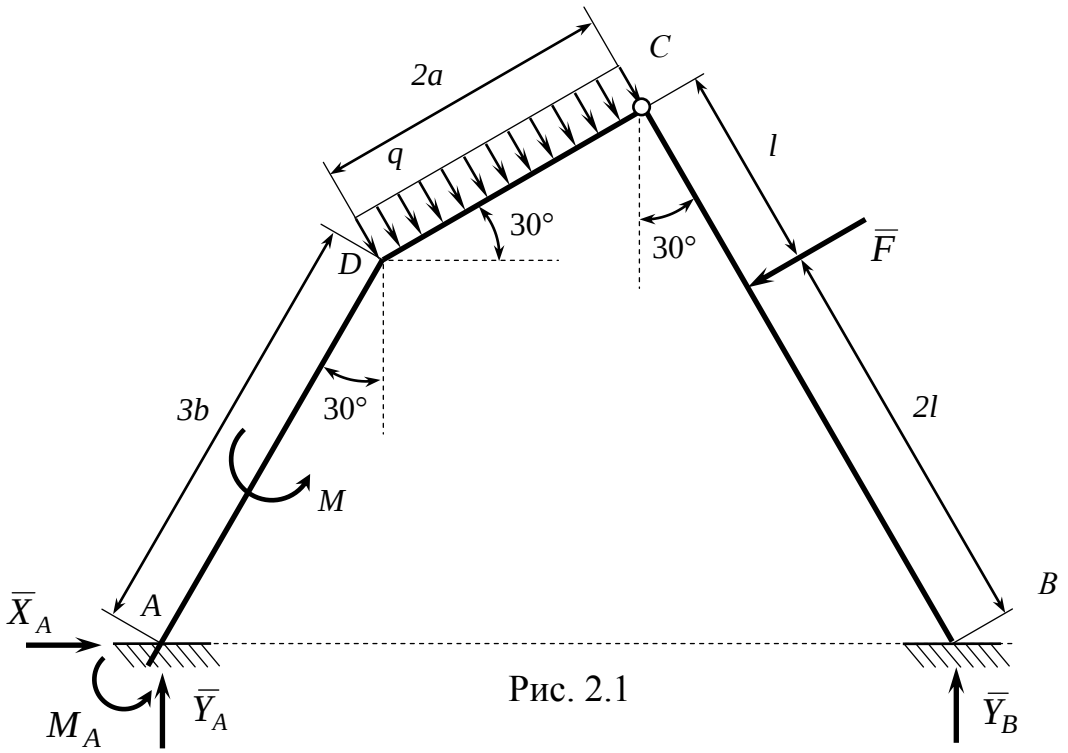


Рис. 2.1

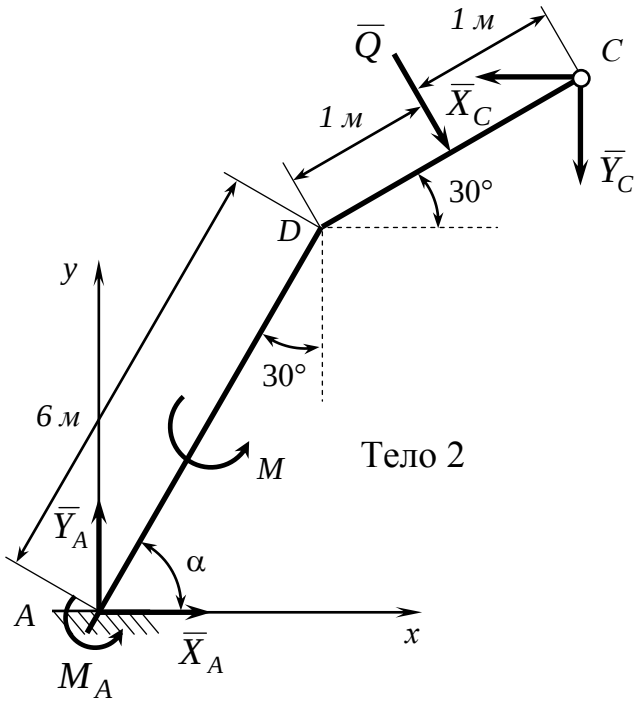


Рис. 2.2

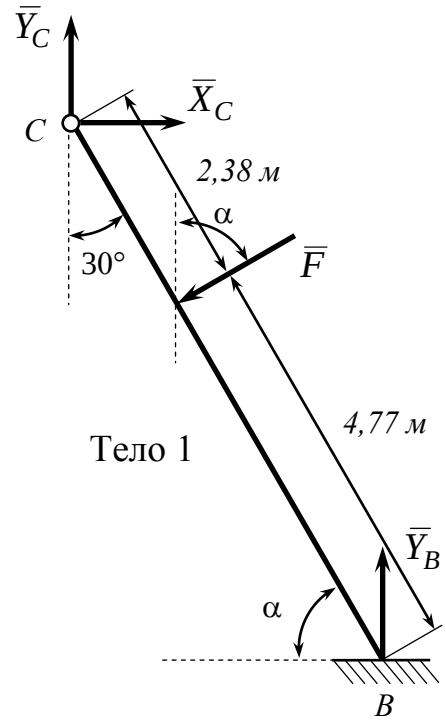
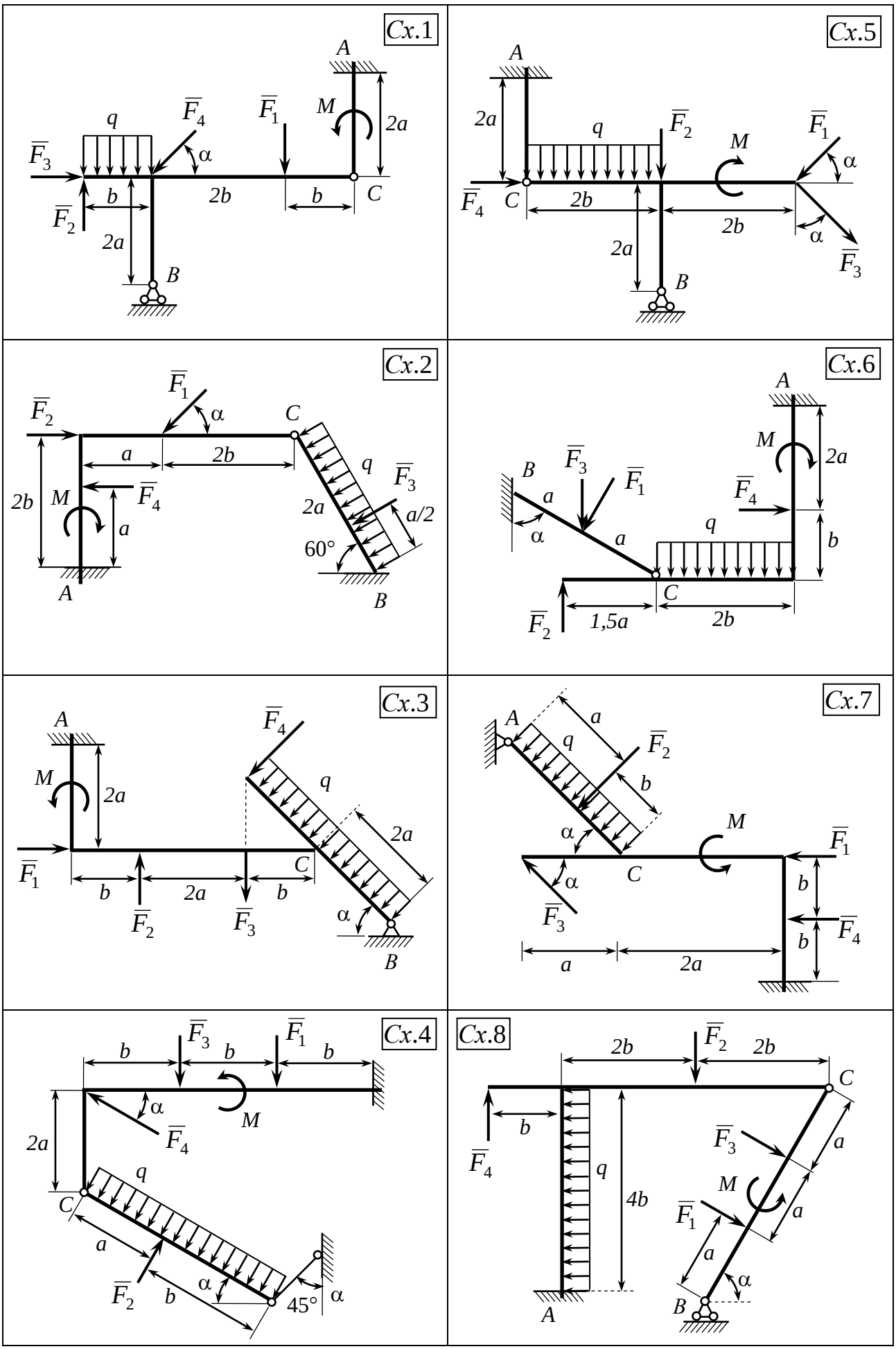
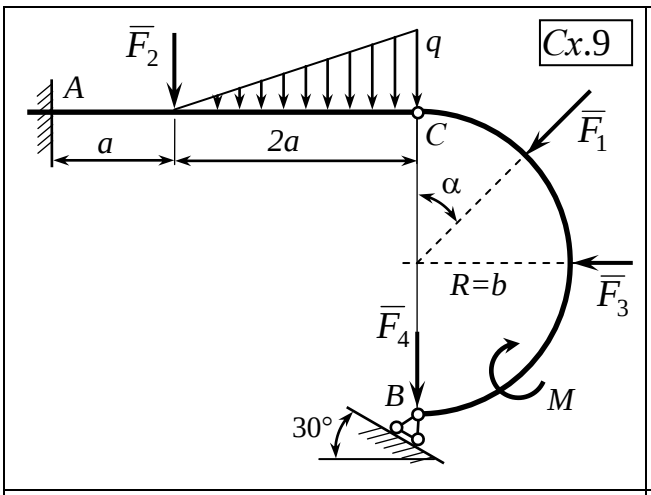
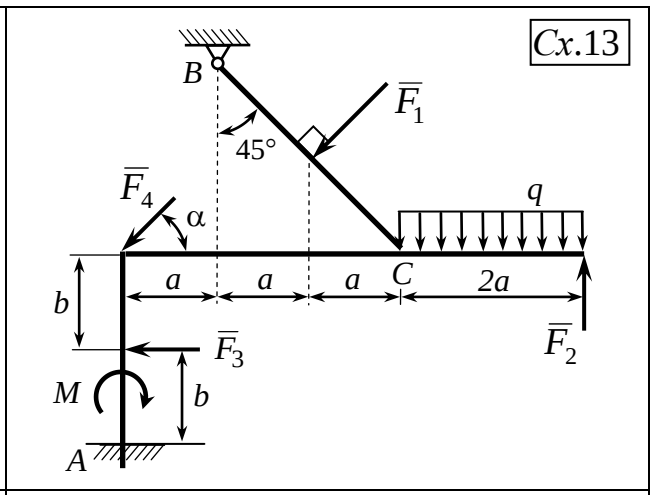
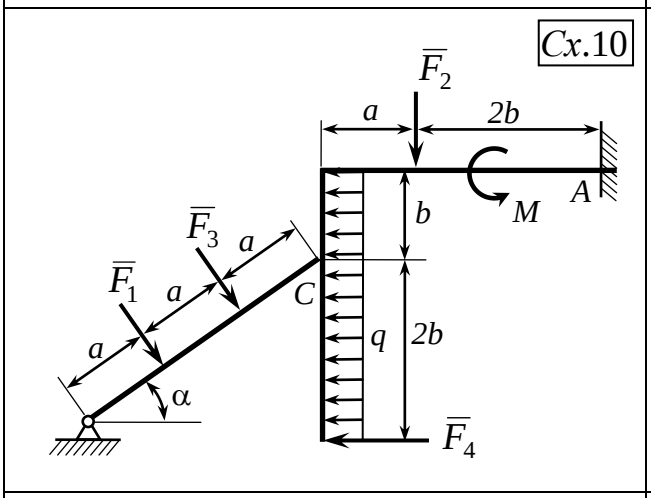


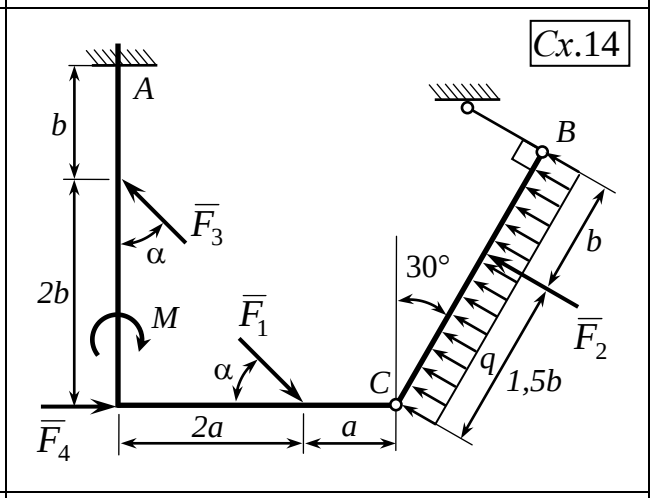
Рис. 2.3

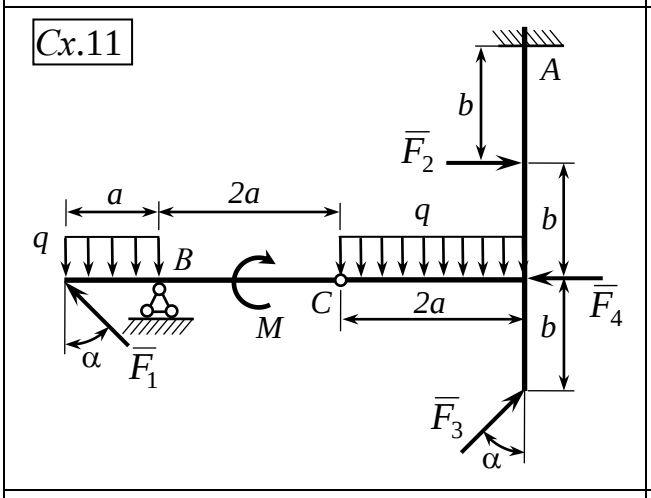

Cx.1
A
q
F4
F1
M
2a
F3
α
b
2b
b
C
F2
2a
B
Cx.5
A
2a
q
F2
M
F1
α
F4
C
2b
2b
α
2a
F3
B
Cx.2
F1
F2
α
C
a
2b
q
F3
2b
M
F4
2a
a/2
a
60°
A
B
Cx.6
A
M
2a
B
F3
F1
F4
a
α
a
q
b
C
F2
1,5a
2b
Cx.3
A
F4
M
2a
q
2a
F1
C
b
2a
b
F2
F3
α
B
Cx.7
A
a
q
F2
b
α
M
F1
C
α
b
F3
F4
b
a
2a
Cx.4
F3
F1
b
b
b
α
M
2a
F4
q
C
a
F2
b
α
45°
α
Cx.8
2b
F2
2b
C
b
F4
F3
a
q
M
4b
F1
a
a
α
A
B

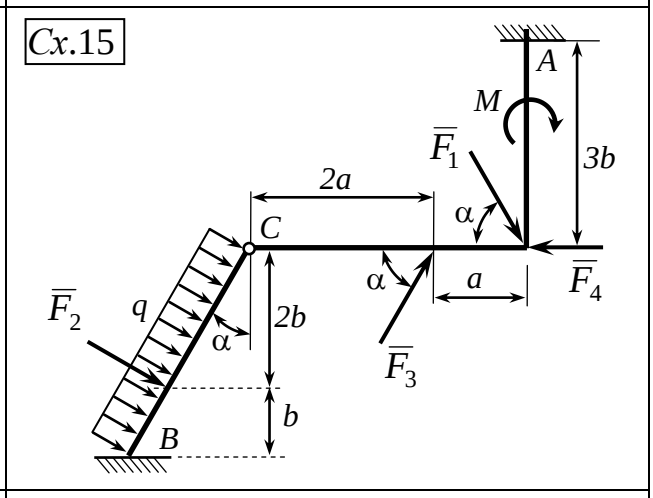

Cx.9
A
a
2a
C
q
α
R=b
B
30°
M

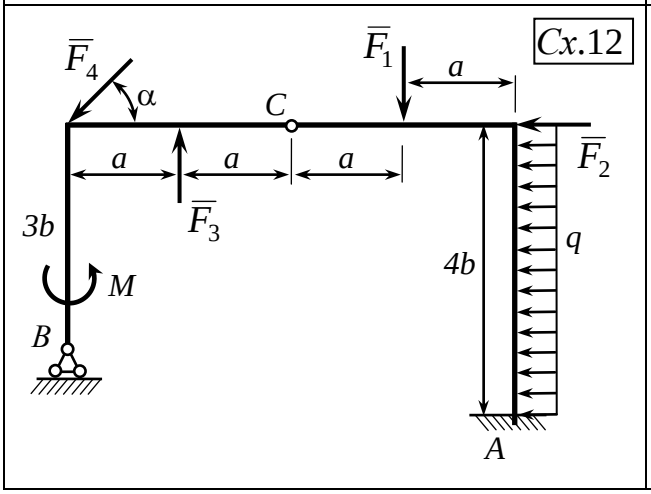

Cx.13
B
45°
q
α
a
a
a
C
2a
b
b
M

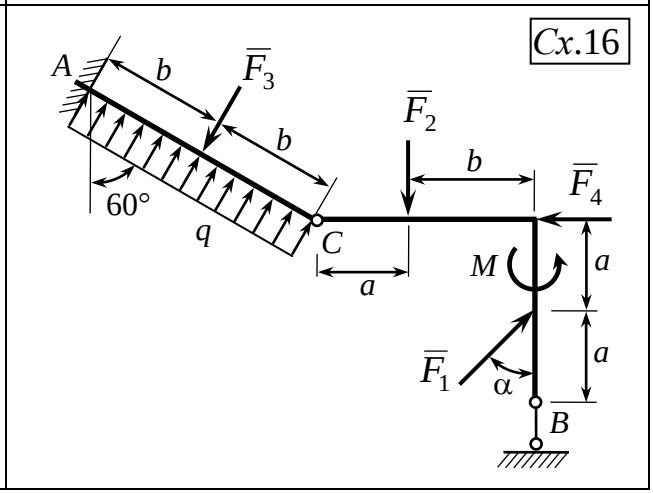

Cx.10
a
2b
A
M
b
a
a
a
C
q
2b
α


Cx.14
A
b
B
α
30°
b
2b
M
α
C
q
1,5b
2a
a

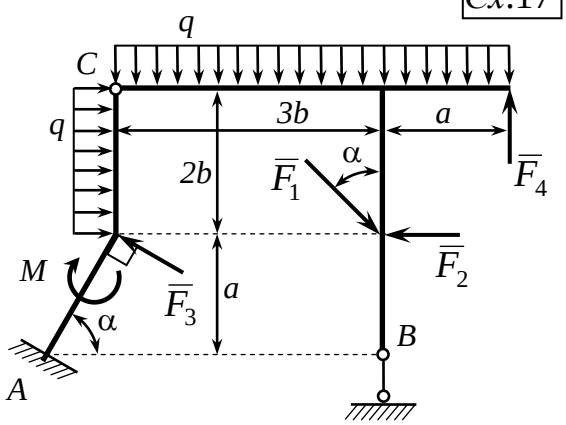

Cx.11
A
b
a
2a
q
q
B
C
M
2a
b
b
α


Cx.15
A
M
3b
2a
C
α
α
a
q
2b
α
b
B

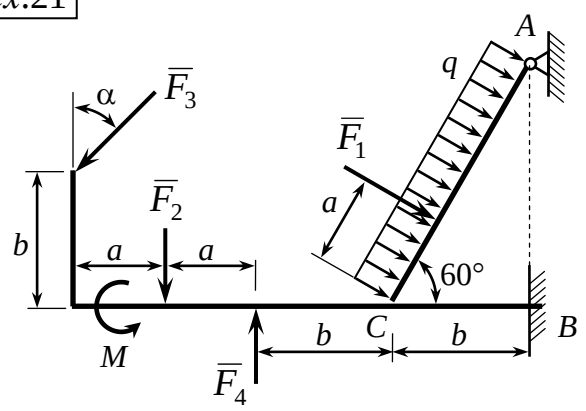

Cx.12
a
C
a
a
a
3b
M
B
4b
q
A


Cx.16
A
b
b
b
60°
q
C
a
M
a
a
α
B

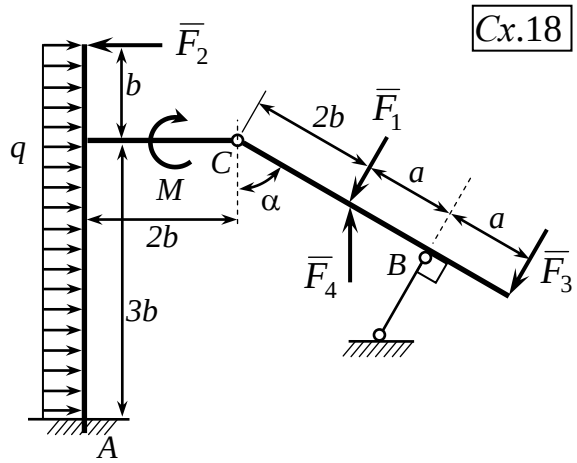
Cx.17



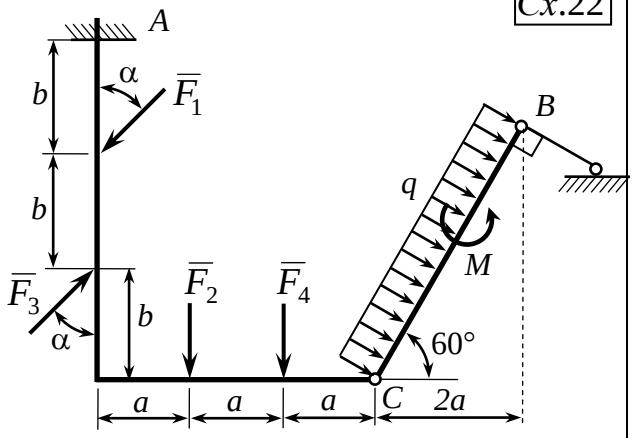
Cx.21



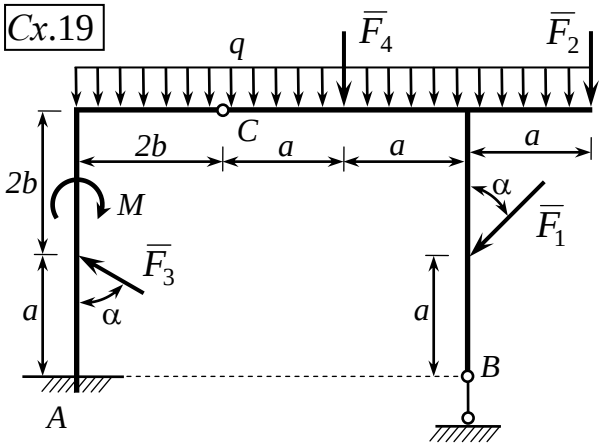
Cx.18



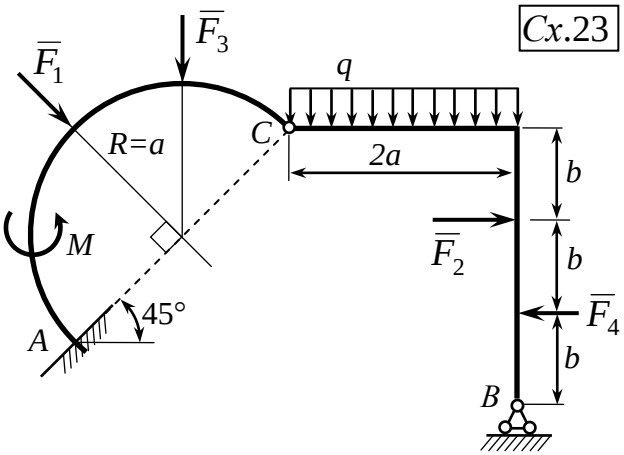
Cx.22



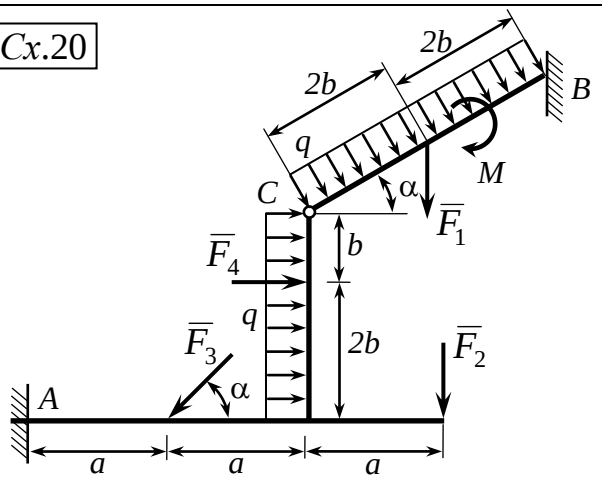
Cx.19



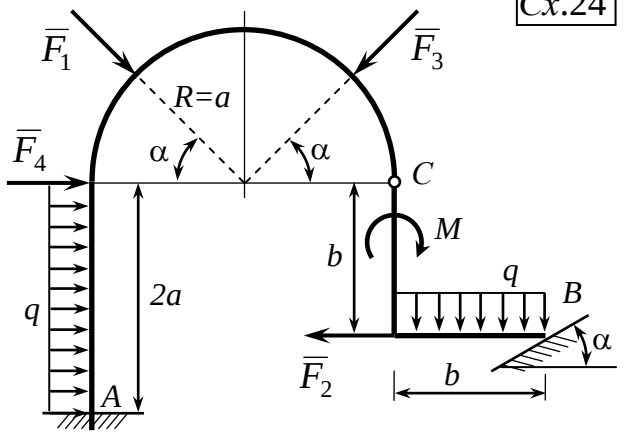
Cx.23

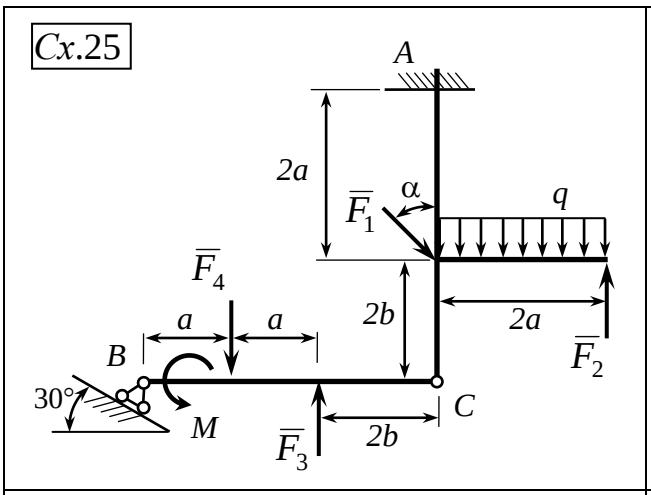


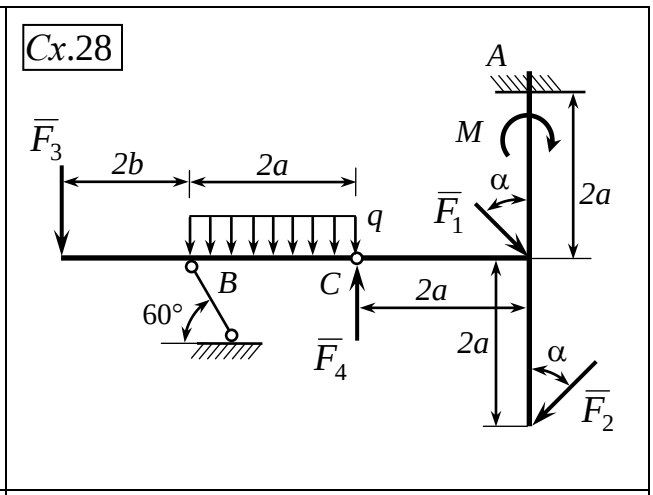
Cx.20

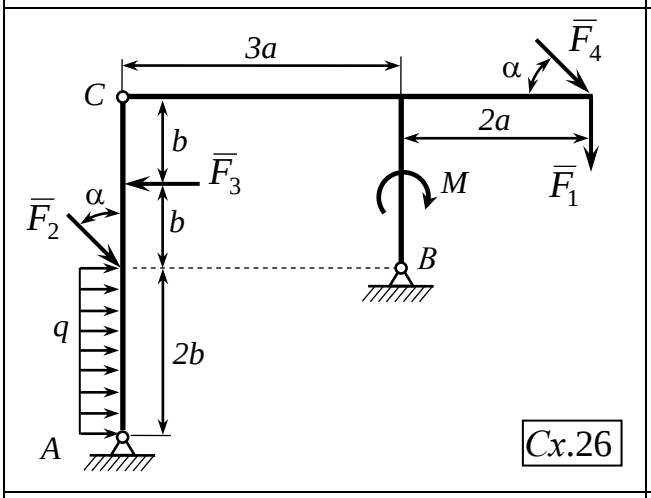


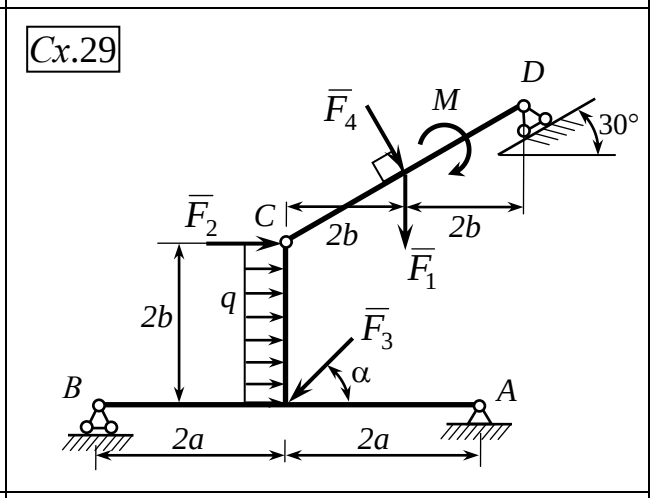
Cx.24

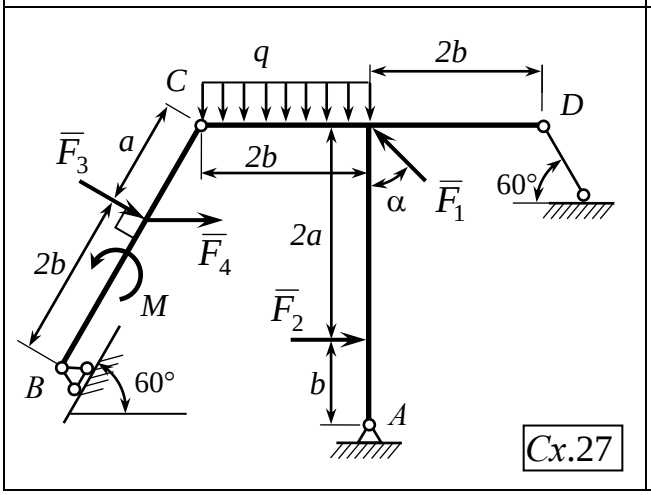


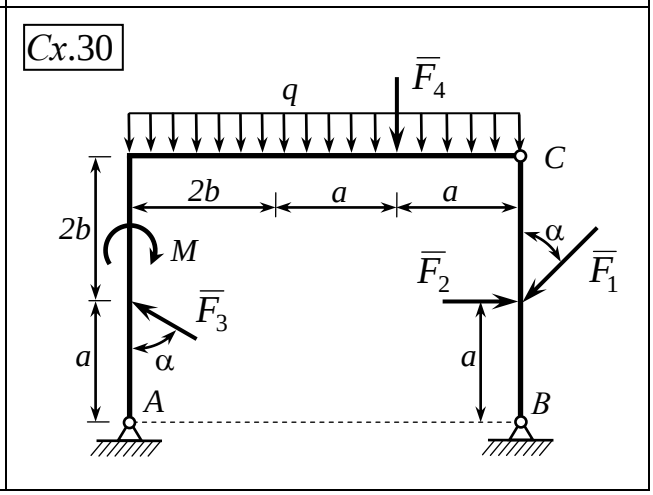

Cx.25
A
2a
α
q
F1
F4
a
a
2b
2a
B
F2
30°
M
C
F3
2b


Cx.28
A
F3
M
2b
2a
α
2a
q
F1
B
C
60°
2a
F4
2a
α
F2


3a
F4
α
C
2a
b
F3
M
F1
α
F2
b
B
q
2b
A
Cx.26


Cx.29
D
F4
M
30°
F2
C
2b
2b
F1
q
2b
F3
α
B
A
2a
2a


q
2b
C
D
F3
a
2b
60°
α
F1
F4
2a
2b
M
F2
B
60°
b
A
Cx.27


Cx.30
F4
q
C
2b
a
a
2b
M
α
F2
F1
F3
a
α
a
A
B

Задание № 3 (С4)

РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Цель работы: Изучить равновесие абсолютно твердого тела под действием произвольно пространственной системы сил. Закрепить теоретические знания и получить навыки по составлению уравнений равновесия для произвольной пространственной системы сил.

Постановка задачи. Абсолютно твердое тело в виде прямоугольной плиты *ABCD* весом P_1 или двух «сваренных» под прямым углом друг с другом однородных прямоугольных плит *ABCD* и *CEFD* весом P_1 и P_2, соответственно, находится в равновесии под действием сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, пары сил с моментом M и распределенной по ребру плиты нагрузки интенсивностью q (схемы 1 ÷ 30 на стр. 29 ÷ 32). Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей. Внешними связями являются сферический шарнир или подпятник, цилиндрический шарнир и невесомый стержень. Внешние силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ приложены в узлах или в серединах плит. Пара сил с моментом M действует в плоскости одной из плит.

Определить реакции связей. Данные для расчета в таблице 3.1.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

К решению поставленной задачи можно приступить, изучив теорию, связанную с равновесием произвольной пространственной системы сил ([1], гл. 7, §28; [2], гл. 5, §41, §43-45 и др.).

Для решения произвольной пространственной системы сил, приложенной к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\overline{R}$ этой системы сил и ее главный момент $\overline{M}_0$ относительно произвольно выбранного центра *O* были равны нулю, т.е.

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k = 0, \tag{3.1}$$

$$M_O = \sum \overline{m}_o(\overline{F}_k) = 0. \tag{3.2}$$

В проекциях на оси декартовой системы координат уравнения (3.1), (3.2) приводят к системе шести уравнений, выражающих условия равновесия пространственной системы сил.

$$\begin{aligned} &\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum m_x(\overline{F}_k) = 0, \\ &\sum F_{ky} = 0, \qquad \sum m_y(\overline{F}_k) = 0, \\ &\sum F_{kz} = 0, \qquad \sum m_z(\overline{F}_k) = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции заданных сил и реакций связей на оси *Ox*, *Oy*, *Oz*; m_x, m_y, m_z – моменты заданных сил и реакций связей относительно тех же осей.

Момент силы относительно оси *Ox* будет иметь знак плюс, если при наблюдении с положительного конца оси *Ox* поворот, который стремится совершить сила $\overline{F}_{yz}$ (проекция $\overline{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси *Ox*), виден происходящим против хода часовой стрелки.

Чтобы вычислить момент силы, например, относительно оси *Ox*, надо:

1. В произвольной точке оси построить плоскость, перпендикулярно оси *Ox*.
2. Спроецировать силу $\overline{F}$ на эту плоскость и найти величину $\overline{F}_{yz}$.
3. Найти плечо *h* этой силы в построенной плоскости относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.
4. Вычислить произведение $F_{yz} \cdot h$ с учетом знака.

Отметим два частных случая: *если сила параллельна оси или ей линия действия пересекает эту ось, то момент силы относительно оси равен нулю*.

При вычислении моментов силы относительно координатных осей иногда удобно пользоваться теоремой Вариньона для моментов силы относительно оси.

Если сила $\overline{F}$ задана аналитически, т.е. известны её проекции на оси F_x, F_y, F_z и координаты точки ей приложения (*x*,*y*,*z*), то моменты силы относительно осей могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\sum m_x(\overline{F}) = yF_z - zF_y, \quad \sum m_y(\overline{F}) = zF_x - xF_z, \quad \sum m_z(\overline{F}) = xF_y - yF_x.$$

<u>Вопросы для контроля и самоконтроля</u>

1. Дайте определение проекции вектора на ось и на плоскость.
2. Покажите реакции сферического шарнира и пространственной заделки.
3. Сформулируйте основную теорему статики о приведении произвольной пространственной системы сил к центру.
4. Опишите частные случаи приведения сил к центру.
5. Дайте определения момента силы относительно оси.
6. Расскажите практический метод определения момента силы относительно оси.
7. Как можно вычислить момент силы относительно оси, когда сила задана аналогичным методом?
8. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.
9. Сформулируйте геометрические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
10. Сформулируйте аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

11. Сформулируйте частные случай условий равновесия пространственной системы сил: система сходящихся сил, система параллельных сил.
12. Когда задача о равновесии пространственной системы сил будет статически определимой?
13. Что называется центром параллельных сил?
14. По каким формулам можно вычислить координаты центра параллельных сил?
15. Что называется центром тяжести твердого тела?
16. Что называется весом тела?
17. По каким формулам можно вычислить центр тяжести твердого тела, объема, площади, линии?
18. Опишите способы вычисления координат центра тяжести.
19. Опишите экспериментальные способы определения координат центра тяжести.

Таблица 3.1

Исходные данные к заданию С4

№ усло-вия	**А**			**Б**				**В**	**Г**
	AB	BC	DE	F_1	F_2	P_1	P_2	M	q
	см	см	см	Н	Н	Н	Н	Н·см	Н/см
1	120	90	130	150	250	500	400	150	50
2	130	70	120	250	150	700	300	140	70
3	100	120	110	150	200	600	450	200	150
4	140	80	100	100	100	550	300	250	100
5	150	90	80	200	150	500	450	140	120
6	100	60	120	100	250	350	500	160	110
7	110	140	180	100	250	750	450	130	90
8	60	120	160	150	100	600	550	170	80
9	80	100	100	250	125	750	400	200	140
0	110	80	40	100	150	300	450	300	100

ПРИМЕР НА ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЯ С4

Постановка задачи. Однородная плита *ABCD* весом *P* (рис. 3.1) находится в равновесии под действием сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, пары сил с моментом *M* и распределенной нагрузки интенсивности *q*. Найти реакции опор, если $AB = 4$ м; $BC = 3$ м; $F_1 = 2$ кН, $F_2 = 3$ кН, $P = 5$ кН, $M = 2{,}5$ кН·м, $q_{\max} = 1$ кН/м.

Требуется: определить реакции связей (опор).

Решение.

1. Выделить тело, равновесие которого изучается и изобразить его на новом чертеже. В данной задаче изучается равновесие плиты *ABCD*.

2. Указать активные силы, действующие на тело. На плиту действуют заданные (известные) силы $\overline{P}$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, пара сил с моментом *M* и распределенная по закону треугольника нагрузка *q*. В расчетной схеме заменим ее равнодействующей силой $\overline{Q}$, приложенной на расстоянии равном *AD*/3 от точки *A* (рис. 3.2).

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1{,}5 \text{ кН}.$$

3. Пользуясь принципом освобождаемости от связей, мысленно отбросим связи, заменяя их соответствующими реакциями. Принимая расчетное направление неизвестных реакций в сферическом и цилиндрическом шарнирах положительными в выбранной системе координат и считая стержень *CE* растянутым, покажем эти реакции на рис. 3.2.

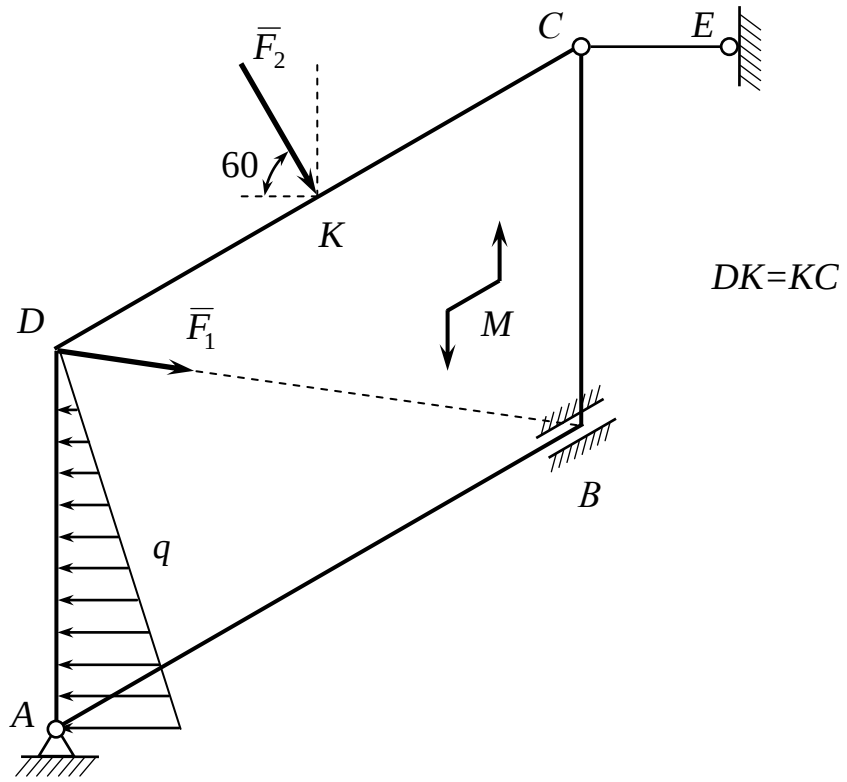


Рис. 3.1

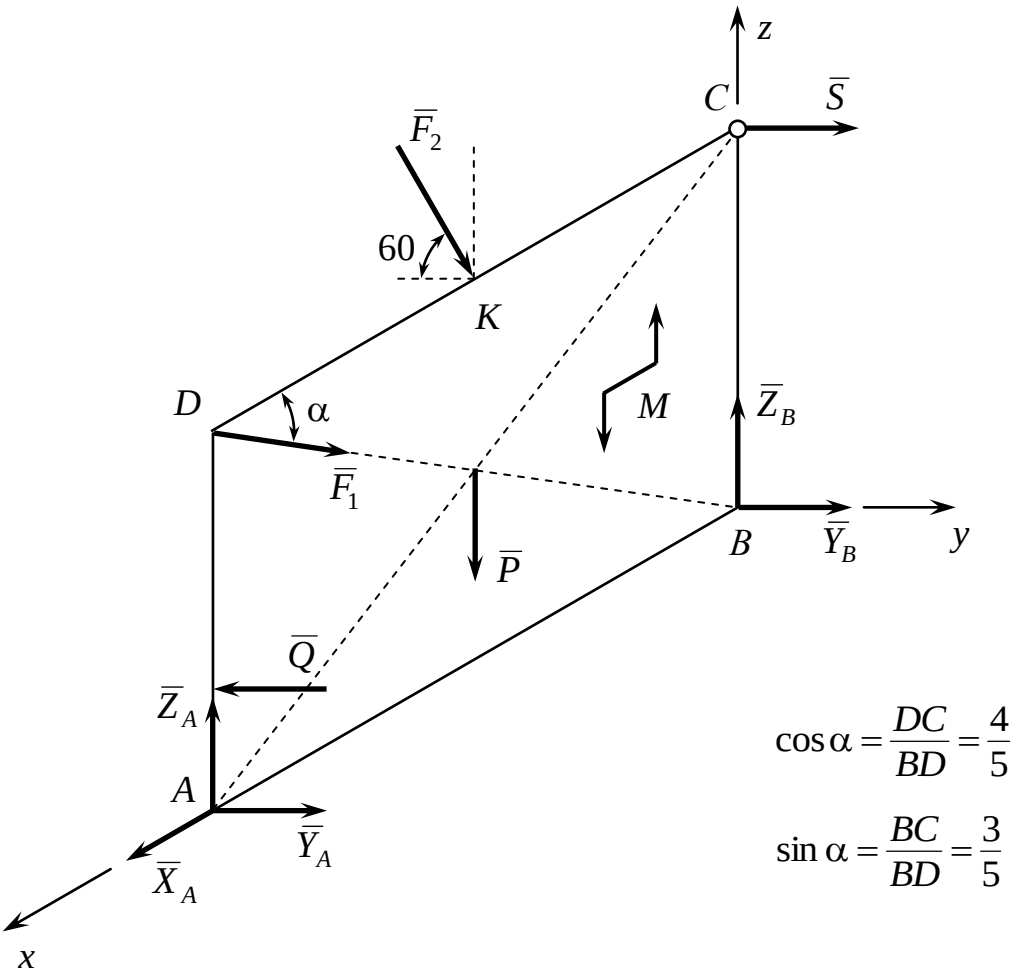


Рис. 3.2

4. Рассматривая тело как свободное, находящееся в равновесии под действием активных сил и реакций связей, составим уравнения равновесия (3.3):

$$\sum F_{kx} = 0: \quad X_A - F_1 \cos\alpha = 0, \tag{3.4}$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad Y_A + Y_B + F_2 \cos 60 - Q + S = 0, \tag{3.5}$$

$$\sum F_{kz} = 0: \quad Z_A + Z_B - P - F_1 \sin\alpha - F_2 \sin 60 = 0, \tag{3.6}$$

$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0: \quad -S \cdot BC - F_2 \cos 60 \cdot BC + Q \cdot \frac{BC}{3} = 0. \tag{3.7}$$

Реакций $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{Y}_B$, $\overline{Z}_B$ и силы $\overline{F}_1$, $\overline{P}$ момент вокруг оси *Bx* не создают, т.к. пересекают ее (плечо силы относительно оси равняется нулю). Момент от X_A также равен нулю, поскольку реакция параллельная оси *Bx*.

$$\sum m_y(\overline{F}_k) = 0: \quad -Z_A \cdot AB + P \cdot \frac{AB}{2} + F_2 \sin 60 \cdot \frac{AB}{2} + M = 0, \tag{3.8}$$

$$\sum m_z(\overline{F}_k) = 0: \quad Y_A \cdot AB - Q \cdot AB + F_2 \cos 60 \cdot \frac{AB}{2} = 0. \tag{3.9}$$

Анализируя систему уравнений, можно убедиться, что в нее входят только шесть неизвестных $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{Y}_B$, $\overline{Z}_B$, $\overline{S}$. Другими словами, задача является статически определимой.

5. Решить систему уравнений равновесия и определить неизвестные величины. Из первого уравнения (3.4) находим

$$X_A = F_1 \cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} = 1{,}6 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3.7) получаем реакцию невесомого стержня

$$S = -F_2 \cos 60 + \frac{Q}{3} = -3 \cdot 0{,}5 + \frac{1{,}5}{3} = -1 \text{ кН}.$$

Уравнение (3.8) позволяет найти

$$Z_A = P \cdot \frac{1}{2} + F_2 \sin 60 \cdot \frac{1}{2} + M = \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2{,}5 = 6{,}3 \text{кН}.$$

Уравнение (3.9) позволяет определить

$$Y_A = Q - F_2 \cos 60 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5 - 3 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}75 \text{ кН}.$$

Тогда из уравнения (3.5) найдем

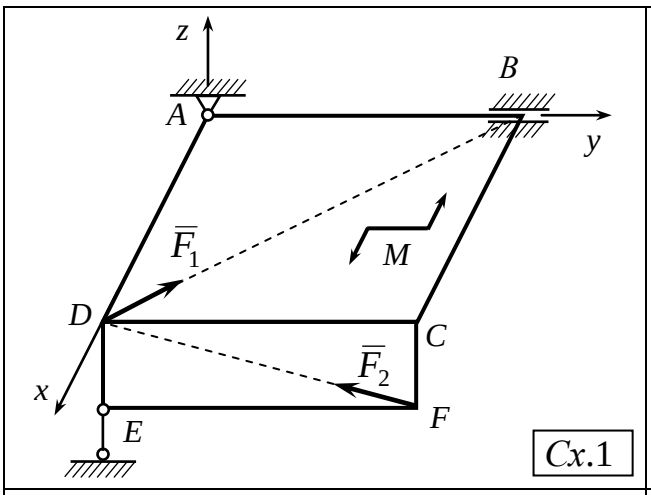
$$Y_B = -Y_A - F_2 \cos 60 + Q - S = -0{,}75 - 3 \cdot 0{,}5 + 1{,}5 - (-1) = 0{,}25 \text{ кН},$$

а из уравнения (3.6):

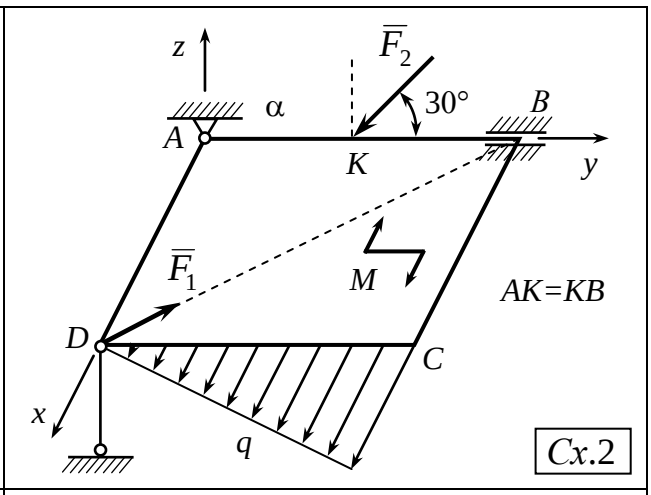
$$Z_B = -Z_A + P + F_1 \sin\alpha + F_2 \sin 60 = -6{,}3 + 5 + 2 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}5 \text{ кН}.$$

Отрицательный знак реакции $\overline{S}$ указывает на то, что истинное направление реакции противоположно показанной на рис. 3.2.

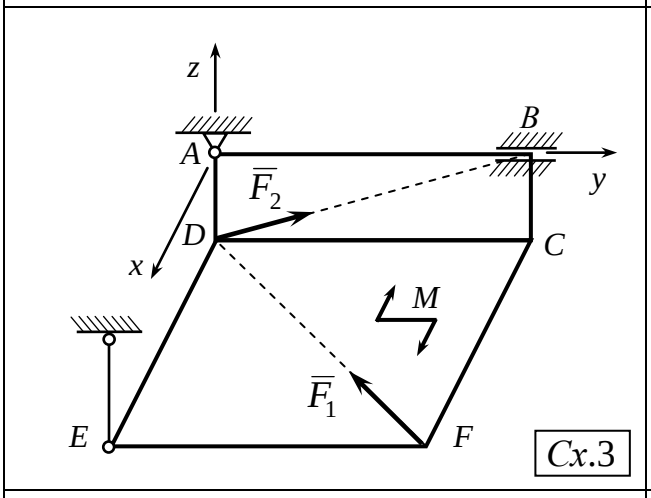
Ответ: $X_A = 1{,}6$ кН, $Y_A = 0{,}75$ кН, $Z_A = 6{,}3$ кН,
$Y_B = 0{,}25$ кН, $Z_B = 2{,}5$ кН, $S = -1$ кН.



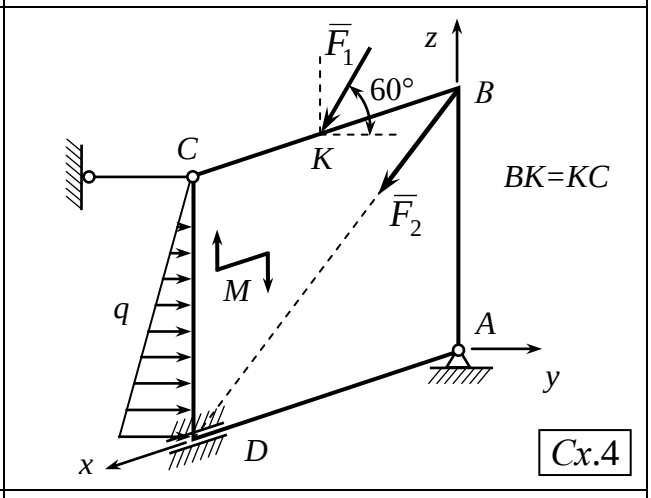
Cx.1



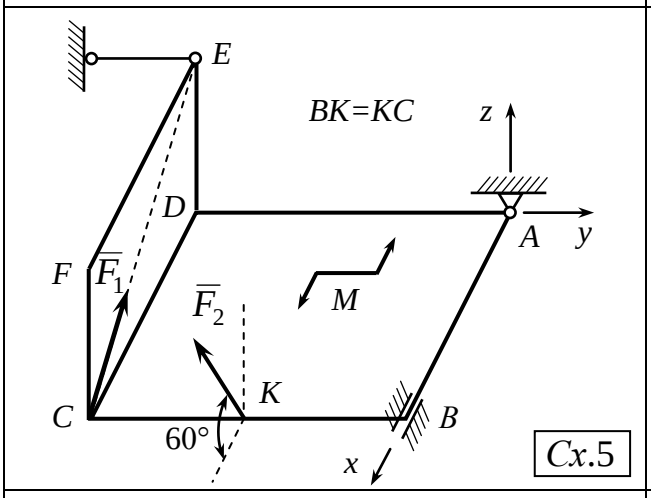
Cx.2



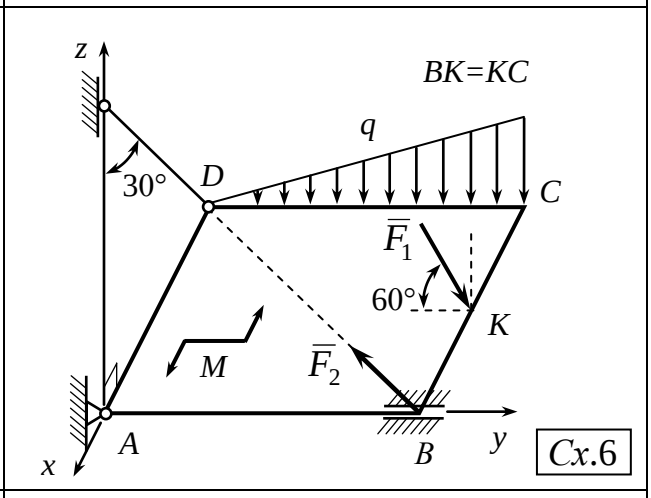
Cx.3



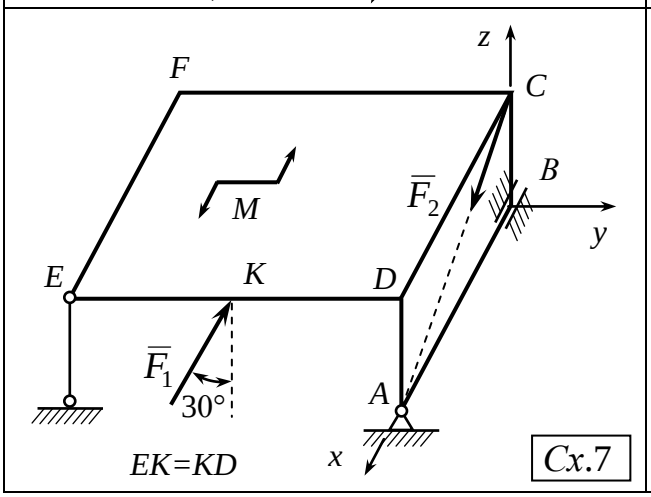
Cx.4



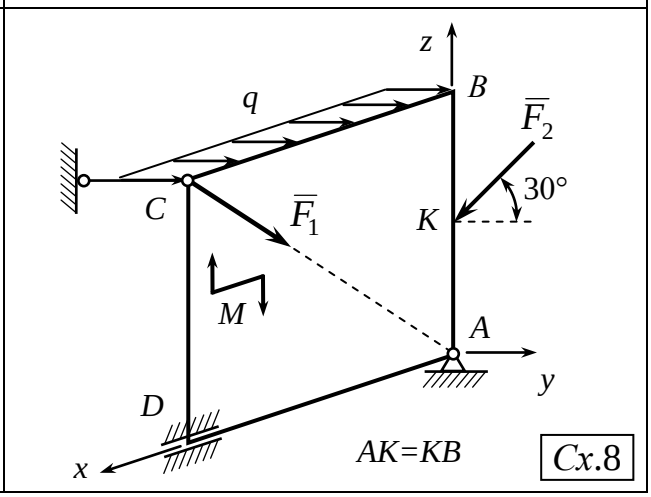
Cx.5



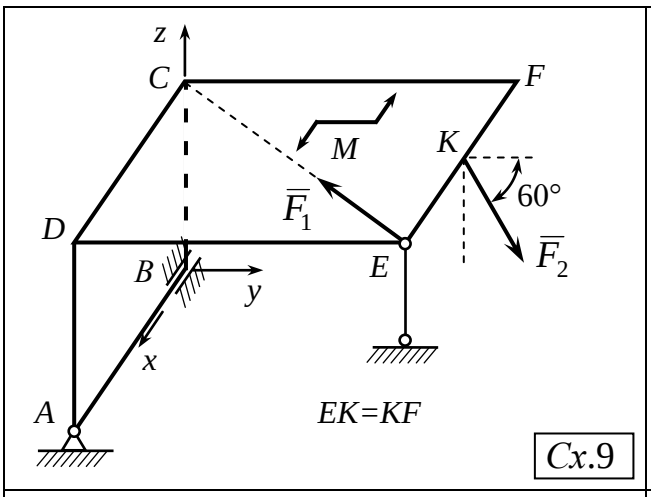
Cx.6



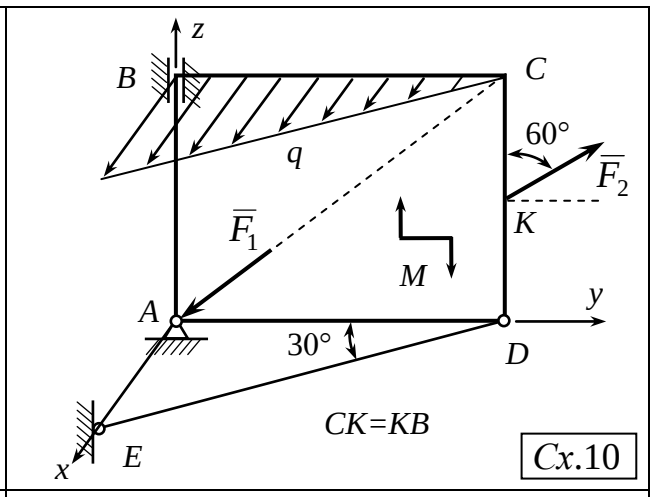
Cx.7



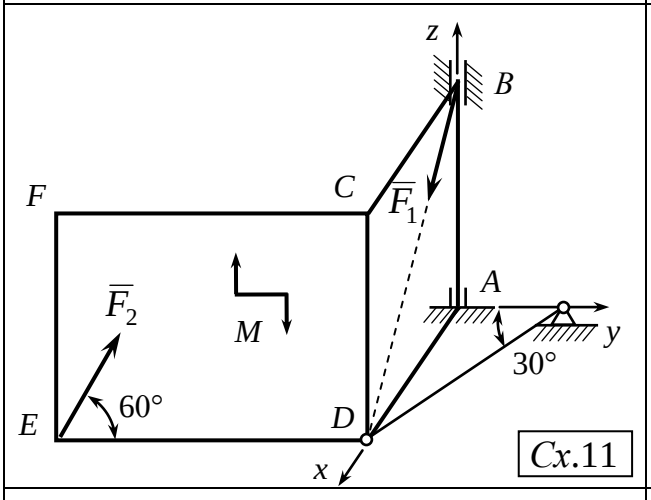
Cx.8



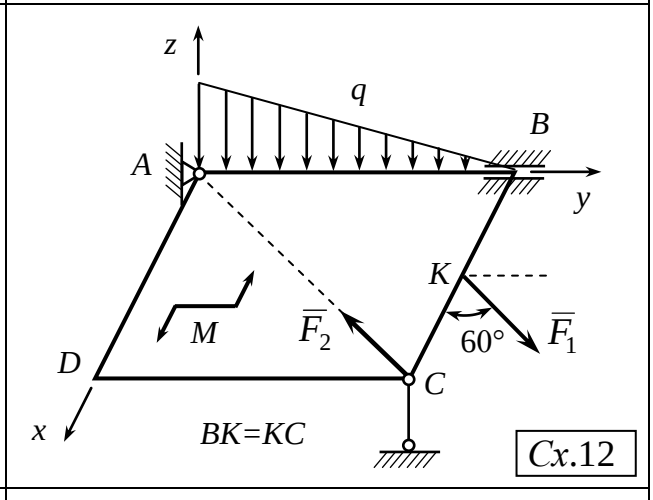
Cx.9



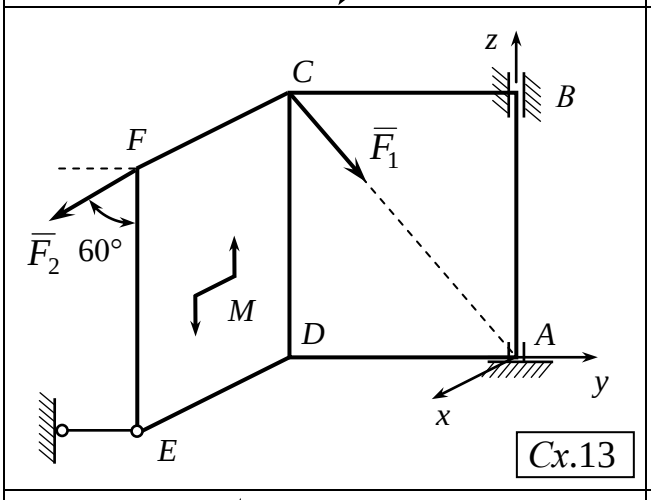
Cx.10



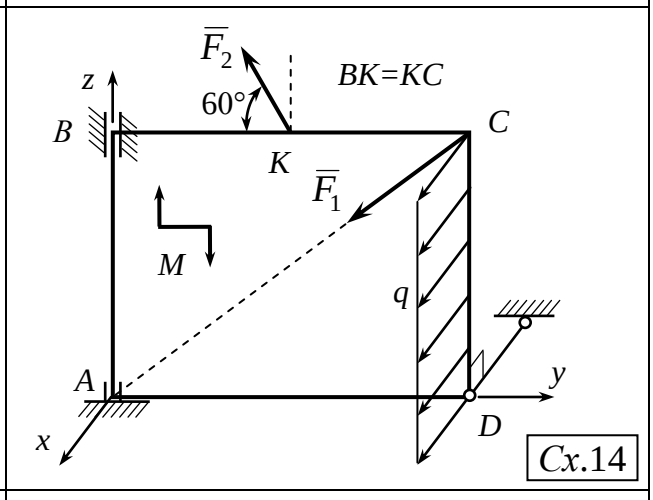
Cx.11



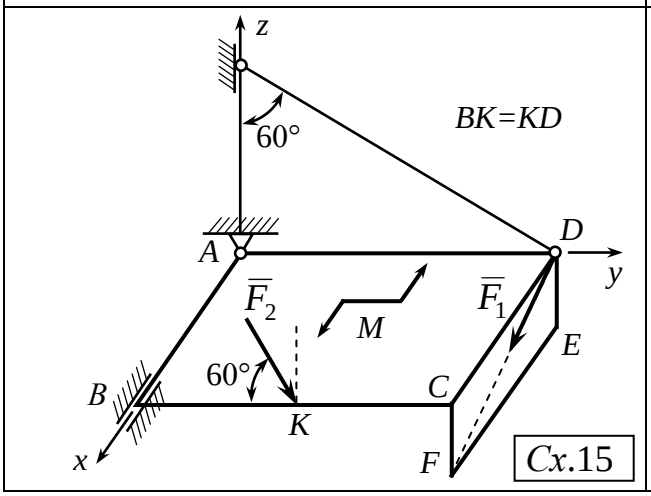
Cx.12



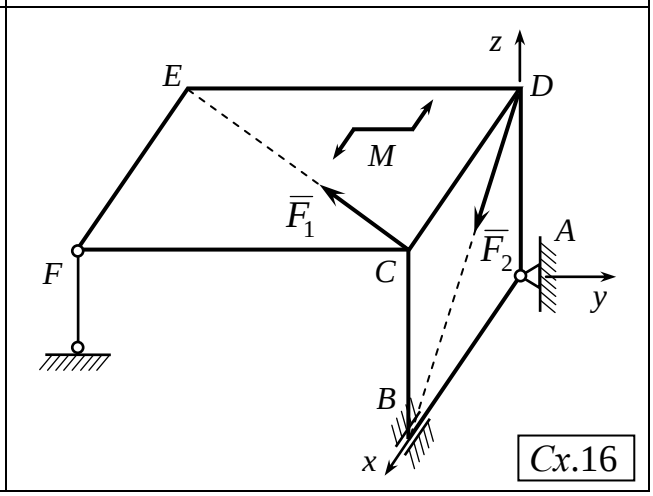
Cx.13



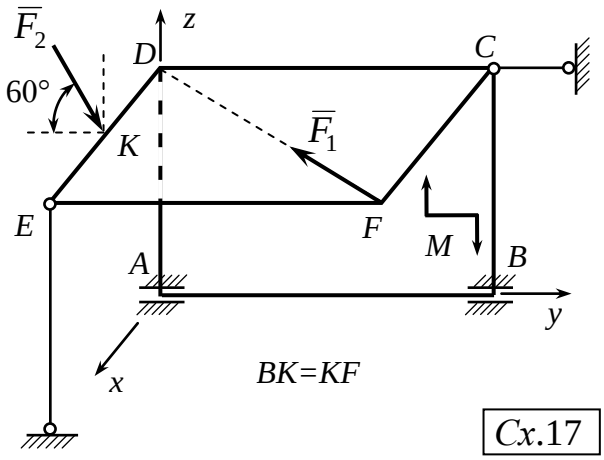
Cx.14



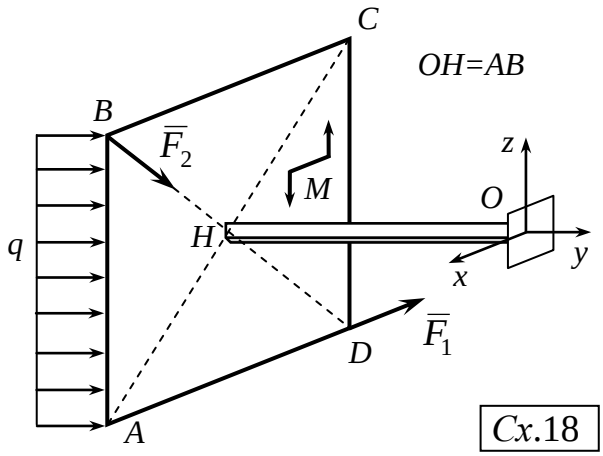
Cx.15



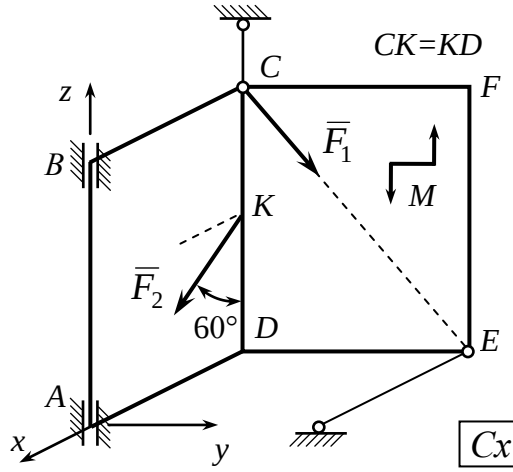
Cx.16



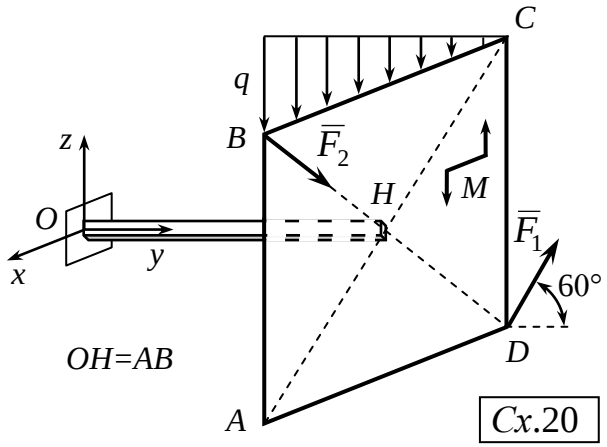
Cx.17



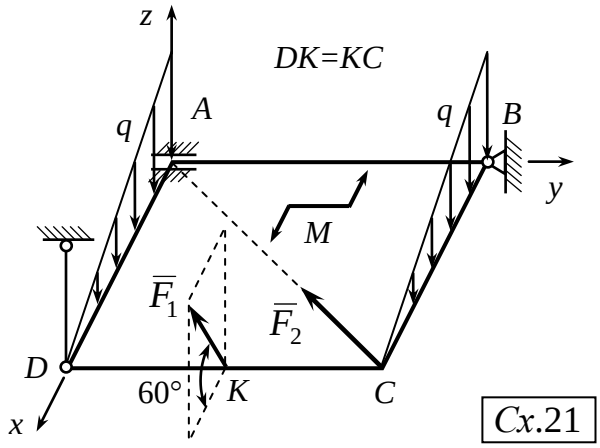
Cx.18



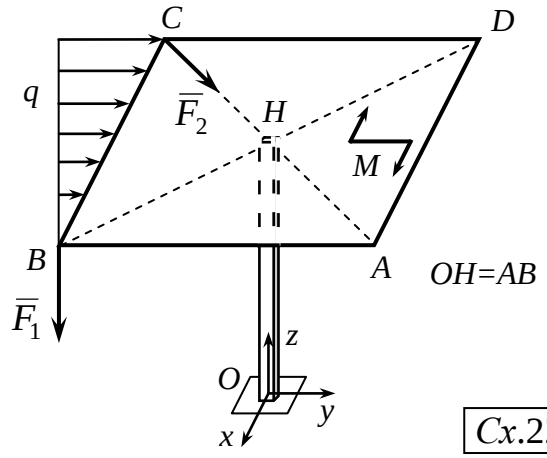
Cx.19



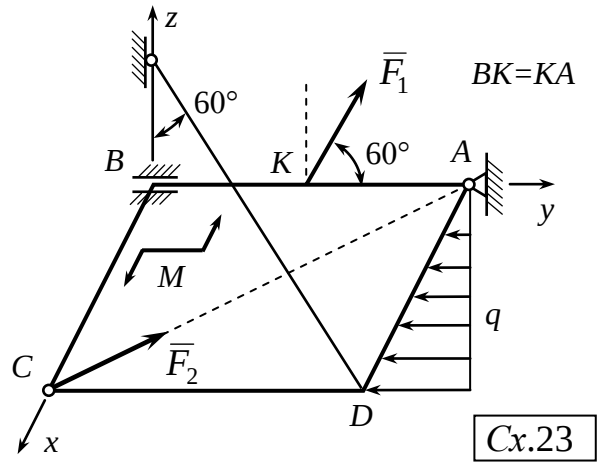
Cx.20



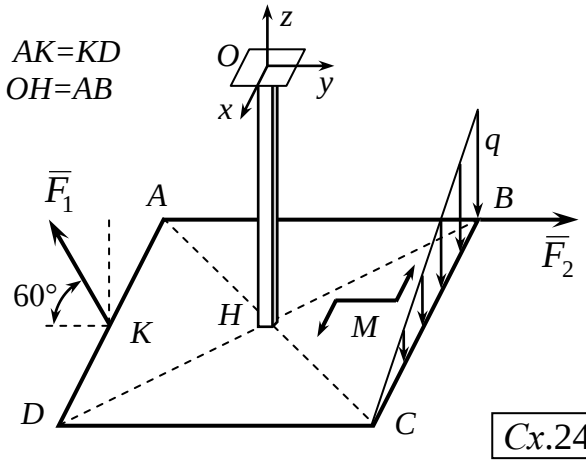
Cx.21



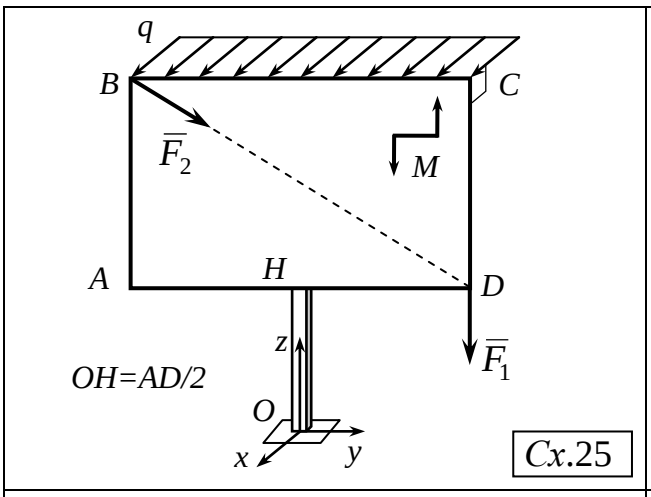
Cx.22



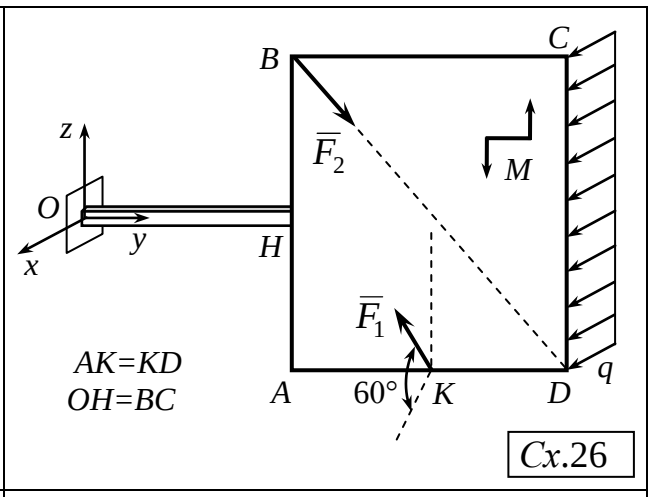
Cx.23



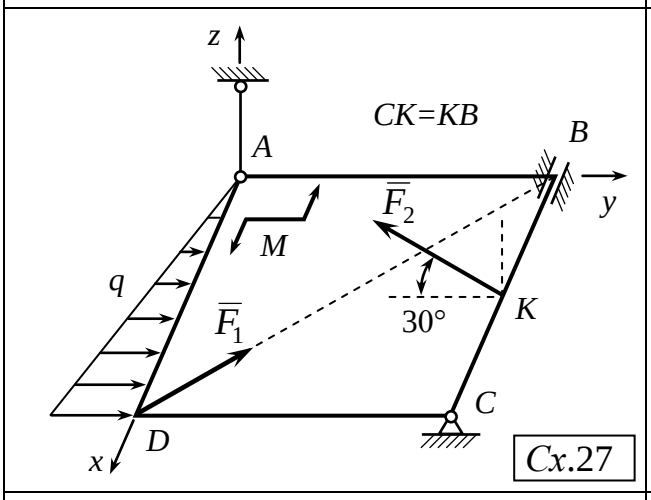
Cx.24



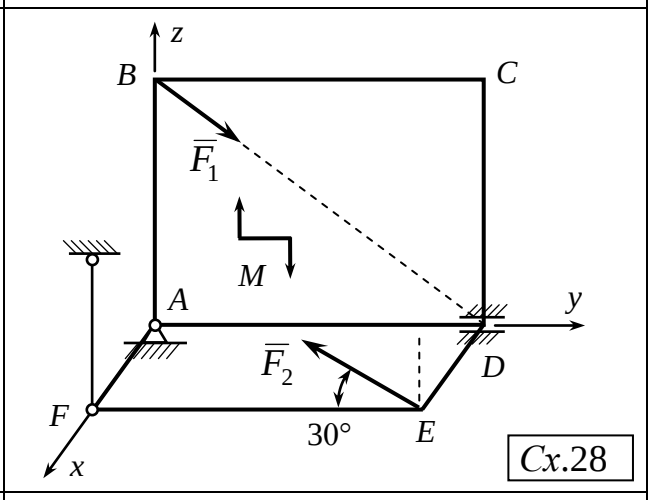
Cx.25



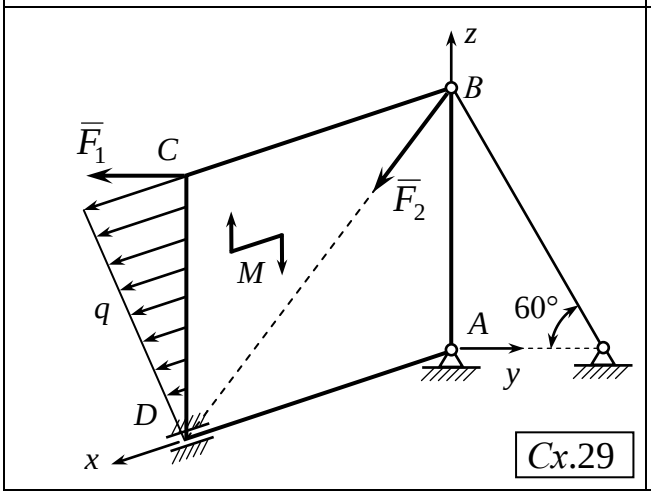
Cx.26



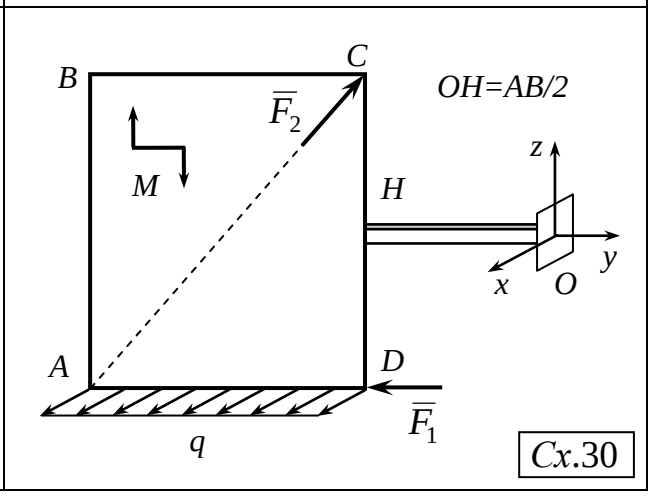
Cx.27



Cx.28



Cx.29



Cx.30

Задание № 4 (К2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы: Изучить способы нахождения кинематических характеристик поступательного и вращательного движений твердых тел. Научиться определять зависимости между угловыми скоростями и угловыми ускорениями точек при передаче движения одного тела другому, а также находить скорости и ускорения различных точек тел.

Для выполнения задания необходимо изучить разделы поступательного и вращательного движений твердого тела по рекомендованной литературе:

[1] §§ 48-51;
[2] §§ 78-84;
[5] глава IV §§ 1,2.

Вопросник-минимум для защиты задания К2:

1) Какое движение твердого тела называется поступательным и какими свойствами оно обладает?
2) Какое движение твердого тела называется вращением вокруг неподвижной оси? Ввести понятие угла поворота φ и написать уравнение этого движения.
3) Как определяется направление и быстрота вращения? Что называется вектором угловой скорости $\overline{\omega}$.
4) Что называется вектором угловой скорости $\overline{\varepsilon}$.
5) Как определяется ускорение любой точки тела при вращательном движении?
6) Какое вращательное движение называется равномерным? Получите уравнение этого движения.
7) Какое вращательное движение называется равнопеременным? Получите уравнение этого движения.
8) Представить вектор скорости точки $\overline{V}$ в виде векторного произведения.
9) Представить касательную составляющую $\overline{a}_\tau$ вектора ускорения точки в виде векторного произведения.
10) Представить нормальную составляющую $\overline{a}_n$ вектора ускорения точки в виде векторного произведения.

<u>Постановка задачи.</u> Механизм состоит из зубчатой рейки 1, ступенчатых колес 2 – 4, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, и груза 5, привязанного к концу нерастяжимой нити, намотанной на одно из колес (схемы 1 ÷ 30 на страницах 37 ÷ 41).

Радиусы колес равны соответственно:

r_2 = 8 см, R_2 = 11 см; r_3 = 12 см, R_3 = 15 см; r_4 = 16 см, R_4 = 20 см.

На ободах колес отмечены точки *A*, *B* и *C*. В зависимости от варианта в этих точках необходимо определить скорость или ускорение. Рейка 1 и груз 5 совершают поступательные прямолинейные движения вдоль осей *x* или *y*, соответственно. Если рейка или груз являются ведущим звеном механизма, то положительные направления осей *x* и *y* указаны на схемах. Если одно из ступенчатых колес является ведущим звеном, то положительное направление угла поворота этого колеса будет против хода часовой стрелки.

В таблице 4.1 в первом столбце *А* указано уравнение движения и закон изменения скорости ведущего звена механизма, где

$x(t)$, $\dot{x}(t)$ – уравнения движения и изменения скорости движения рейки;

$y(t)$, $\dot{y}(t)$ – законы движения и изменения скорости груза;

$\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ – законы вращения и изменения угловой скорости колеса.

Везде *x* и *y* изменяются в сантиметрах, φ - в радианах, *t* – в секундах.

В момент времени *t*, значения которого даются во 2-ом столбце *Б*, определить: скорости (*v* – линейные, ω - угловые) соответствующих точек или тел, которые указаны в 3-ем столбце *В*; ускорения (*a* – линейные, ε - угловые) соответствующих точек или тел, указанных в 4-ом столбце *Г*. Определяемые кинетические характеристики изобразить на рисунке.

Таблица 4.1

Исходные данные к заданию К2

№ п/п	**А**	**Б**	**В**			**Г**		
	x, *y* (см); *t* (с)	*t* (с)	Найти			Найти		
0	$x = 5t^2 - 4t$	5	v_5	v_A	ω_3	a_1	a_A	ε_4
1	$\dot{y} = 2t^2 - 6t$	0,5	v_1	v_B	ω_4	a_5	a_A	ε_3
2	$\varphi_2 = 3t^3 - 8t^2$	2	v_5	v_C	ω_2	a_1	a_B	ε_2
3	$\dot{\varphi}_3 = -3t^2 + 7t$	4	v_1	v_B	ω_3	a_5	a_C	ε_2
4	$\varphi_4 = -t^3 + 3t^2$	3	v_5	v_C	ω_2	a_1	a_A	ε_3
5	$\dot{x} = 4t^2 + 2t$	2,5	v_5	v_A	ω_4	a_5	a_B	ε_2
6	$\varphi_3 = 2t^3 - 4t^2$	1	v_1	v_B	ω_2	a_5	a_C	ε_3
7	$\dot{\varphi}_2 = -2t^2 + 5t$	4	ω_2	v_C	ω_3	a_5	a_B	ε_4
8	$y = 3t^3 - 5t^2$	1,5	ω_3	v_A	ω_4	a_1	a_C	ε_3
9	$\dot{\varphi}_4 = -3t^2 + 14t$	3,5	v_1	v_5	ω_3	a_5	a_B	ε_2

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ К2

Рейка *1*, ступенчатое колесо 4 с радиусом R_4 и r_4 и ступенчатое колесо 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 находятся в зацеплении (рис. 4.1). Колеса 3 и 2 связаны ременной передачей. На внешнюю ступень колеса 2 намотана нить с грузом 5 на конце. Груз движется по закону $y = y(t)$, (y – в см., t – в сек., положительное направление оси y показано на рисунке).

Исходные данные: $\dot{y} = 3t^2 - 6t$ см/с; $r_2 = 2$ см, $R_2 = 4$ см, $r_3 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_4 = 5$ см, $R_4 = 10$ см; $t = 4$ с.

Определить: v_C, v_5, ω_3, a_1, a_B, ε_3, в момент времени t = 4 с. Изобразить искомые величины на рисунке.

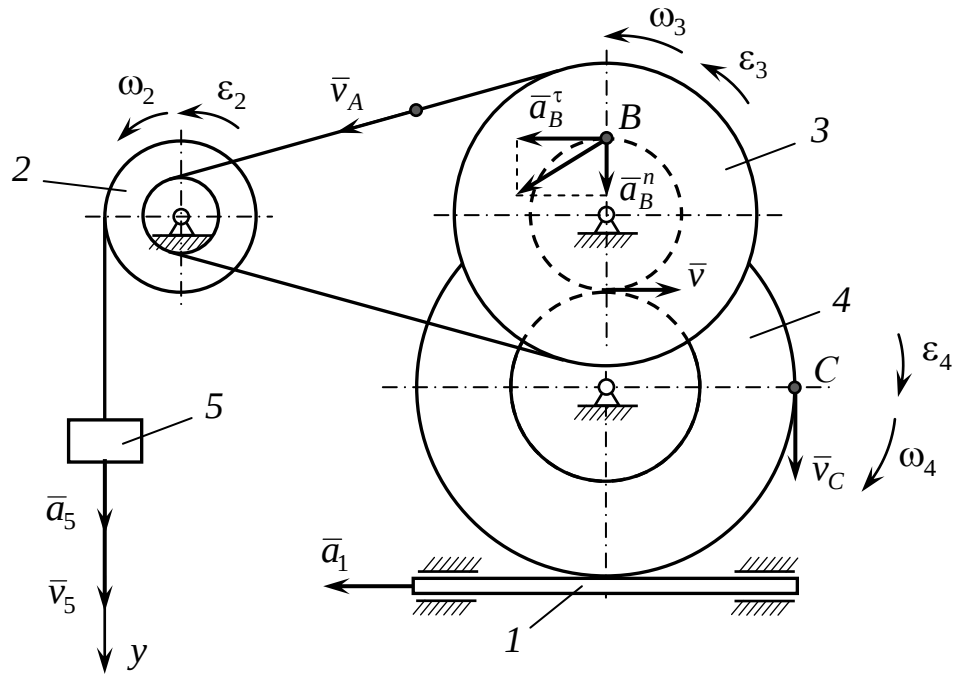


Рис. 4.1

Решение.

Ведущим телом является груз 5 (дается закон движения груза $\dot{y} = 3t^2 - 6t$) поэтому сначала определяем кинематические характеристики груза:

$$v_5 = \dot{y} = 3t^2 - 6t\Big|_{t=4c} = 24 \text{ см/с} > 0, \qquad a_5 = \ddot{y} = 6t - 6\Big|_{t=4c} = 18 \text{ см/с}^2 > 0,$$

вектора $\bar{v}_5$ и $\bar{a}_5$ направлены вниз по оси y и движение груза будет ускоренным.

Груз 5 сообщает ступенчатому колесу 2 вращательное движение с помощью гибкой нерастяжимой нити надетой на внешний обод радиуса R_2. Угловая скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{|v_5|}{R_2} = \frac{24}{4} = 6 \text{ с}^{-1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{|a_5|}{R_2} = \frac{18}{4} = 4{,}5 \text{ с}^{-2}.$$

Показываем на рисунке направления ω_2 и ε_2, они будут направлены против хода часовой стрелки исходя из направлений скорости $\bar{v}_5$ и ускорения $\bar{a}_5$ груза.

Колеса 2 и 3 связаны ременной передачей (гибкой нерастяжимой нитью). Скорость и касательное ускорение внутреннего обода колеса 2 передаются внешнему ободу колеса 3. Скорость и ускорение любой точки *A* нити:

$$v_A = \omega_2 r_2 = \omega_3 R_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{R_3} = \frac{6 \cdot 2}{8} = 1{,}5 \text{ с}^{-1},$$

$$a_A = \varepsilon_2 r_2 = \varepsilon_3 R_3 \Rightarrow \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 r_2}{R_3} = \frac{4{,}5 \cdot 2}{8} = 1{,}125 \text{ с}^{-2}.$$

Показываем найденные направления угловой скорости ω_3 и углового ускорения ε_3 колеса 3, обращая внимание на направления ω_2 и ε_2 колеса 2. Зная ω_3 и ε_3 можно найти скорость и ускорение любой точки колеса 3, тогда

$a_B^\tau = \varepsilon_3 r_3 = 1{,}125 \cdot 4 = 4{,}5$ см/с^2, $a_B^n = \omega_3^2 r_3 = 1{,}5^2 \cdot 4 = 9$ см/с^2, откуда

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = 10{,}06 \text{ см/с}^2.$$

Колеса 3 и 4 находятся в зацеплении внутренними радиусами, и скорость в этой точке одинакова для обеих колес, из этого условия найдем ω_4 и ε_4 колеса 4:

$$v = \omega_3 r_3 = \omega_4 r_4 \Rightarrow \omega_4 = \frac{\omega_3 r_3}{r_4} = \frac{1{,}5 \cdot 4}{5} = 1{,}2 \text{ с}^{-1},$$

взяв производную слева и справа, получаем угловое ускорение колеса 4

$$\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = \frac{\dot{\omega}_3 r_3}{r_4} = \frac{1{,}125 \cdot 4}{5} = 0{,}9 \text{ с}^{-2}.$$

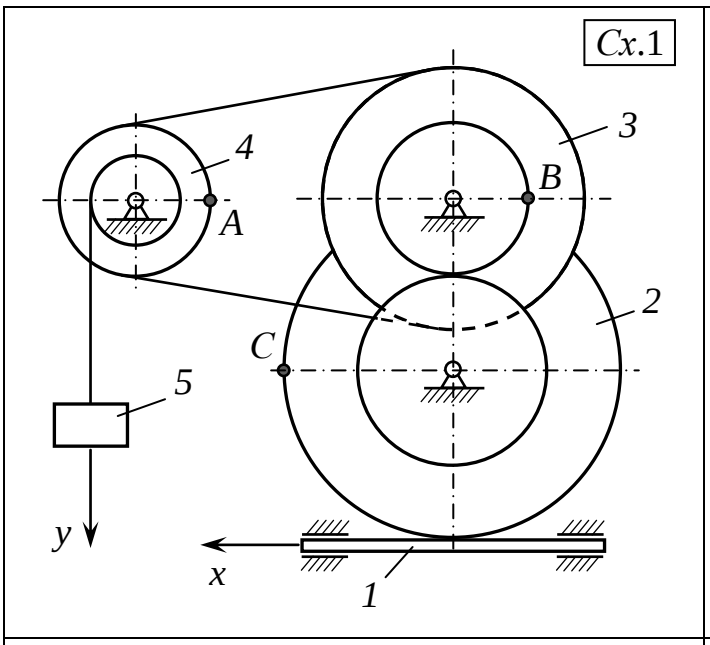
Показываем на рисунке направления для найденных ω_4 и ε_4.

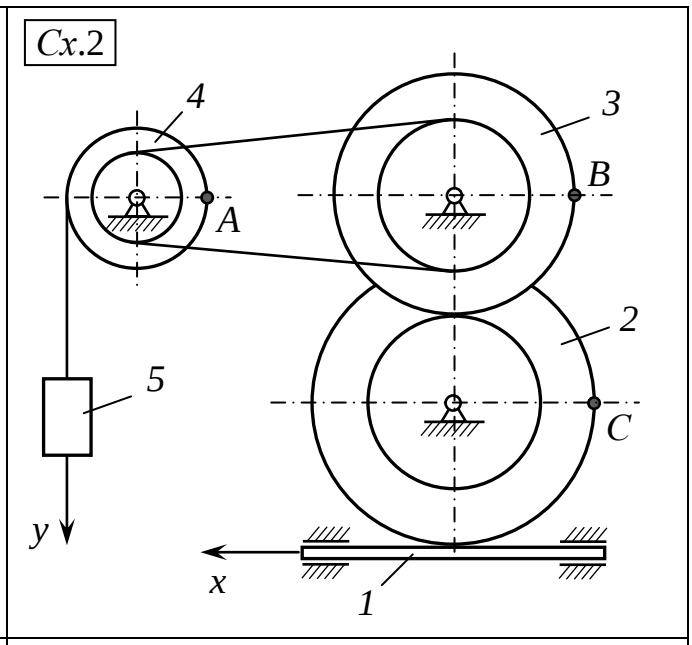
Скорость в точке *C* колеса 4: $v_C = \omega_4 R_4 = 1{,}2 \cdot 10 = 12$ см/с.

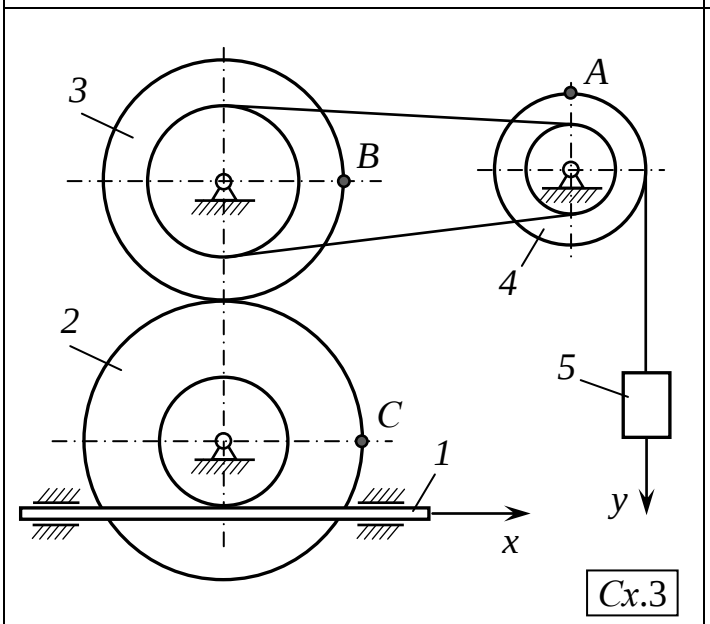
Вследствие отсутствия проскальзывания между внешним ободом колеса 4 и рейкой 1, касательное ускорение точки обода передается рейке:

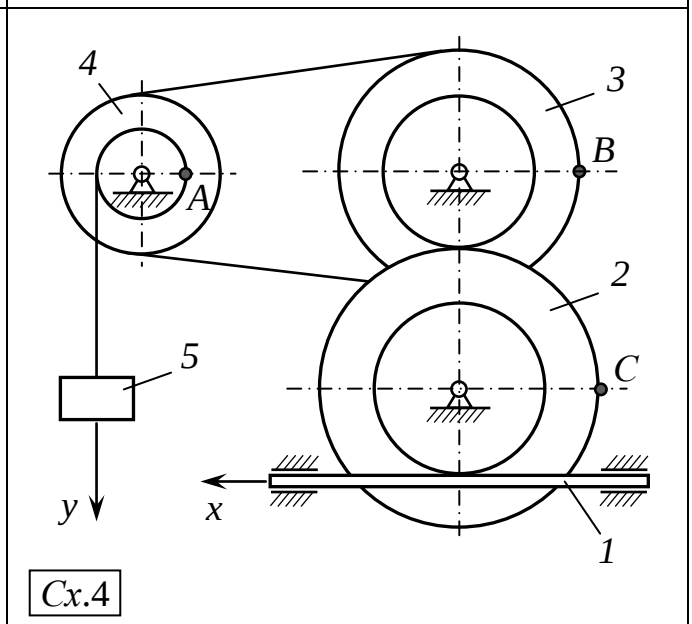
$a_1 = \varepsilon_4 R_4 = 0{,}9 \cdot 10 = 9$ см/с^2.

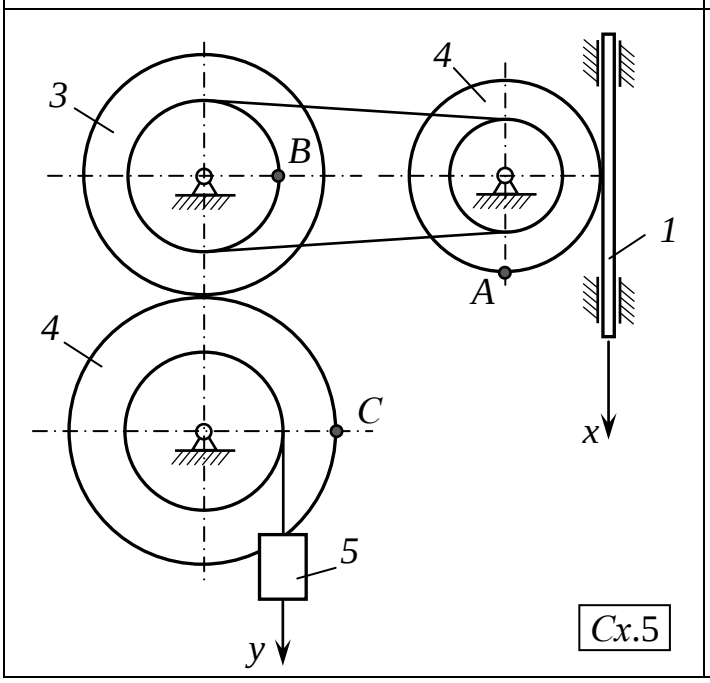
Ответ: при $t = 4$ с, имеем: $v_5 = 24$ см/с, $\omega_3 = 1{,}5$ с$^{-1}$, $\varepsilon_3 = 1{,}125$ с$^{-1}$, $a_B = 10{,}06$ см/с^2, $v_C = 12$ см/с, $a_1 = 9$ см/с^2.

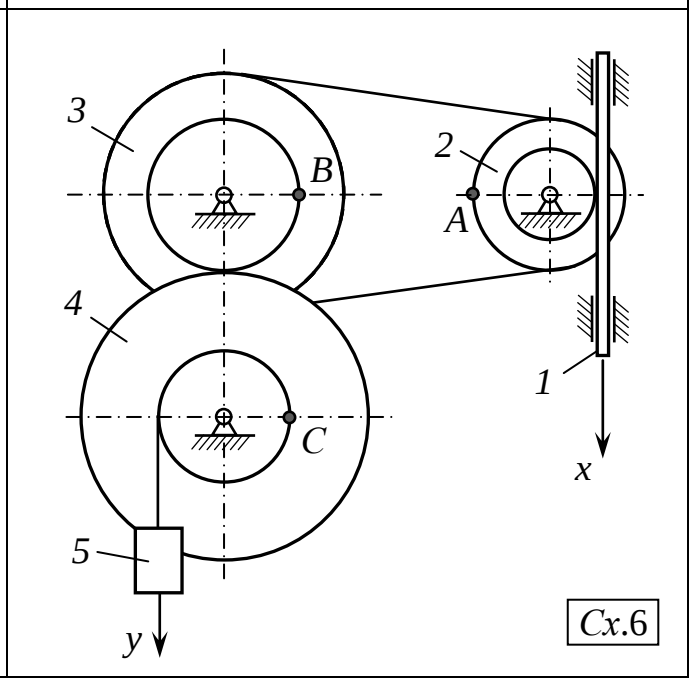

Cx.1
4
3
A
B
2
C
5
y
x
1

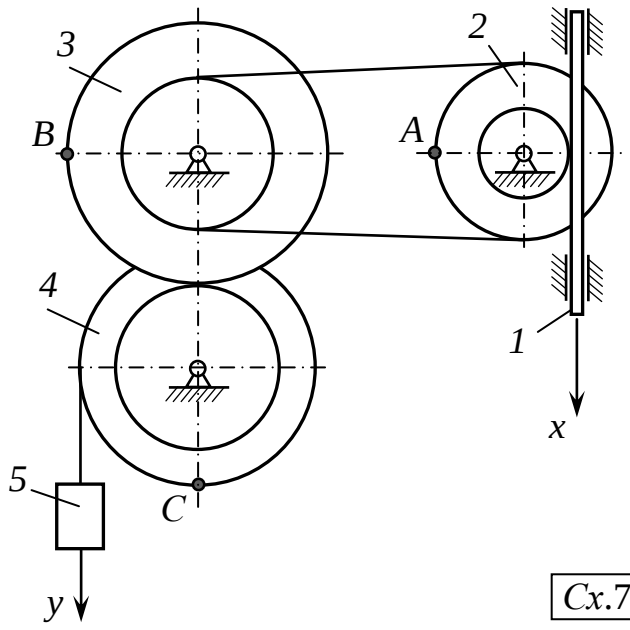

Cx.2
4
3
A
B
2
5
C
y
x
1


3
A
B
4
2
5
C
1
y
x
Cx.3

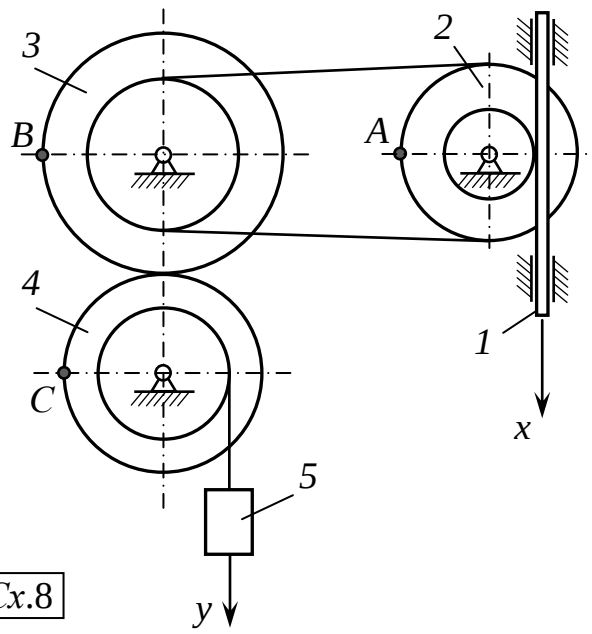

4
3
B
A
2
5
C
y
x
1
Cx.4


3
4
B
1
A
4
C
x
5
y
Cx.5


3
2
B
A
4
1
C
x
5
y
Cx.6

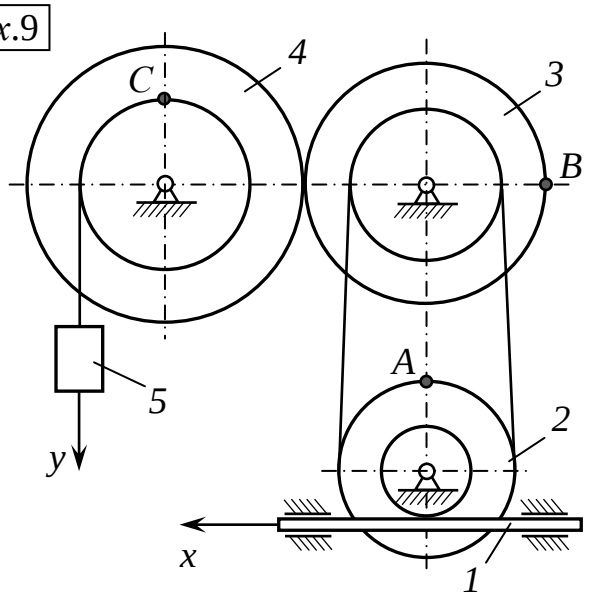


Cx.7

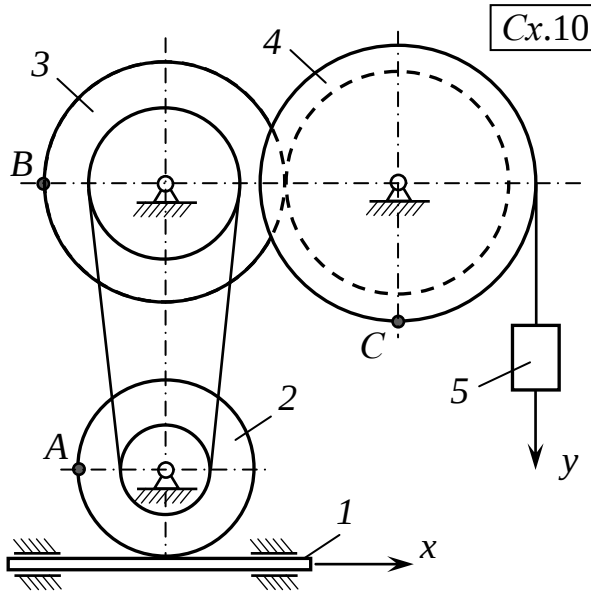


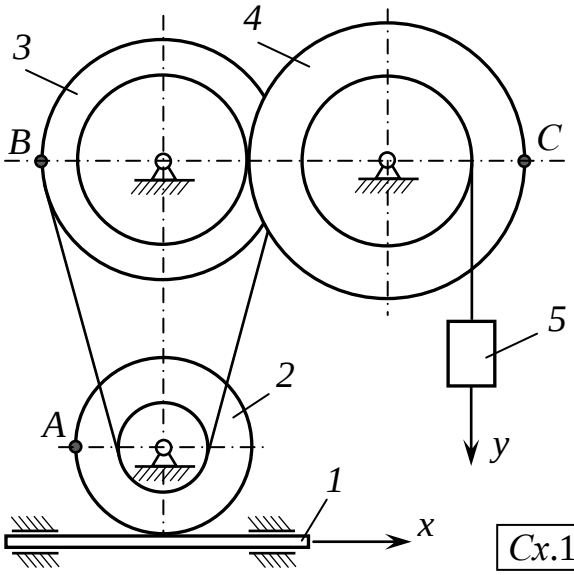
Cx.8

Cx.9

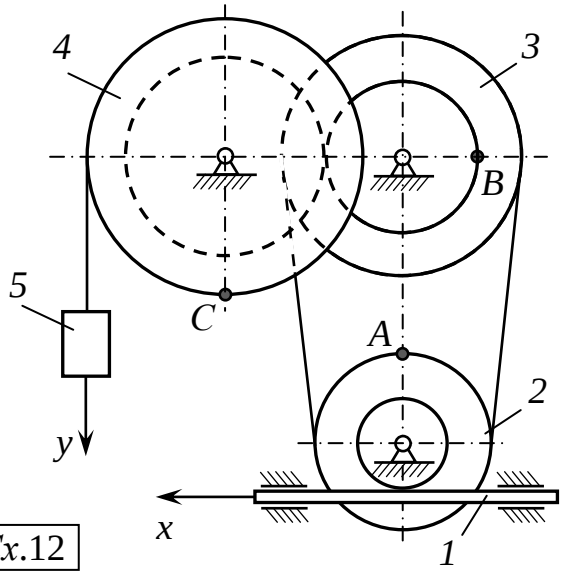


Cx.10

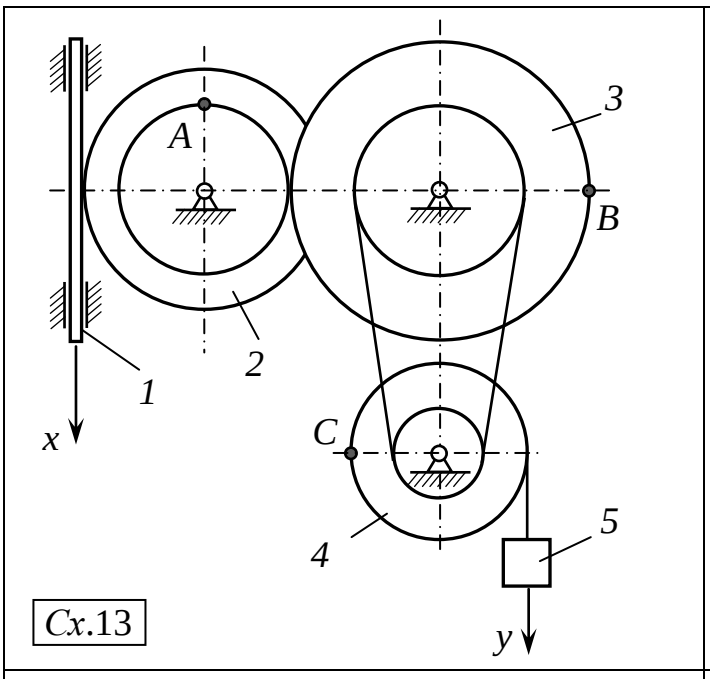




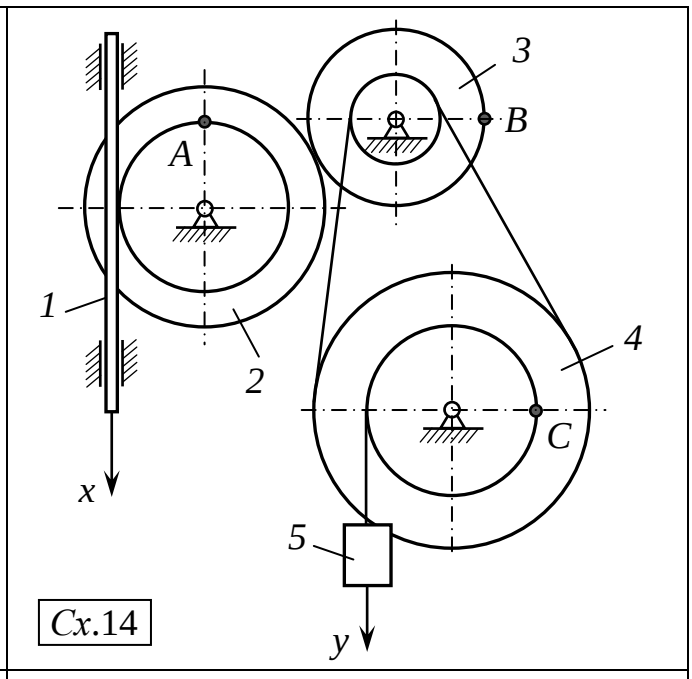
Cx.11



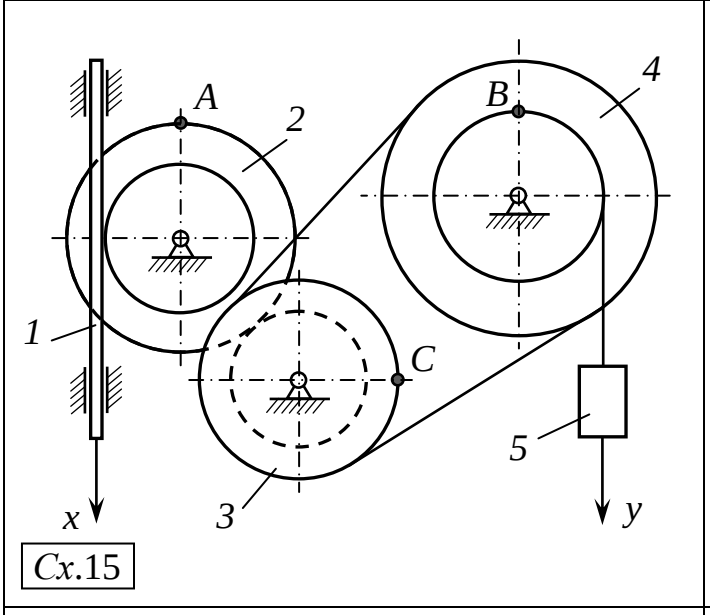
Cx.12



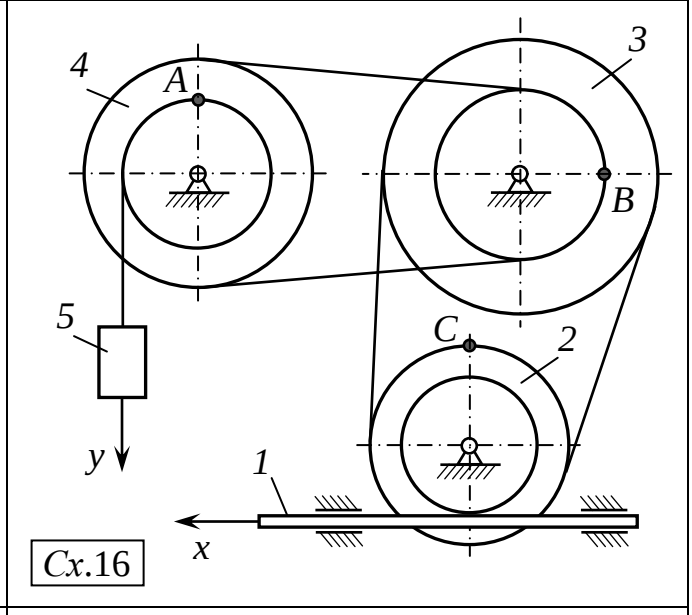
Cx.13



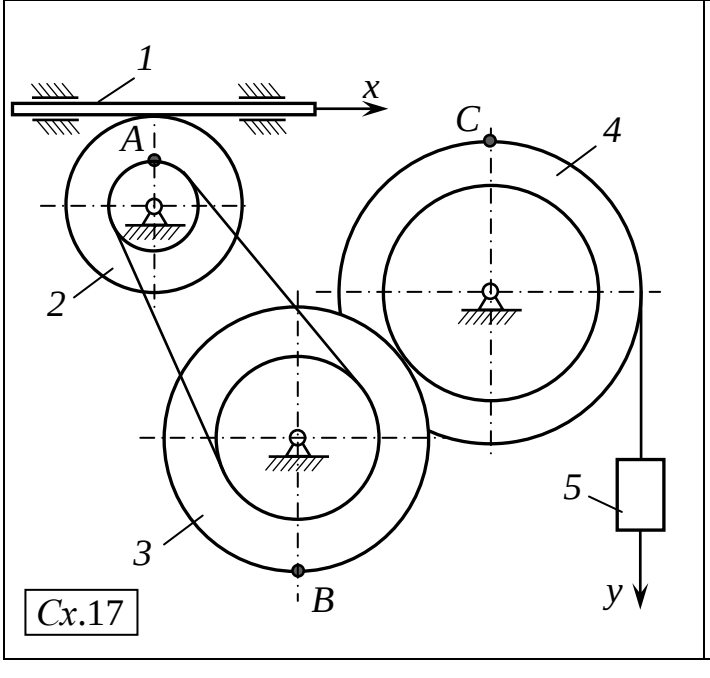
Cx.14



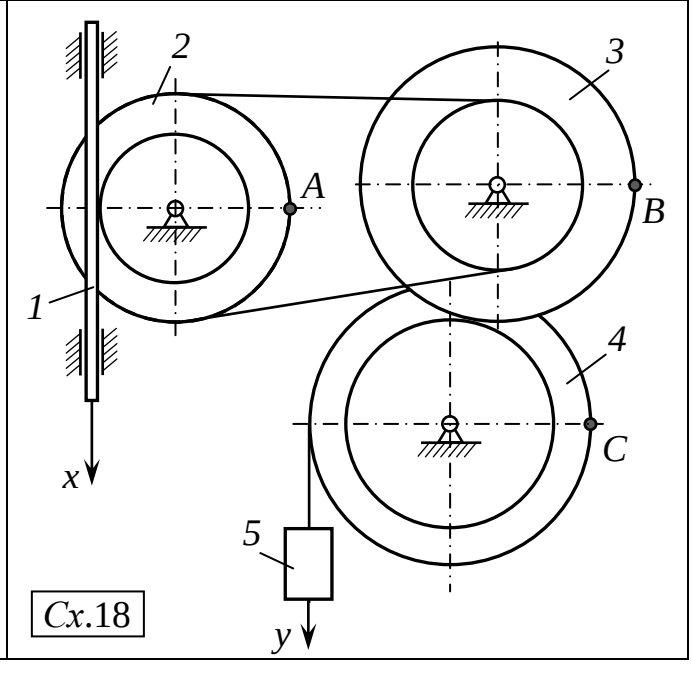
Cx.15



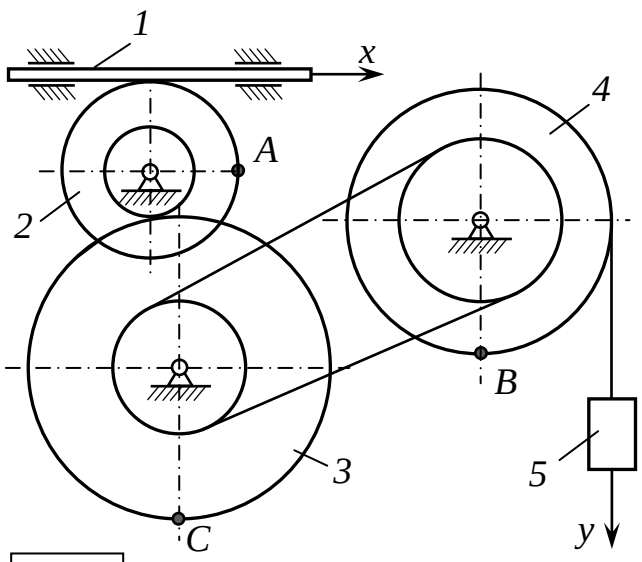
Cx.16



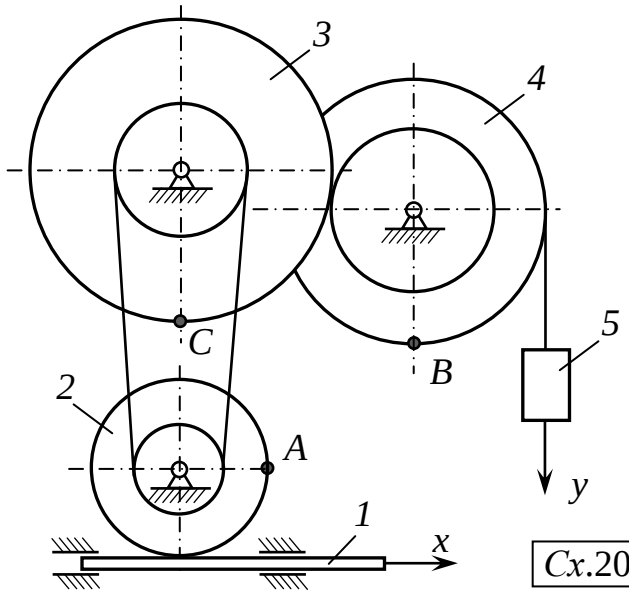
Cx.17



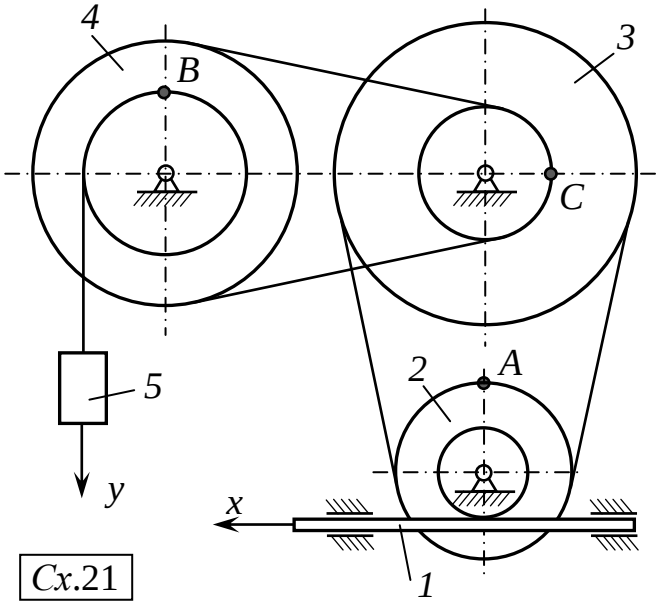
Cx.18



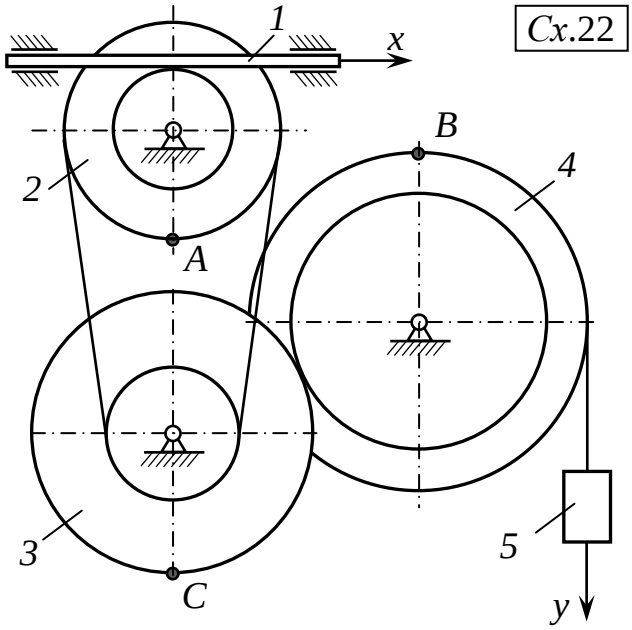
Cx.19



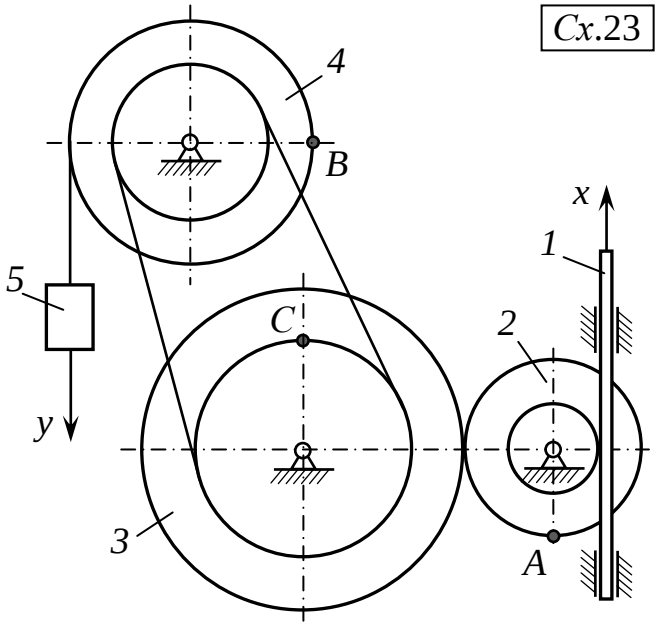
Cx.20



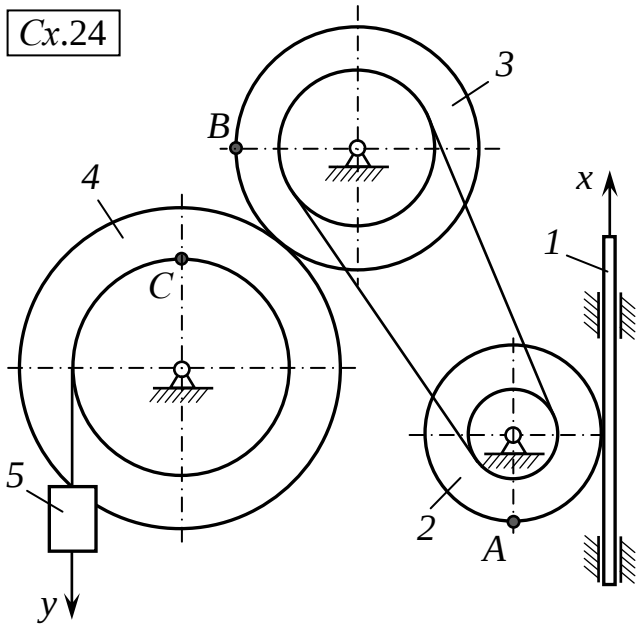
Cx.21



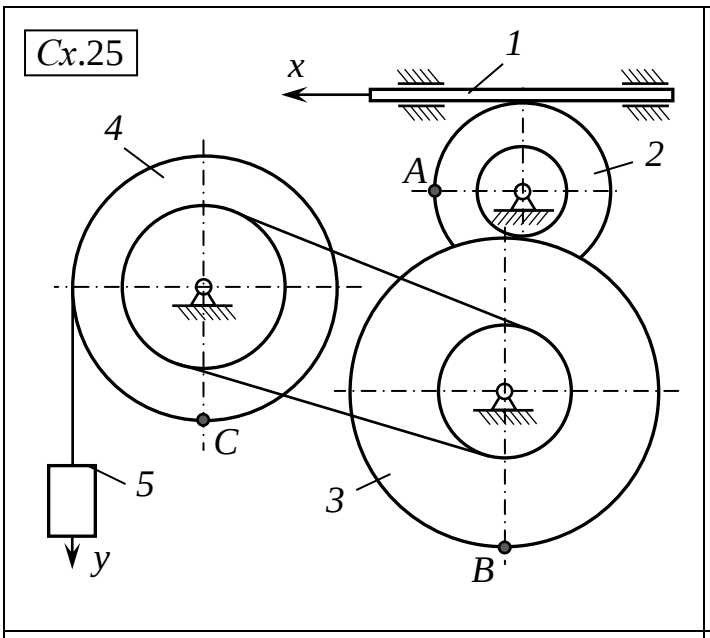
Cx.22

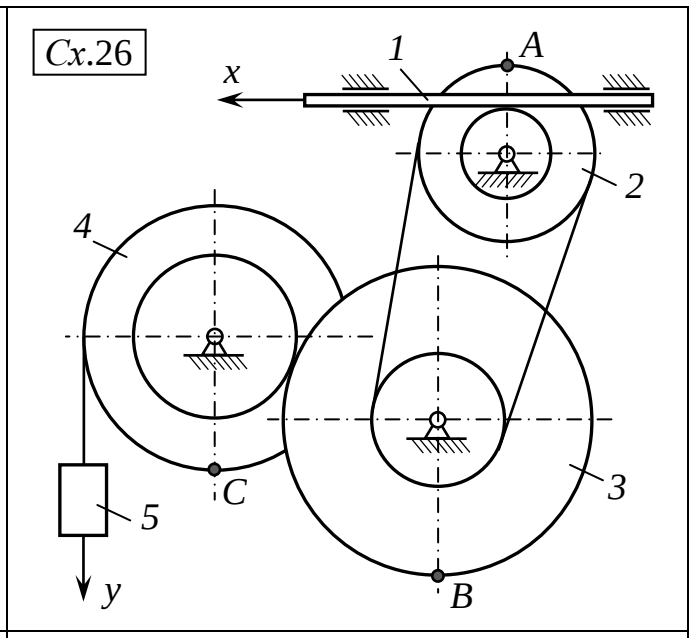


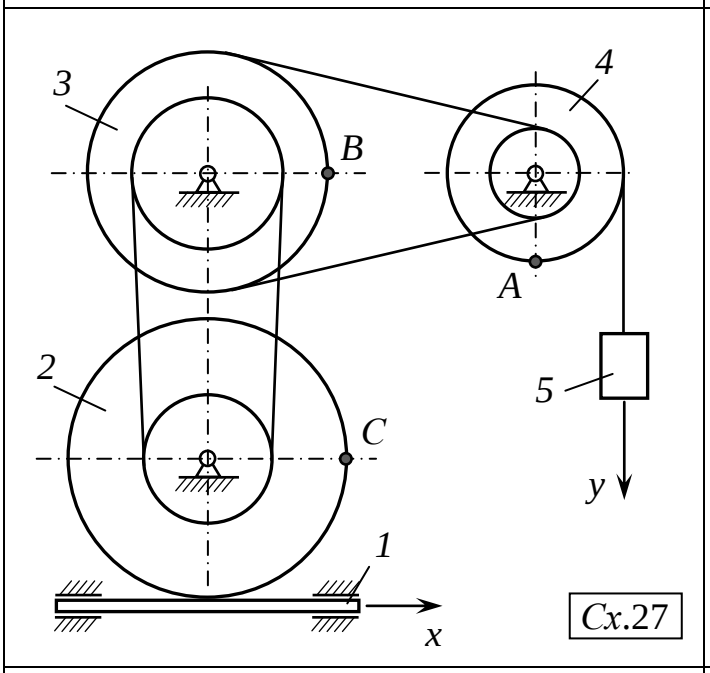
Cx.23

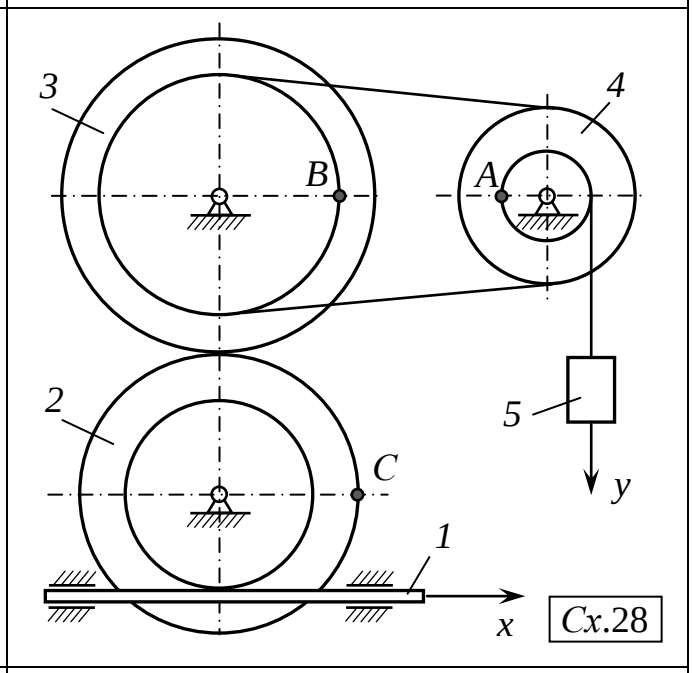


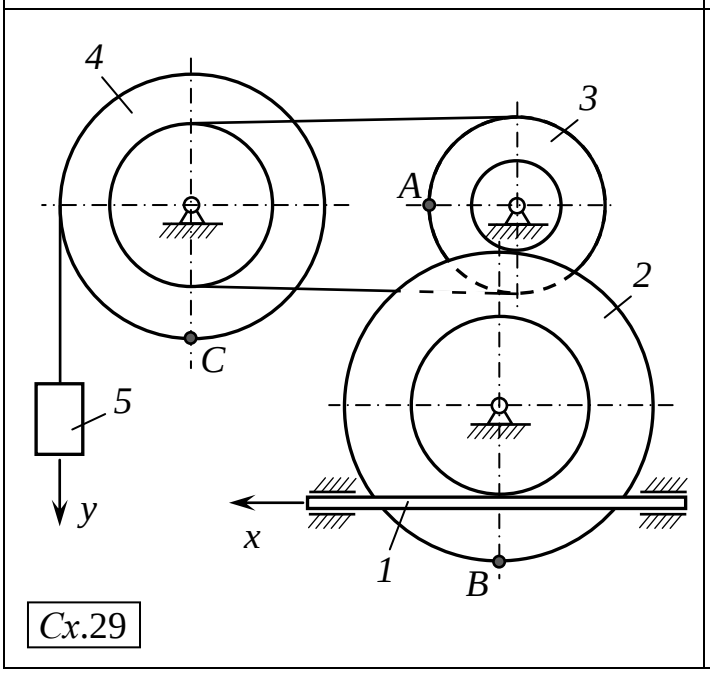
Cx.24

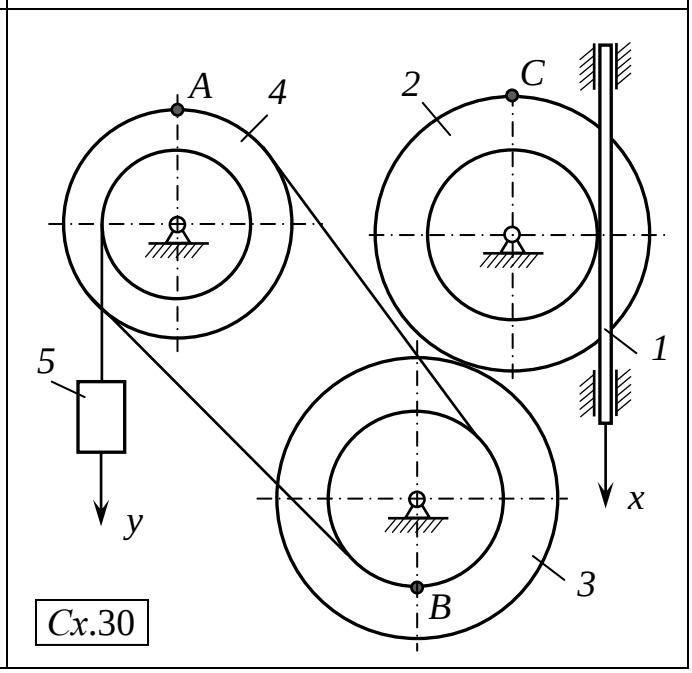

Cx.25
x
1
4
A
2
C
5
3
y
B


Cx.26
x
1
A
2
4
C
5
3
y
B


3
4
B
A
2
5
C
y
1
x
Cx.27


3
4
B
A
2
5
C
y
1
x
Cx.28


4
3
A
2
C
5
y
x
1
B
Cx.29


A
4
2
C
1
5
y
x
3
B
Cx.30

Задание № 5 (К3)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВРДОГО ТЕЛА

Цель работы: Научиться решать задачи кинематики плоского (плоскопараллельного) движения твердого тела.

Для выполнения задания необходимо знать теории поступательного и вращательного движения твердого тела и изучить раздел плоского движения по рекомендованной литературе:

[1] §52, 54-58;
[2] § 85-88, 90, 91, 96, 99, 100;
[3] глава VI §1, 2, 4.

Вопросник-минимум для защиты задания №5 (К3):

1. Какое движения твердого тела называется плоскопараллельным? Почему плоскопараллельное движение называют плоским?
2. Разложите плоское движение на поступательное движение с полюсом и вращение вокруг полюса. Написать уравнения плоского движения.
3. Как определить скорость любой точки плоской фигуры через скорость полюса и скорость этой точки при вращении плоской фигуры вокруг полюса (теорема о сожжении скоростей)?
4. Доказать теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки.
5. Какая точка плоской фигуры называется мгновенным центром скоростей (обозначим ее P) и способы его нахождение.
6. Если положение точки P и угловая скорость известны, то как определить скорость любой плоской фигуры?
7. Как определить ускорение любой точки плоской фигуры через ускорение полюса ускорение этой точки при вращении плоской фигуры вокруг полюса (теорема о сложении ускорений)?
8. Как определить угловую скорость плоской фигуры, если известны скорость точки и расположение мгновенного центра скоростей?
9. На какие составляющие раскладывается ускорение точки при вращении плоской фигуры вокруг полюса?
10. Как определить ускорение любой точки плоской фигуры, если известно ускорение полюса, расстояние этой точки до полюса и уравнение поского движения?

Постановка задачи. Плоский механизм в варрантах 1 ÷ 14 состоит из стержней (звеньев) и ползуна, соединенных между собой шарнирами и с неподвижными шарнирными опорами O_1 и O_2. Все элементы механизма перемещаются в плоскости чертежа. Длины стержней равны соответственно l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 0,6 м, l_4 = 0,5 м. Положения звеньев механизма для

рассматриваемого момента времени определяются углами α, β, γ, θ, измеряемыми в градусах. Значения углов определяются по таблице 5.1. Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки. При этом направляющие ползунов должны оставаться параллельными своим исходным положениям. Построение механизма следует начинать со стержня, направление которого определяется углом α, т.е. с шарнирной опоры O_1. Примем, что первое звено O_1A вращается вокруг оси, проходящей через точку O_1 против хода часовой стрелки, и имеет в данный момент времени угловую скорость ω_1 = 1 рад/с и угловое ускорение ε_1 = 2 рад/с^2. Требуется определить скорости точек *A*, *B*, *D*, *E*, угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 второго звена *AB*, а также ускорение точки *B*.

В вариантах 15 ÷ 28 представлены системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных между собой нерастяжимыми нитями или стержнями. Тело 3 движется поступательно и имеет в данный момент времени скорость v = 2 м/с и ускорение a = 1 м/с^2. Радиусы блоков и колес, измеряемые в метрах, заданы в таблице 5.1.

Требуется найти скорости точек *A*, *B*, *C*, *D* тела, совершающего плоскопараллельное движение, и ускорение указанной в таблице точки этого тела. В вариантах 18, 25, 26 данные радиусов R_2 указаны в таблицах.

Таблица 5.1

Исходные данные к заданию К3

№ п/п	Варианты 1 ÷ 14				Варианты 15 ÷ 28			
	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г
	α	β	γ	θ	R_1 (м)	r_1 (м)	R_2 (м)	Найти *a* точки
0	0	45°	30°	45°	2	1,2	1	*A*
1	30°	30°	45°	30°	1,8	1	0,9	*B*
2	60°	60°	60°	60°	2,4	0,9	1,2	*C*
3	0	45°	30°	45°	1,6	1,1	0,8	*D*
4	30°	30°	45°	30°	2,2	0,7	1,1	*A*
5	45°	60°	60°	60°	1,7	0,8	1,2	*B*
6	60°	45°	60°	30°	1,9	0,6	0,7	*C*
7	30°	30°	30°	45°	2,1	0,5	1,3	*D*
8	45°	60°	45°	60°	2,3	1,3	1,4	*A*
9	60°	30°	60°	30°	2,5	1,4	1,5	*B*

ПРИМЕР НА ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЯ К3

Пример расчета №1.

Механизм, состоящей из четырех стержней и ползуна E, показан на рис. 5.1. Длины стержней (звеньев) равны соответственно $O_1A = l_1 = 1{,}0$ м, $AB = l_2 = 1{,}6$ м, $O_2D = O_2B = l_3 = 0{,}6$ м, $DE = l_4 = 0{,}5$ м. Звено 1 вращается вокруг неподвижного центра O_1 и имеет в данный момент времени угловую скорость $\omega_1 = 2$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon_1 = 4$ рад/с^2.

Требуется: определить скорость v_A, v_B, v_D, v_E угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_2 звена AB, а также ускорение точки B.

Решение. Точка A движется вокруг центра O_1 по окружности радиуса l_1, поэтому $v_A = l_1\omega_1 = 2 м/с$; $\bar{v}_A \perp O_1A$. Поскольку точка B движется вокруг центра O_2, то скорость $\bar{v}_B \perp O_1A$. Для определения скорости $\bar{v}_B$ воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек A и B звена 2 на ось, проходящую через эти точки. Проекции скоростей должны иметь одинаковые значения, поэтому направление $\bar{v}_B$ должно быть таким, как это показано на рисунке 5.1.

$$v_A \cdot \cos 60° = v_B \cdot \cos 30°, \qquad (5.1)$$

отсюда найдем $v_B = v_A \cos 60° / \cos 30° = 2/\sqrt{3} = 1{,}155$ м/с.

Найдем скорость точки D звена 3 вращающегося вокруг O_2:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BO_2} = \frac{v_D}{DO_2}, \text{ отсюда } v_D = v_B \cdot DO_2 / BO_2 = 1{,}155 \text{ м/с}. \qquad (5.2)$$

Тогда из (5.2) угловая скорость звена 3: $\omega_3 = v_B / BO_2 = 1{,}925$ с$^{-1}$.

Проекции скоростей D и E на прямую DE должны быть одинаковыми.

$$v_D \cos 0° = v_E \cos 45°, \qquad (5.3)$$

отсюда $v_E = v_D / \cos 45° = 1{,}633$ м/с.

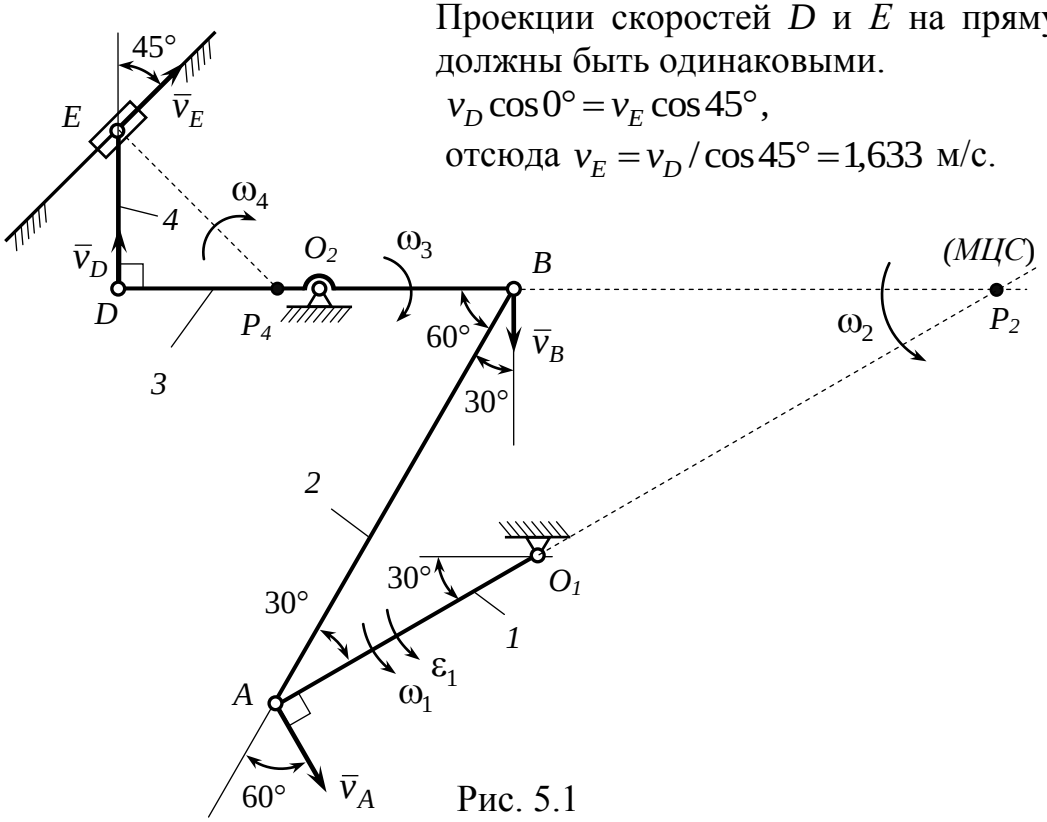


Рис. 5.1

Скорость точки B можно также определить используя мгновенный центр скоростей (МЦС). Положение МЦС звена 2 находится в точке пересечения перпендикуляров к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ (точка P_2). Мгновенная угловая скорость ω_2 звена 2:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{v_B}{BP_2}. \qquad (5.4)$$

Из этого соотношения (5.4) вычислим ω_2 учитывая, что треугольник ABP_2 – равнобедренный, в котором $AB = BP_2$

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{v_A}{2l_2\cos 30°} = \frac{2}{2\cdot 1{,}6\cdot\sqrt{3}/2} = 0{,}722 \text{ с}^{-1}. \qquad (5.5)$$

Тогда из (5.4) легко найти скорость точки B:

$$v_B = BP_2\cdot\omega_2 = 1{,}155 \text{ м/с}.$$

Аналогично находятся положение МЦС звена 4 (точка P_4). Угловая скорость звена 4 связана соотношением:

$$\omega_4 = \frac{v_D}{DP_4} = \frac{v_E}{EP_2}. \qquad (5.6)$$

Отсюда: $\omega_4 = \dfrac{v_D}{DP_4} = \dfrac{1{,}155}{0{,}5} = 2{,}309 \text{ с}^{-1}$; $v_E = \omega_4\cdot EP_2 = 2{,}309\cdot 0{,}5\sqrt{2} = 1{,}633$ м/с.

Определим числовые значения касательной и нормальной составляющих ускорения точки A (рис. 5.2):

$$a_A^\tau = l_1\varepsilon_1 = 4 \text{ м/с}^2, \quad a_A^n = l_1\omega_1^2 = 4 \text{ м/с}^2. \qquad (5.7)$$

Для определения ускорения $\bar{a}_B$ точки B воспользуемся теоремой об ускорениях точек плоской фигуры, согласно которой

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^\tau + \bar{a}_{AB}^n. \qquad (5.8)$$

Точку A считаем полюсом, так как её ускорение известно по величине и направлению. Движение звена 2 рассматривается как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки звена 2 движутся так же, как полюс A, и из вращательного движения вокруг этого полюса. Направления и числовые значения векторов $\bar{a}_A^\tau$ и $\bar{a}_A^n$ известны. Ускорение $\bar{a}_{AB}^n$ направлено от точки B к полюсу A. Его числовое значение:

$$a_{AB}^n = AB\cdot\omega_2^2 = 1{,}6\cdot 0{,}722^2 = 0{,}833 \text{ м/с}^2.$$

Касательное ускорение $\bar{a}_{AB}^\tau$ перпендикулярно нормальному ускорению $\bar{a}_{AB}^n$, но его направление заранее установить нельзя.

Звено 3 поворачивается вокруг центра O_2, поэтому ускорение точки B определяем как принадлежащее звену 3:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n \qquad (5.9)$$

Нормальная составляющая ускорения $\bar{a}_B^n$ численно равна $a_B^n = BO_2\cdot\omega_3^2 = 2{,}223$ м/с^2 и направлена от точки B к центру O_2. Касательная составляющая ускорения $\bar{a}_B^\tau$ направлена перпендикулярно BO_2 в любую

сторону. Предположим, что ускорение $\bar{a}_B^\tau$ направлено так, как показано на рисунке 5.2. Подставляя выражение (5.9) в (5.8) получим:

$$\bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^\tau + \bar{a}_{AB}^n. \qquad (5.10)$$

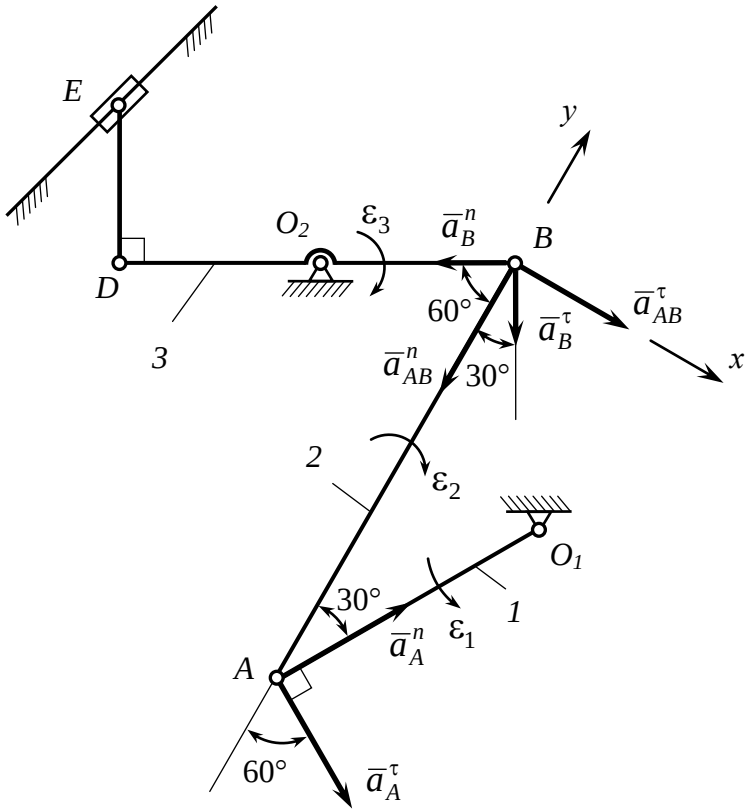


Рис. 5.2

Спроецировав это векторное равенство (5.10) на оси y и x, найдем соответственно a_B^τ и a_{AB}^τ:

$$-a_B^\tau \cos 30° - a_B^n \cos 60° = -a_A^\tau \cos 60° + a_A^n \cos 30° - a_{AB}^n, \quad \Rightarrow \quad a_B^\tau = -2{,}012 \text{ м/с}^2.$$

$$a_B^\tau \sin 30° - a_B^n \sin 60° = a_A^\tau \sin 60° + a_A^n \sin 30° + a_{AB}^\tau, \quad \Rightarrow \quad a_{AB}^\tau = -8{,}396 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус говорит о том, что первоначально выбранные направления векторов $\bar{a}_B^\tau$ и $\bar{a}_{AB}^\tau$ следует сменить на противоположные.

Найдем модуль углового ускорения звена 2: $\varepsilon_2 = \dfrac{\left|\bar{a}_{AB}^\tau\right|}{AB} = 5{,}248 \text{ с}^{-2}$;

Модуль ускорения точки B: $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = 2{,}998 \text{ м/с}^2$.

Ответ: $v_A = 2$ м/с; $v_B = 1{,}155$ м/с; $v_D = 1{,}155$ м/с; $v_E = 1{,}633$ м/с;
$\omega_2 = 0{,}722$ с$^{-1}$; $\varepsilon_{AB} = 5{,}248$ с$^{-2}$; $a_B = 2{,}998$ м/с^2.

<u>Примечание:</u> Если точка B, ускорение которой определяется, движется прямолинейно, как, например, в вариантах 2, 4, 8 и др., то ускорение $\bar{a}_B$ по формуле (5.9) на составляющие не нужно. Ускорение $\bar{a}_B$ направлено вдоль оси, по которой движется ползун.

Пример расчета №2.

Подвешенный на нити груз 3, опускаясь в данный момент времени со скоростью v = 2 м/с и ускорением a = 4 м/с^2, приводит во вращение барабан 1, радиуса R_1 = 1,2 м, и посредством нити, перекинутой через барабан, поднимает блок 2, радиуса R_2 = 0,6 м (рис. 5.3).

Определить скорость и ускорение тела 4, подвешенного на нити, перекинутой через блок 2, угловые скорости барабана 1 и блока 2, а также скорость и ускорение точки D блока.

Решение. Угловая скорость барабана $\omega_1 = v / R_1 = 1{,}67$ с$^{-1}$. Блок совершает плоскопараллельное движение. Поскольку ось блока соединена нерастяжимой нитью с грузом 3 она движется прямолинейно, её скорость $v_{O_2} = v = 2$ м/с и ускорение $a_{O_2} = a = 4$ м/с^2. Точка P является мгновенным центром скоростей блока 2, поскольку участок нити, находящейся справа от блока, неподвижен, угловая скорость блока:

$$\omega_2 = v / PO_2 = 3{,}33 \text{ с}^{-1}.$$

Скорость тела 4 равна скорость точки C:

$$v_4 = v_C = PC \cdot \omega_2 = 4 \text{ м/с}.$$

Определим скорость точки D блока:

$$v_D = PD \cdot \omega_2 = R_2\sqrt{2} \cdot \omega_2 = 2{,}83 \text{ м/с}.$$

Найдем угловое ускорение блока:

$$\varepsilon_2 = \left|\frac{d\omega_2}{dt}\right| = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{PO_2}\right) = \frac{1}{PO_2} \cdot \left|\frac{dv}{dt}\right| = \frac{a_{O_2}}{PO_2} = \frac{a}{PO_2} = 6{,}67 \text{ с}^{-2}.$$

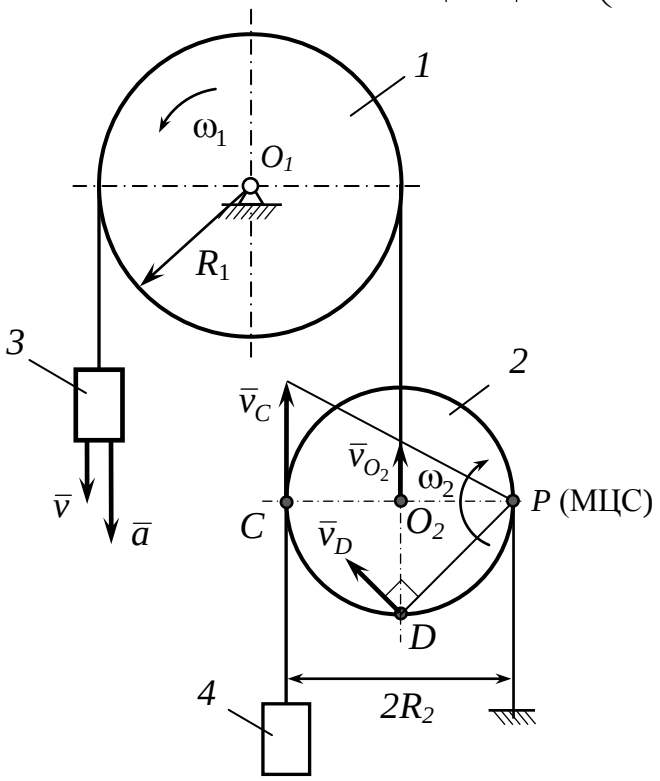


Рис. 5.3

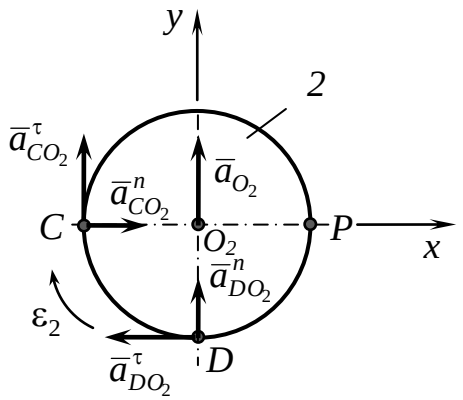


Рис. 5.4

Так как точка O_2 движется прямолинейно и её ускорение известно, то примем её за полюс. Тогда

$$\bar{a}_D = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}^{\tau}_{DO_2} + \bar{a}^{n}_{DO_2}, \qquad (5.11)$$

где $a^{\tau}_{DO_2} = DO_2 \cdot \varepsilon_2 = 4$ м/с^2, $a^{n}_{DO_2} = DO_2 \cdot \omega_2^2 = 6{,}67$ м/с^2.

Проецируя векторное уравнение (5.11) на оси O_2x и O_2y, получим:

$a_{Dx} = -a^{\tau}_{DO_2} = -4$ м/с^2, $a_{Dy} = a_{O_2} + a^{n}_{DO_2} = 10{,}67$ м/с^2.

Таким образом, модуль полного ускорения точки D:

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = 11{,}39 \text{ м/с}^2.$$

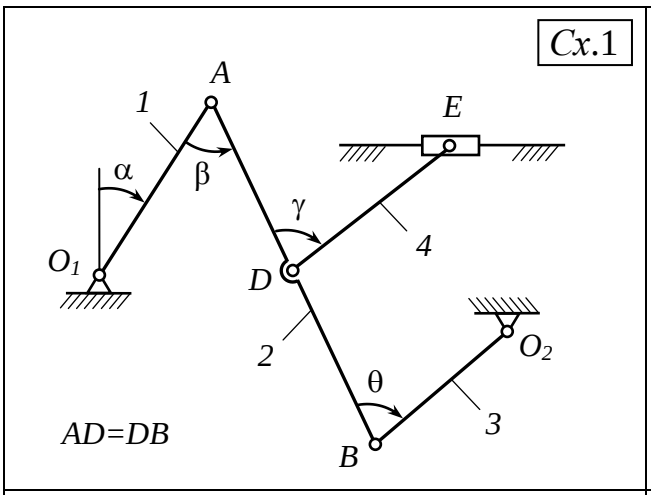
Найдем ускорение точки C, принимая точку O_2 за полюс:

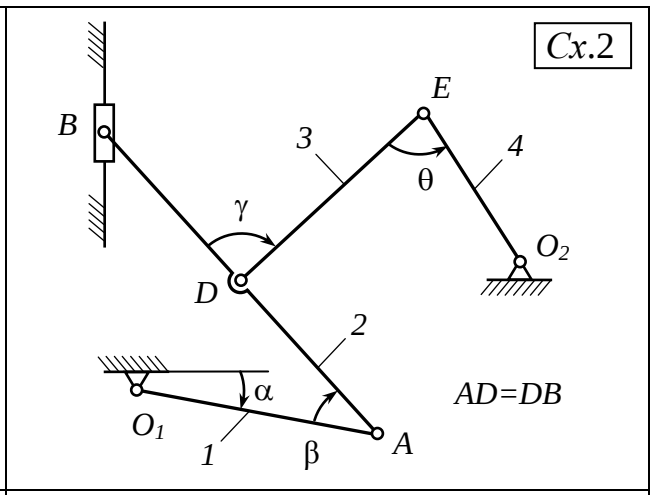
$$\bar{a}_C = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}^{\tau}_{CO_2} + \bar{a}^{n}_{CO_2}$$

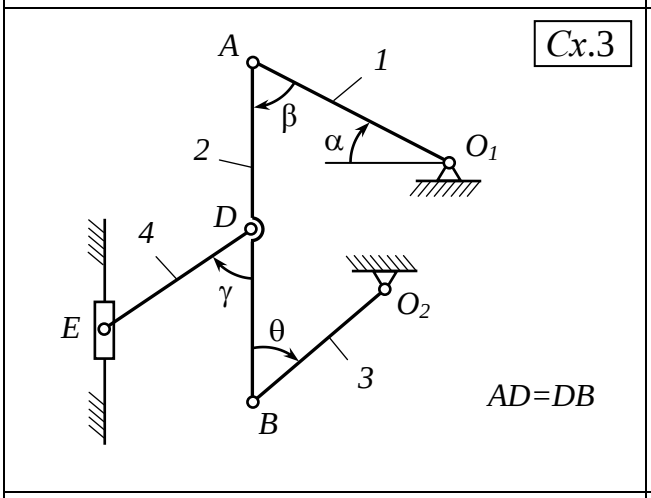
Ускорение тела 4 будет равно проекции ускорения $\bar{a}_C$ на ось O_2y:

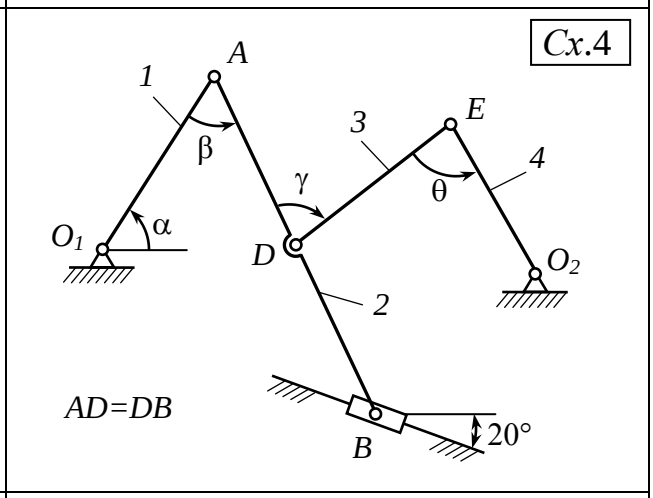
$$a_4 = a_{Cy} = a_{O_2} + a^{\tau}_{CO_2} = 4 + 4 = 8 \text{ м/с}^2, \text{ где } a^{\tau}_{CO_2} = a^{\tau}_{DO_2} = 4 \text{ м/с}^2.$$

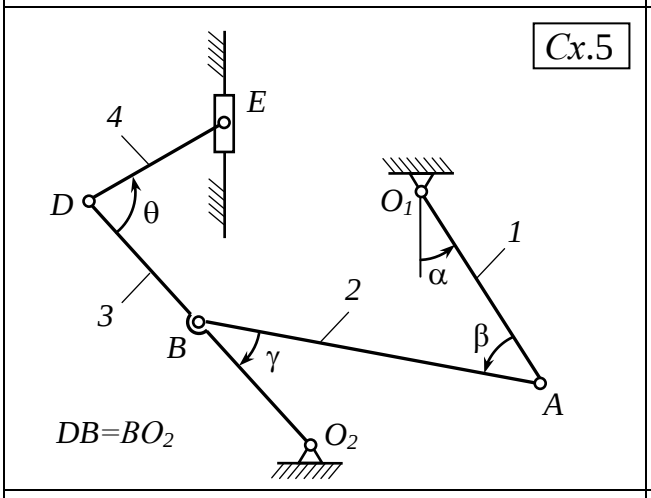
Ответ: $v_4 = 4$ м/с; $a_4 = 8$ м/с^2; $\omega_1 = 1{,}67$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 3{,}33$ с$^{-1}$;
$v_D = 2{,}83$ м/с; $a_D = 11{,}39$ м/с^2.

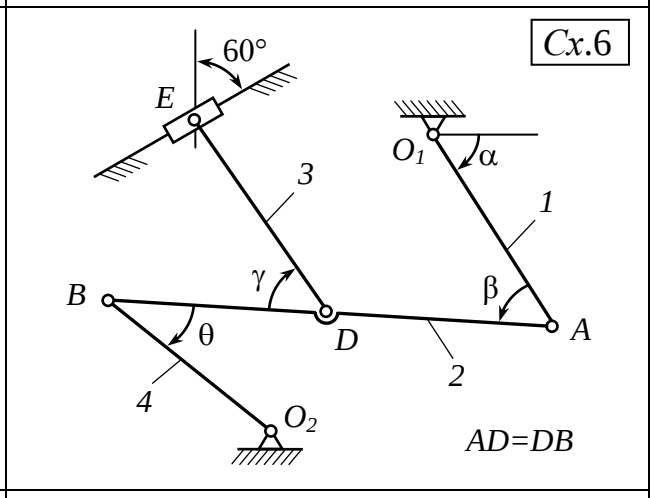

Cx.1
A
1
E
α
β
γ
4
O1
D
2
O2
θ
3
AD=DB
B

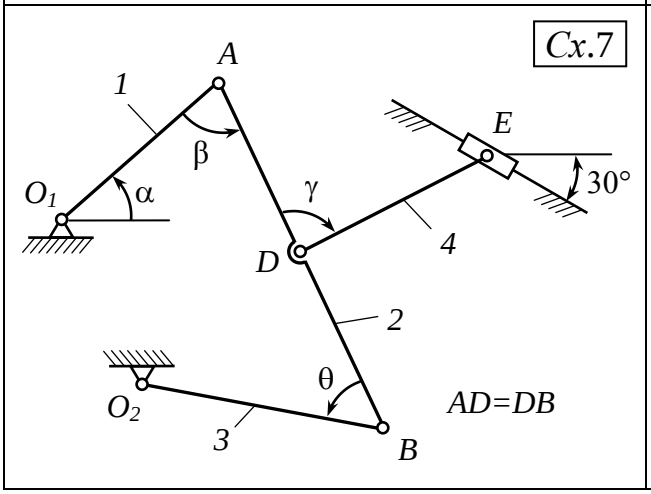

Cx.2
E
B
3
4
θ
γ
O2
D
2
α
AD=DB
O1
1
β
A

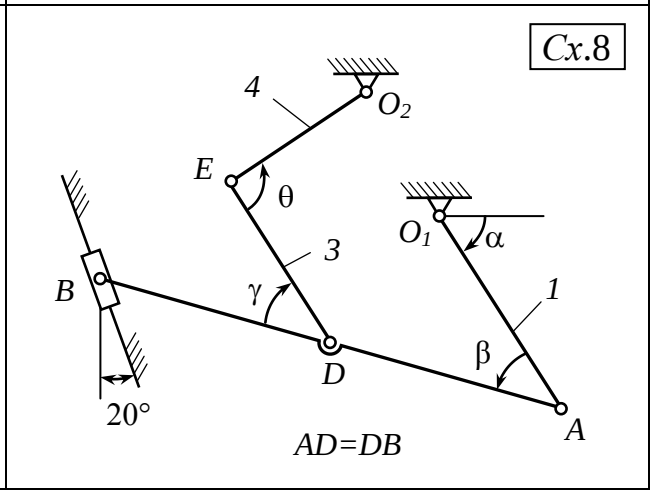

Cx.3
A
1
β
α
O1
2
D
4
γ
O2
E
θ
3
AD=DB
B

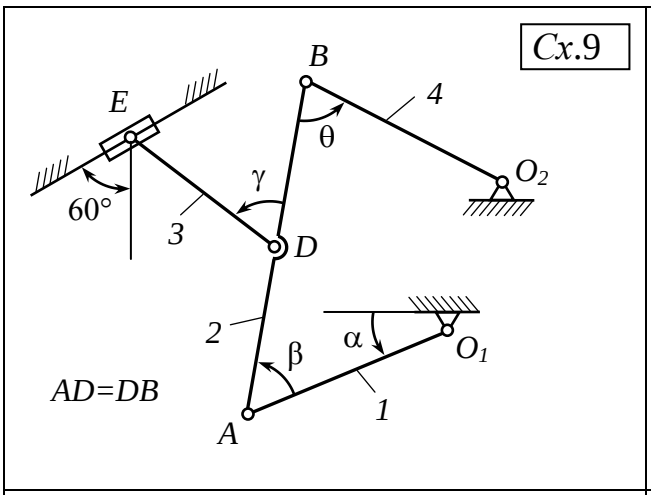

Cx.4
A
1
E
3
β
4
γ
θ
O1
α
D
O2
2
AD=DB
20°
B

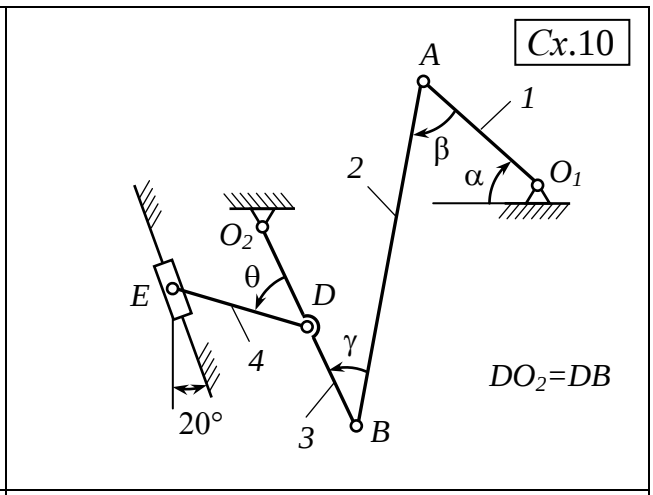

Cx.5
E
4
D
θ
O1
1
α
3
2
B
γ
β
A
DB=BO2
O2

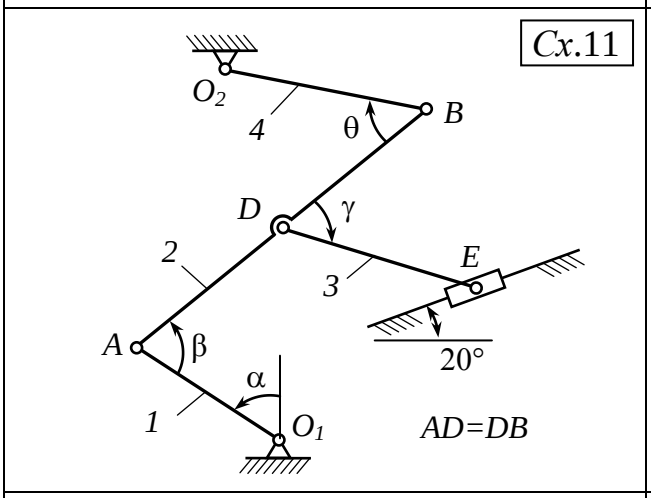

Cx.6
60°
E
O1
α
3
1
B
γ
β
θ
D
A
2
4
O2
AD=DB

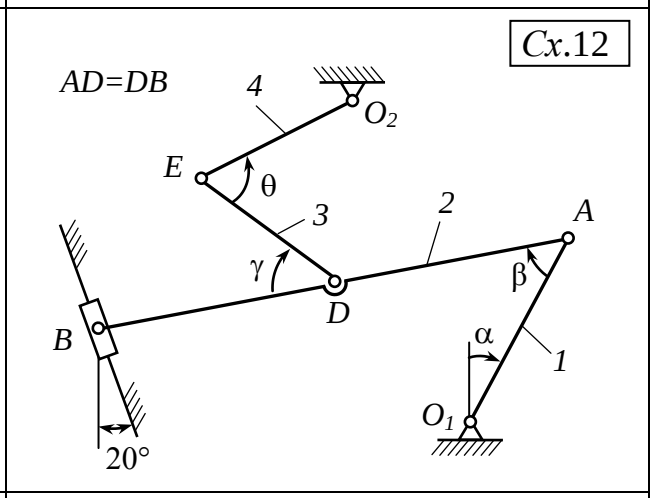

Cx.7
A
1
E
β
O1
α
γ
30°
4
D
2
θ
O2
AD=DB
3
B

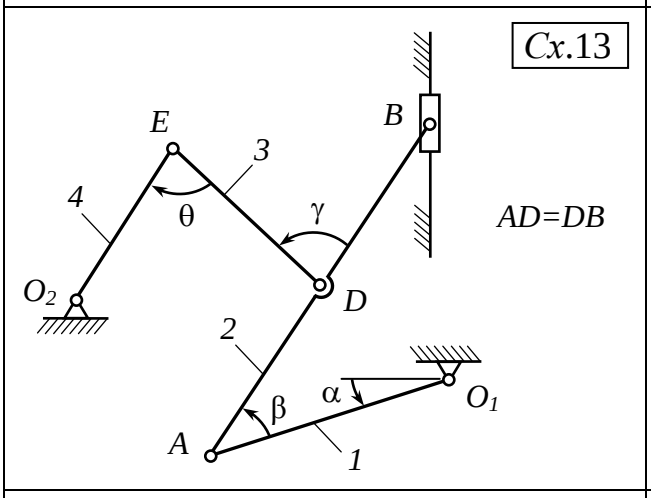

Cx.8
4
O2
E
θ
O1
α
3
B
γ
1
β
D
20°
A
AD=DB

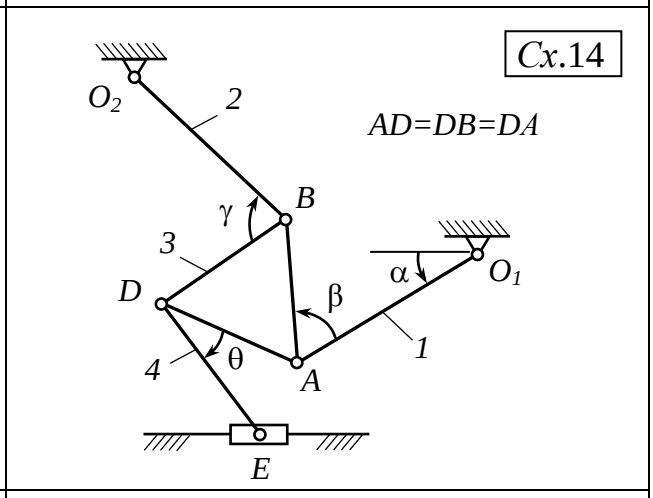

Cx.9
B
4
E
θ
O2
γ
60°
3
D
2
α
O1
β
AD=DB
1
A

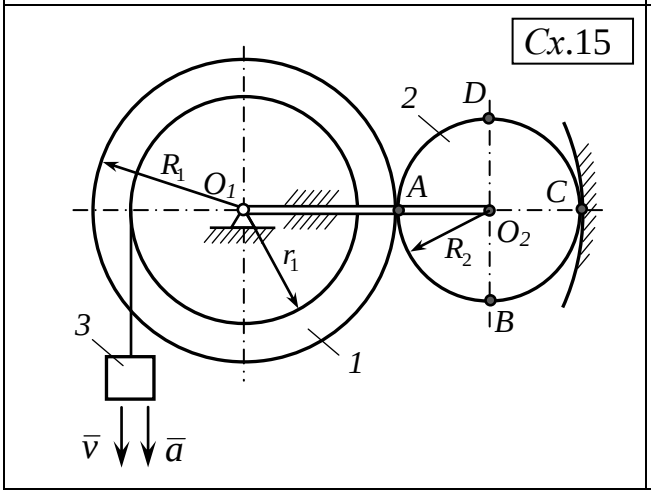

Cx.10
A
1
β
2
α
O1
O2
θ
E
D
γ
4
DO2=DB
20°
3
B

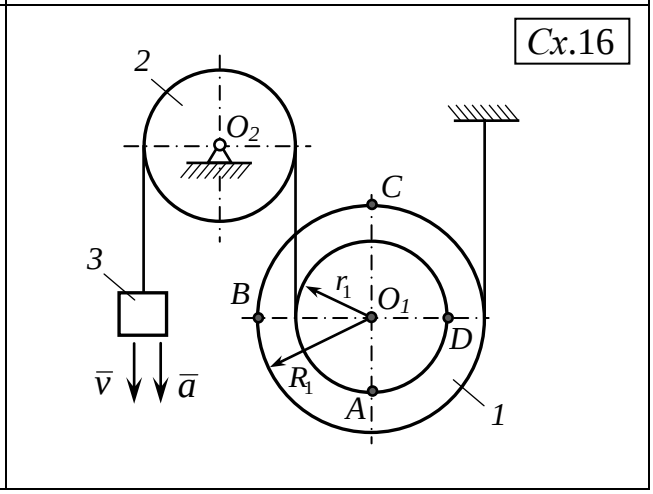

Cx.11
O2
4
θ
B
D
γ
2
E
3
A
β
20°
α
1
O1
AD=DB


Cx.12
AD=DB
4
O2
E
θ
3
2
A
γ
β
D
B
α
1
O1
20°

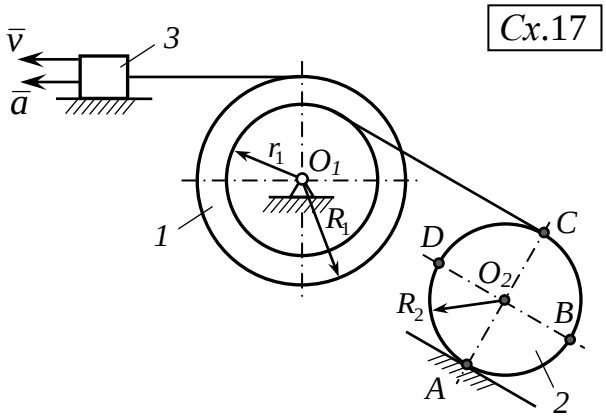

Cx.13
E
B
3
4
θ
γ
AD=DB
O2
D
2
α
O1
β
A
1


Cx.14
O2
2
AD=DB=DA
B
γ
3
α
O1
D
β
1
4
θ
A
E

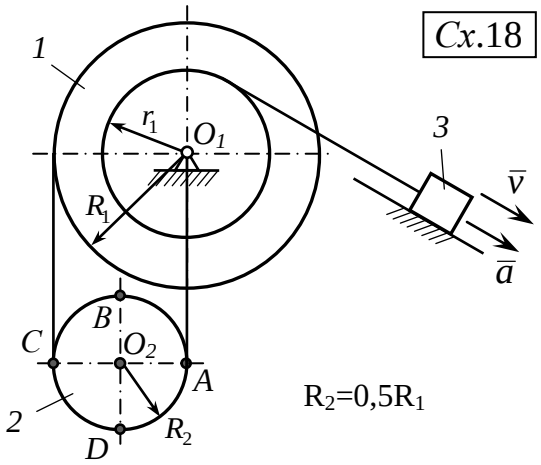

Cx.15
2
D
R1
O1
A
C
O2
R2
r1
B
3
1
v
a


Cx.16
2
O2
C
3
B
r1
O1
D
R1
A
1
v
a

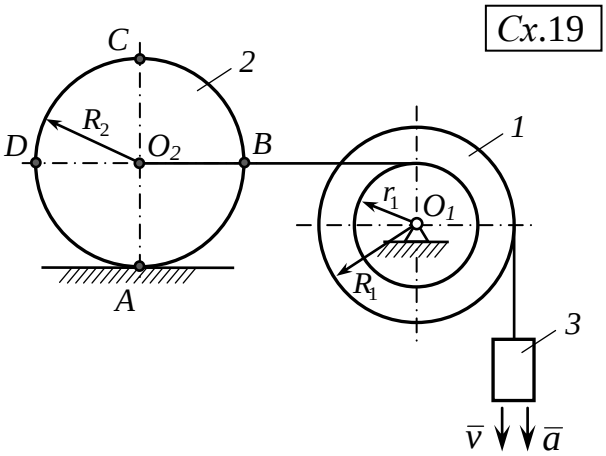
Cx.17



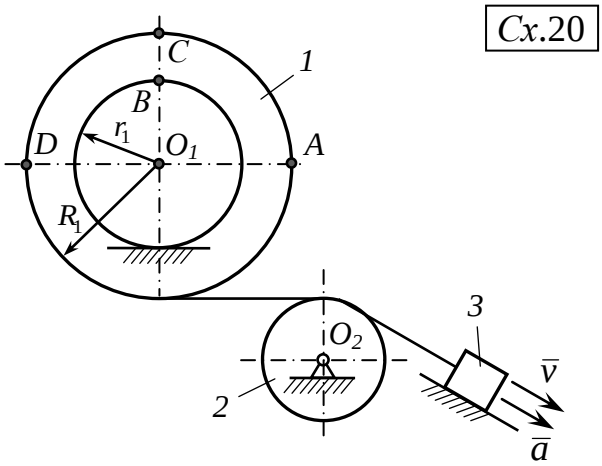
Cx.18



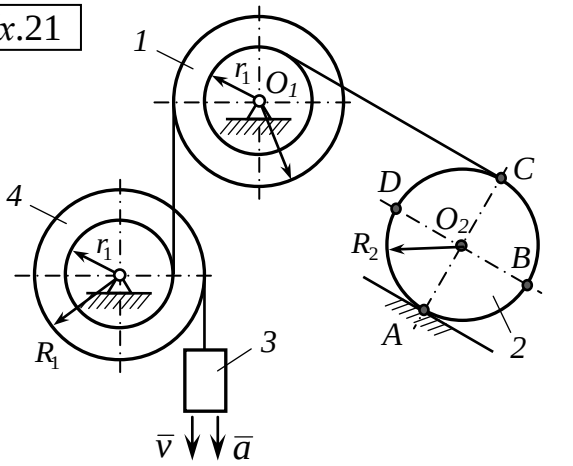
Cx.19



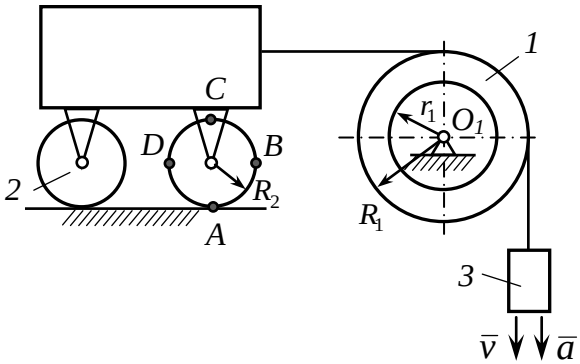
Cx.20



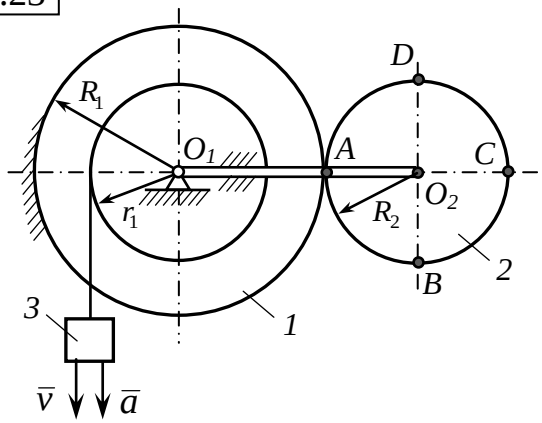
Cx.21



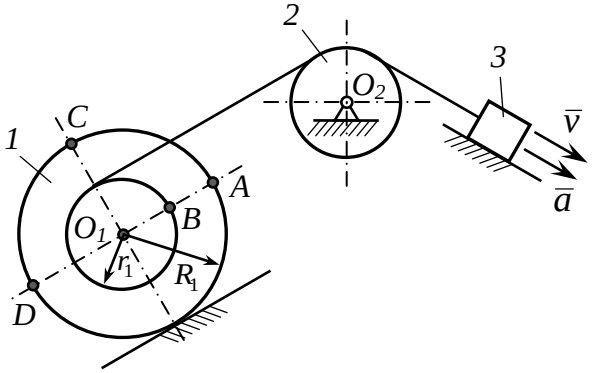
Cx.22

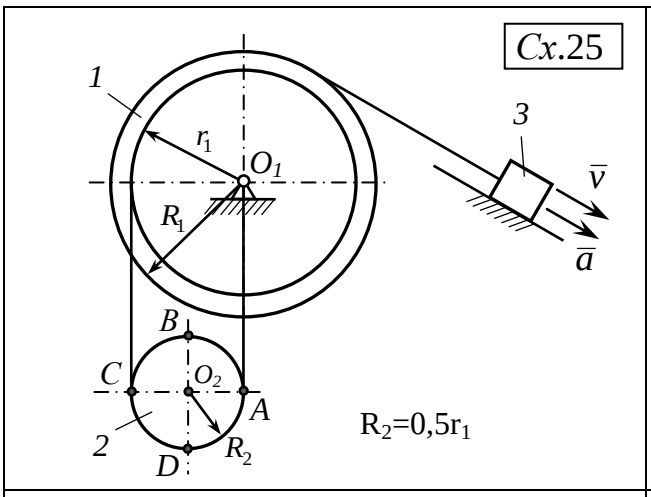


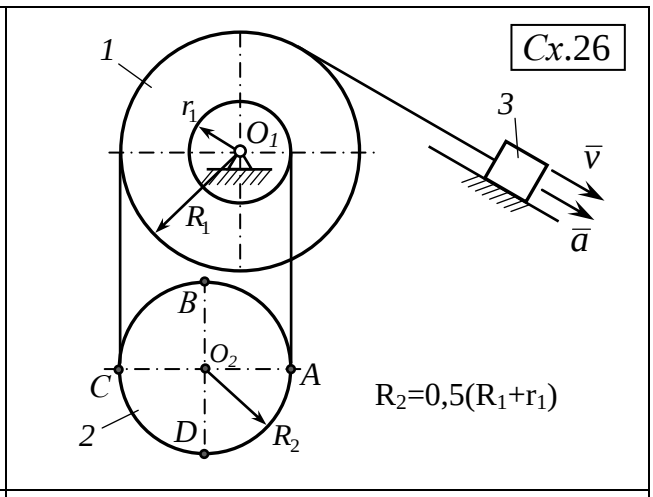
Cx.23

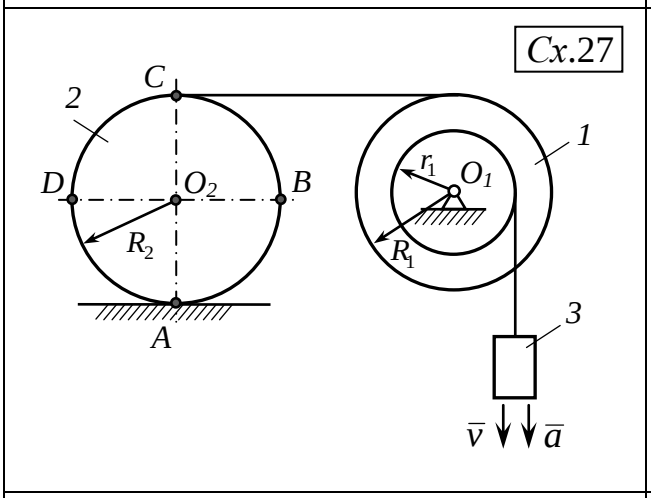


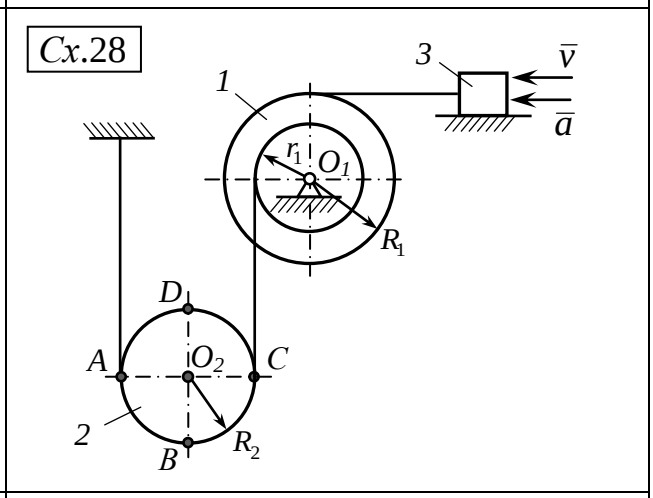
Cx.24

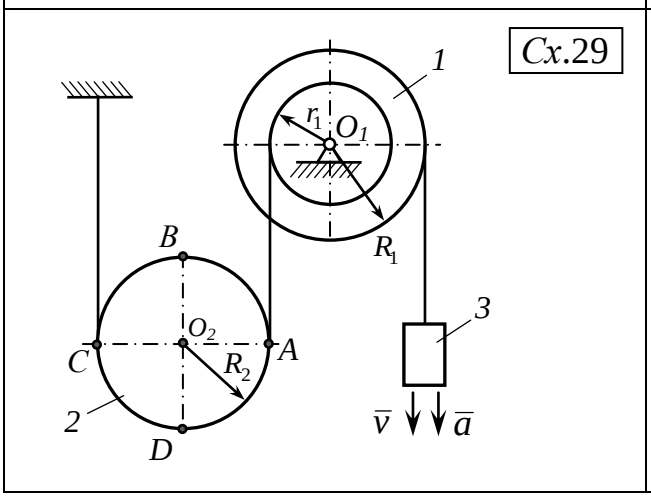


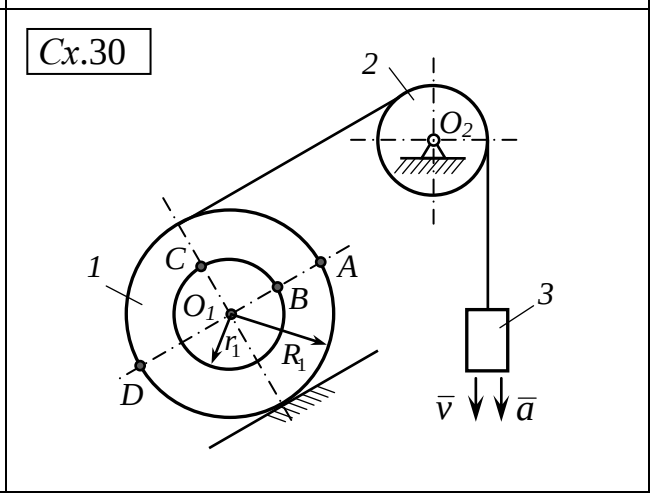

Cx.25
1
r1
O1
R1
3
v
a
B
C
O2
A
2
D
R2
R2=0,5r1


Cx.26
1
r1
O1
R1
3
v
a
B
O2
C
A
2
D
R2
R2=0,5(R1+r1)


Cx.27
C
2
D
O2
B
R2
A
r1
O1
R1
1
3
v
a


Cx.28
3
v
a
1
r1
O1
R1
D
A
O2
C
2
B
R2


Cx.29
1
r1
O1
R1
B
O2
C
A
R2
2
D
3
v
a


Cx.30
2
O2
1
C
A
O1
B
r1
R1
D
3
v
a

Задание № 6 (К4)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ СКОРОСТИ И АБСОЛЮТНОГО УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

Цель задания: Научиться решать задачи на сложное движение точки.

Для выполнения задания необходимо знать теории кинематики точки, поступательного и вращательного движения твердого тела и изучить раздел сложного движения точки по рекомендованной литературе:

[1] §§ 64-67;
[2] §§ 111-116;
[5] глава V §§ 1-4.

Вопросник-минимум для защиты задания № 6 (К4):

1) Какое движение точки называется сложным?
2) Дайте определения относительного, переносного и абсолютного движений точки.
3) Какое движение надо остановить в данный момент для определения кинематических характеристик (траектории, скорости $\bar{v}_r$ и ускорения $\bar{a}_r$) точки в относительном движении?
4) Какое движение надо остановить в данный момент для определения кинематических характеристик (траектории, скорости $\bar{v}_e$ и ускорения $\bar{a}_e$) точки в переносном движении?
5) Как определить абсолютную скорость точки $\bar{v}$?
6) Как определить модуль и направление кориолисова ускорения $\bar{a}_c$?
7) При каких условиях кориолисово ускорение равно нулю?
8) По какой формуле определяется абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении?
9) По какой формуле определяется абсолютное ускорение точки при непоступательном переносном движении?
10) Изменения каких скоростей и в каких движениях определяет $\bar{a}_c$?

Постановка задачи: Квадратная или круглая пластина (схемы 1 ÷ 30 на стр. 59 ÷ 62) вращается в плоскости чертежа вокруг точки O или из плоскости чертежа вокруг оси OO_1 по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в таблице 4.1 в графе Б. Положительное направление отсчёта угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. По пластине из точки A движется точка M по закону $S = AM = f_2(t)$, заданному в таблице 6.1 в графе А. На рисунках точка M изображена в произвольном положении, при котором $S = AM > 0$.

Если при вычислении окажется, что $S = AM < 0$, то точку M следует изобразить по другую сторону от точки A. На всех рисунках $R = 40$ см, $l = 20$ см, $b = 30$ см. Коэффициент k при $S(t)$ приведён в таблице в графе Г.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение в момент времени t_1, заданный в таблице в графе В.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ № 6 (К4).

Точка M движется по диагонали прямоугольника так, что расстояние AM меняется по закону $S = AM = 16 - 8\cos 3\pi t$ см (закон относительного движения). Прямоугольник вращается вокруг оси, совпадающей с его стороной OO_1 по закону $\varphi = 0{,}9t^2 - 9t^3$ рад (закон переносного движения). Определить в момент времени $t = 2/9$ с. абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M*, если $b = 24$ см (рис. 6.1).

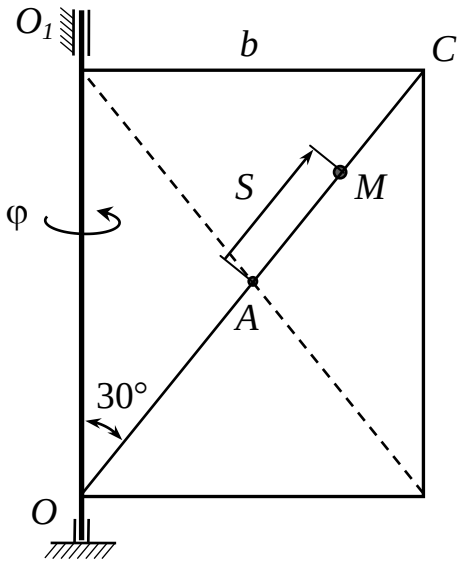


Рис. 6.1

Решение: В данной задаче движение точки M по пластине примем за относительное, а движение её вместе с пластиной за переносное.

Рассмотрим относительное движение точки.

При этом будем считать, что переносное движение остановлено, т.е. пластина вокруг оси OO_1 не вращается.

Найдем положение точки M на диагонали прямоугольника в заданный момент времени $t = 2/9$ с:

$$S\big|_{t=2/9} = 16 - 8\cos\left(3\pi \cdot \frac{2}{9}\right) = 16 - 8\cos\frac{2\pi}{3} = 16 - 8\cos 120^0 = 20 \text{ см} > 0,$$

следовательно, *S* возрастает и точка *M* расположена правее от точки *A*.

Найдём алгебраическую величину относительной скорости v_r точки *M*:

$$v_r = \left|\frac{dS}{dt}\right|, \quad \frac{dS}{dt} = 24\pi\sin 3\pi t\Big|_{t=2/9} = 24\pi\sin 120° = 65{,}30 \text{ см/с}.$$

dS/dt определяет проекцию относительной скорости на единичный вектор касательной к относительной траектории, направленной от точки *A* к *C*.

Положительный знак у dS/dt показывает, что точка *M* движется в направлении возрастания S, т.е. от *A* к *C* и вектор скорости $\bar{v}_r$ должен быть направлен из точки M к точке C. При получении отрицательного значения для dS/dt вектор скорости пришлось бы направить к точке *O*.

Найдём алгебраическую величину относительного ускорения a_r точки *M*:

$$a_r = \left|\frac{d^2S}{dt^2}\right|, \quad \frac{d^2S}{dt^2} = 72\pi^2\cos 3\pi t\Big|_{t=2/9} = 72\pi^2\cos 120° = -355{,}31 \text{ см/с}^2.$$

d^2S/dt^2 определяет проекцию относительного ускорения на единичный вектор касательной к относительной траектории.

Отрицательный знак у d^2S/dt^2 показывает, что вектор относительного ускорения $\bar{a}_r$ направлен в сторону отрицательных значений S, т.е. к точке O, и разные знаки у dS/dt и d^2S/dt^2 говорят о том, что относительное движение замедленное. В данном примере траектория относительного движения - прямая OC и нормальное относительное ускорение $a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = 0$ ($\rho \to \infty$). В случае же криволинейной относительной траектории a_r^n было бы отлично от нуля и его вектор следовало бы направить к центру кривизны траектории (если это окружность, то к центру окружности) относительного движения.

Сделаем еще один рисунок 6.2, на котором покажем фактическое положение точки *M* и изобразим векторы относительных скорости и ускорения с учетом знаков, полученных при вычислении их численных значений.

<u>Рассмотрим теперь переносное движение</u>. Будем считать относительное движение остановленным, точка M находится на расстоянии $S = 20$ см от точки *A*. Переносное движение - это вращение прямоугольной пластины вокруг оси OO_1. Переносную скорость и переносное ускорение точки *M* будем находить как скорость и ускорение точки пластинки, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка *M*.

Скорость и ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, находятся по формулам $v = \omega R$, $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$, где $a_\tau = \varepsilon R$, $a_n = \omega^2 R$. Здесь $R = DM$ – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения. В данном случае это будут формулы для нахождения переносных скорости и ускорения точки.

Итак $v_e = \omega \cdot DM$. Расстояние DM может быть вычислено как:

$DM = b/2 + S \cdot \sin 30° = 12 + 20/2 = 22$ см.

$$\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1{,}8t - 27t^2\Big|_{t=2/9} = -0{,}93 \text{ с}^{-1}.$$

$d\varphi/dt$ определяет проекцию вектора угловой скорости на положительное направление оси вращения OO_1.

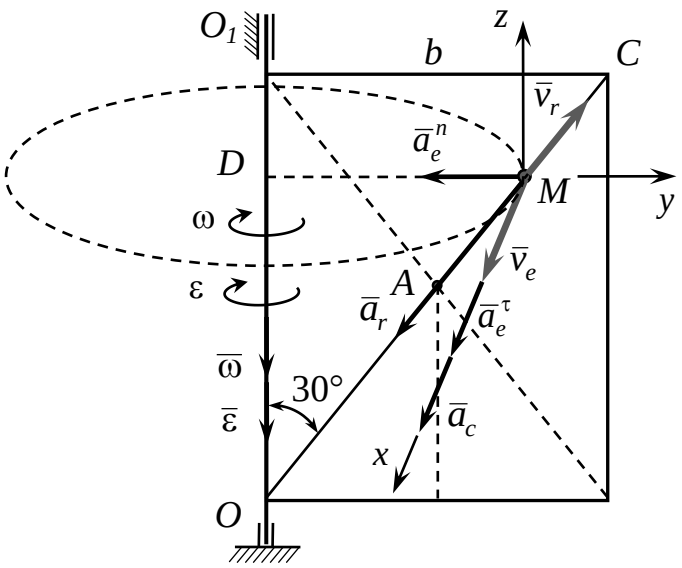


Рис. 6.2

Отрицательный знак у $d\varphi/dt$ показывает, что вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ должен быть направлен вдоль оси вращения от точки O_1 к точке O. Модуль переносной скорости будет:

$$v_e = \omega \cdot DM = 20{,}46 \text{ см/с}.$$

Вектор $\bar{v}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения (показана на рисунке пунктиром) в направлении вращения тела, т.е. перпендикулярно плоскости чертежа к нам. Для удобства изображения векторов поместим в точке M прямоугольную систему координат $Mxyz$. Оси My, Mz находятся в плоскости пластины, ось Mx перпендикулярна плоскости пластины и направлена к нам. Таким образом, вектор $\bar{v}_e$ будет направлен по оси Mx к нам.

Найдём переносное ускорение точки M. Траектория переносного движения точки - окружность радиуса DM, и, следовательно,

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n,$$

где $a_e^\tau = \varepsilon \cdot DM$, $a_e^n = \omega^2 \cdot DM$, $\varepsilon = \left| d^2\varphi/dt^2 \right|$, $d^2\varphi/dt^2 = 1{,}8 - 54t$.

$d^2\varphi/dt^2$ определяет проекцию вектора углового ускорения на ось вращения OO_1.

При $t_1 = 2/9$ с; $d^2\varphi/dt^2 = -10{,}2$ с$^{-2}$. Знаки $d\varphi/dt$ и $d^2\varphi/dt^2$ одинаковы (оба отрицательны). Следовательно, вращение пластины ускоренное и направления векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ совпадают, а направление $\bar{a}_e^\tau$ совпадает с направлением вектора $\bar{v}_e$, т.е. вдоль оси Mx в положительном её направлении.

$a_e^\tau = \varepsilon \cdot DM = 22{,}44$ см/с^2.

Переносное нормальное ускорение

$a_e^n = \omega^2 \cdot DM = 19{,}03$ см/с^2.

Вектор нормального ускорения $\bar{a}_e^n$ направлен от точки M к точке D, т.е. к центру кривизны траектории переносного движения или вдоль оси My в отрицательном её направлении.

Кориолисово ускорение: $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r)$.

Модуль кориолисова ускорения:

$a_c = 2 \cdot |\bar{\omega}_e| \cdot |\bar{v}_r| \sin(\bar{\omega}_e, \wedge \bar{v}_r) = 2 \cdot 0{,}93 \cdot 65{,}2 \cdot \sin 150° = 60{,}64$ см/с^2.

Направление вектора $\bar{a}_c$ можно определить по <u>правилу Жуковского</u>.

Для этого проектируем вектор $\bar{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения пластины, т.е. на плоскость Mxy ($\bar{v}_r$ спроецируется на ось My, т.к. лежит в плоскости Myz), и поворачиваем эту проекцию на 90° в направлении вращения пластины. Таким образом, вектор ускорения Кориолиса будет направлен по оси Mx в положительном её направлении, т.е. к нам.

Переходим к нахождению абсолютной скорости и абсолютного ускорения. Вектор абсолютной скорости точки M находится по формуле: $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e$.

В нашем случае $\bar{v}_r \perp \bar{v}_e$ (вектор $\bar{v}_r$ лежит в плоскости Myz, а $\bar{v}_e$ направлен по оси Mx). Следовательно, модуль абсолютной скорости будет

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{65{,}2^2 + 20{,}46^2} = 68{,}33 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости можно было бы найти также с помощью его проекций на оси координат:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \ ,$$

где $v_x = v_{rx} + v_{ex}$, $v_y = v_{ry} + v_{ey}$, $v_z = v_{rz} + v_{ez}$,

$v_x = v_e = 20{,}46$ см/с, $v_y = v_r \sin 30° = 32{,}6$ см/с, $v_z = v_r \cos 30^0 = 56{,}4$ см/с,

$v = \sqrt{20{,}46^2 + 32{,}6^2 + 56{,}4^2} = 68{,}33$ см/с.

Вектор абсолютного ускорения точки в общем случае может быть записан

$$\bar{a} = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_c$$

и абсолютное значение его можно найти с помощью проекций на оси координат

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ ,$$

где a_x, a_y, a_z - проекции абсолютного ускорения на координатные оси Mx, My, Mz.

Проекция абсолютного ускорения на ось Mx:

$$a_x = a_{rx}^\tau + a_{rx}^n + a_{ex}^\tau + a_{ex}^n + a_{cx}.$$

В нашем случае $a_r^\tau = a_r$, $\bar{a}_r$ лежит в плоскости Myz, и на ось Mx не проектируется, $a_r^n = 0$, т.к. траектория относительного движения - прямая линия ($\rho \to \infty$), $\bar{a}_e^\tau$ направлен по оси Mx, $\bar{a}_e^n$ - по оси My и на ось Mx не проектируется, $\bar{a}_c$ направлен по оси Mx.

Таким образом, $a_x = a_e^{\tau} + a_c = 22{,}44 + 61 = 83{,}44$ см/с^2.

Аналогично найдём:

$a_y = -a_r \sin 30^0 - a_e^n = -355 \cdot 0{,}5 - 19{,}03 = -196{,}8$ см/с^2.

$a_z = a_r \cos 30^0 = -355 \cdot 0{,}866 = -307{,}1$ см/с^2.

Модуль абсолютного ускорения:

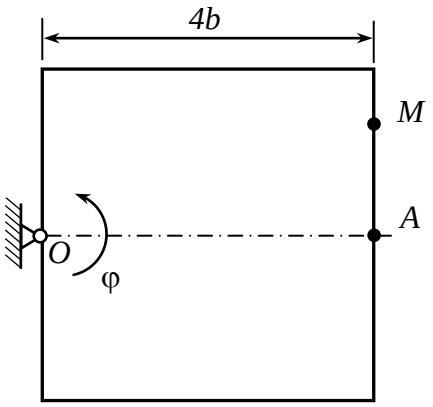
$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 374{,}2$ см/с^2.

Таблица 6.1

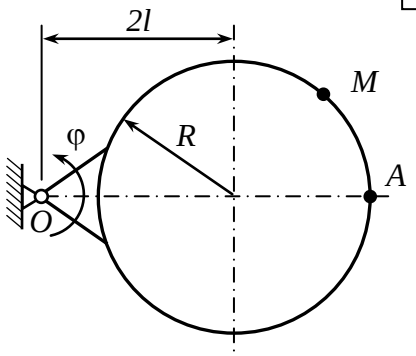
Исходные данные к заданию К4

№№ п/п	А	Б	В	Г
	$S = f_2(t)$	$\varphi = f_1(t)$	t_1	k
0	$k \cdot \sin 2\pi t$	$3t^3 - 2t^2$	1/3	30
1	$k \cdot \cos 2\pi t$	$6t^3 - 2t^2$	1/3	25
2	$k \cdot \sin 2\pi t$	$2t - 3t^3$	1/6	20
3	$k \cdot \cos 2\pi t$	$2t - 9t^3$	1/3	18
4	$k \cdot \sin 2\pi t$	$3t^3 - 2t^2$	1/6	24
5	$k \cdot \cos 2\pi t$	$2{,}5t^2 - t$	1/6	16
6	$k \cdot \cos 2\pi t$	$6t^3 - 4t^2$	1/6	34
7	$k \cdot \sin 2\pi t$	$5t^2 - 2t$	1/3	30
8	$k \cdot \sin 2\pi t$	$t^2 - 3t^3$	1/3	20
9	$k \cdot \cos 2\pi t$	$3t^2 - 4t^3$	1/6	22

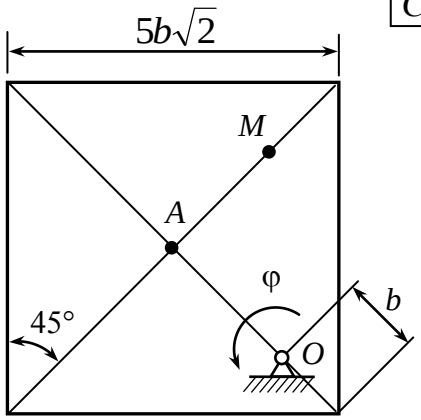
Cx.1



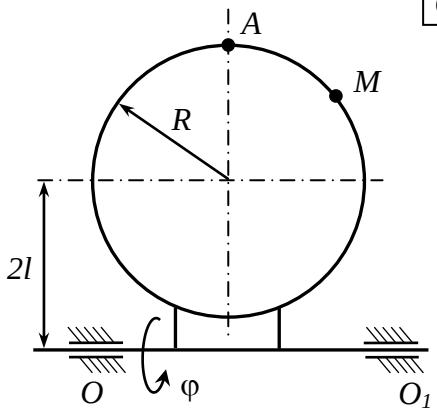
Cx.2



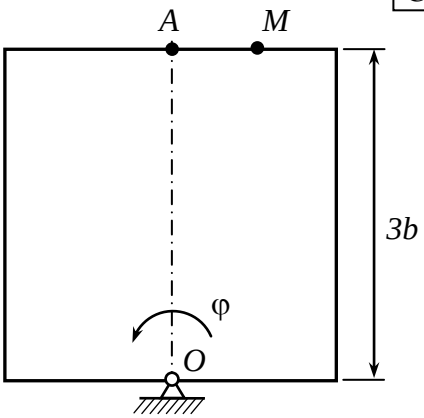
Cx.3



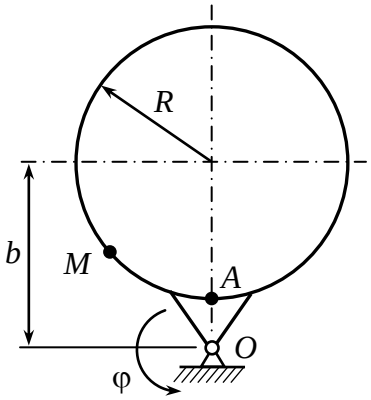
Cx.4



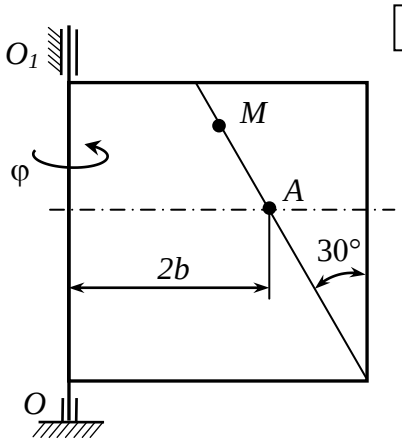
Cx.5



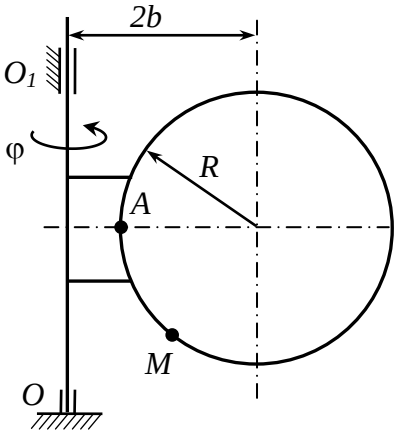
Cx.6



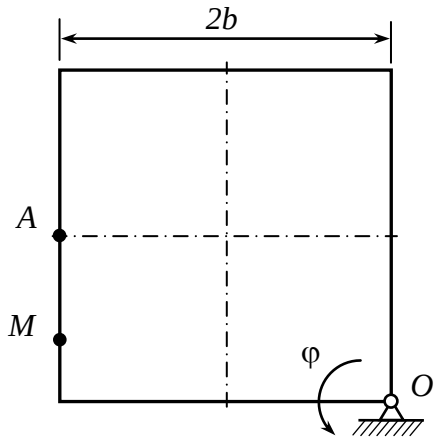
Cx.7



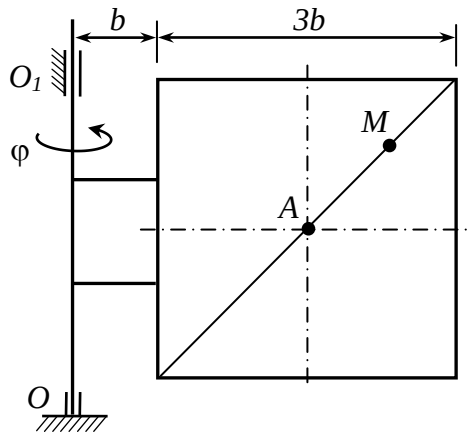
Cx.8



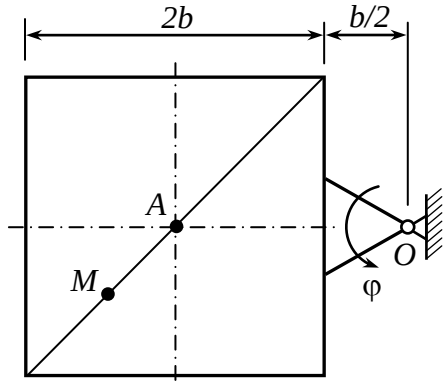
Cx.9



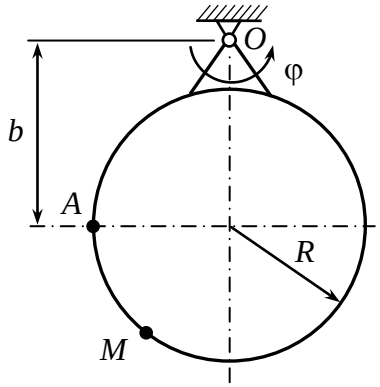
Cx.10



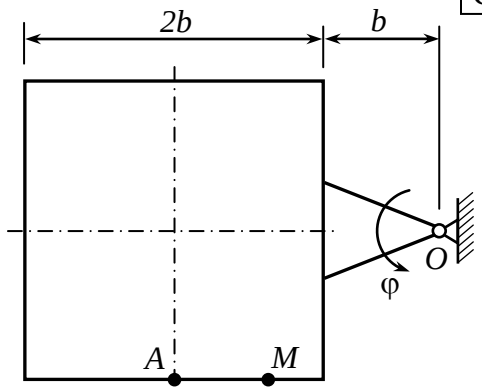
Cx.11



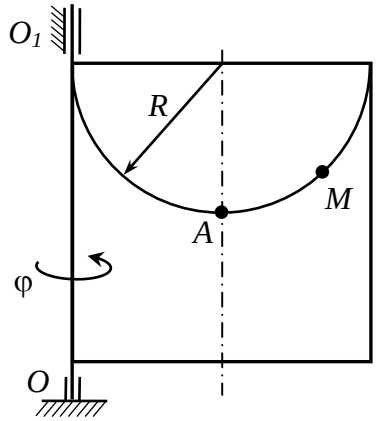
Cx.12



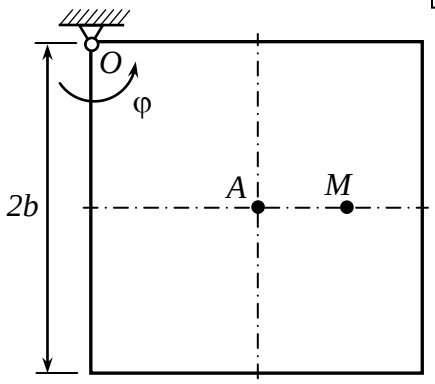
Cx.13



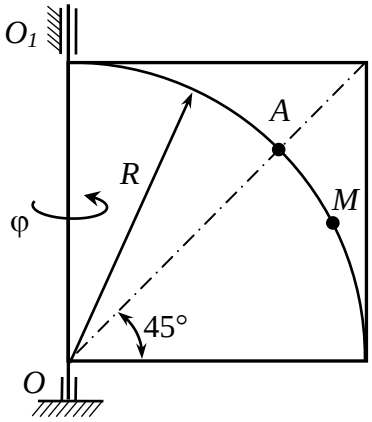
Cx.14



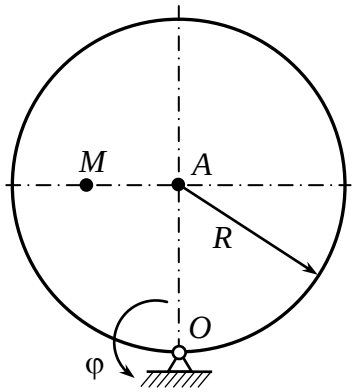
Cx.15



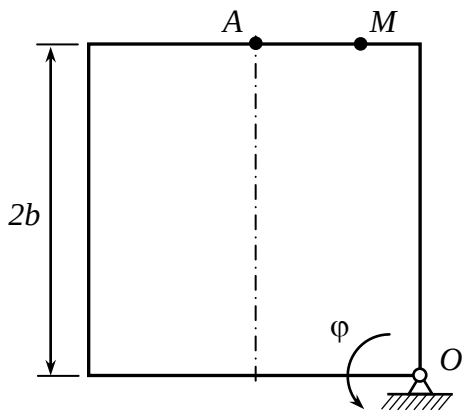
Cx.16



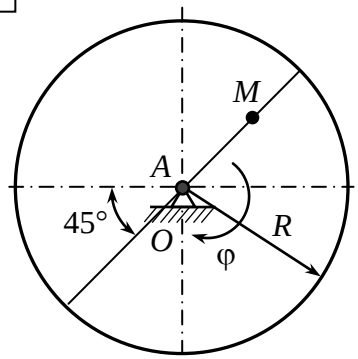
Cx.17



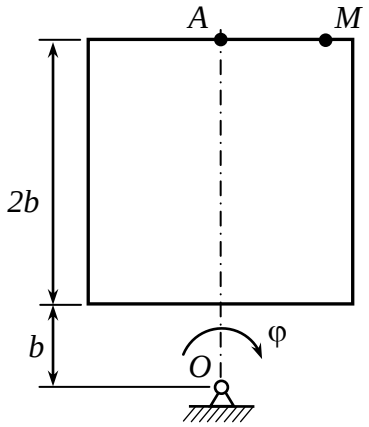
Cx.18



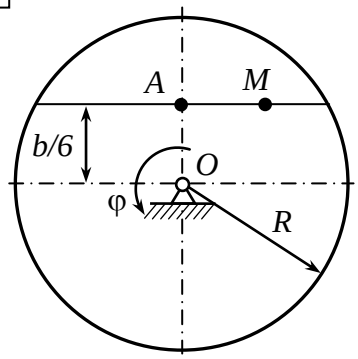
Cx.19



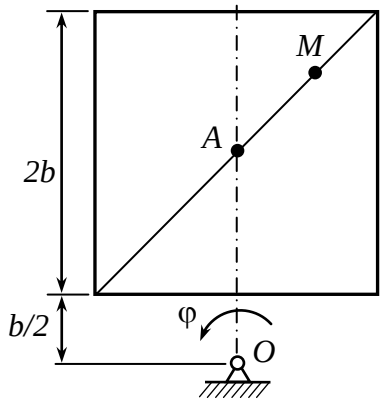
Cx.20



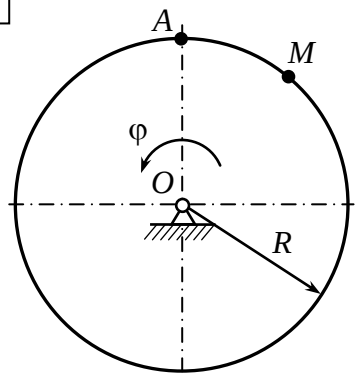
Cx.21



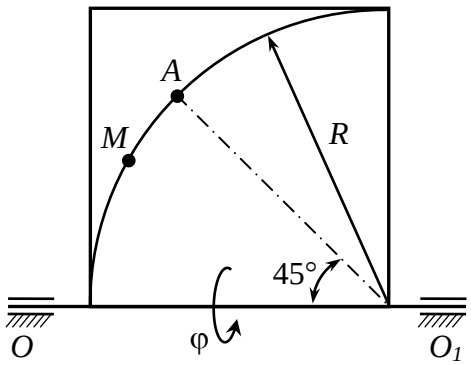
Cx.22



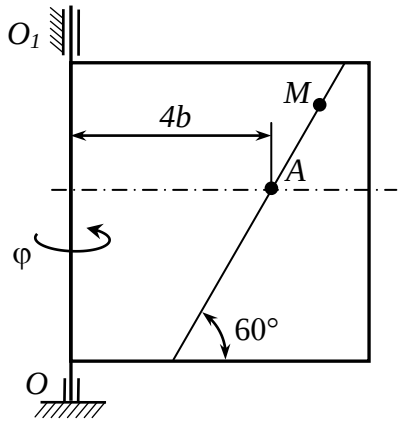
Cx.23



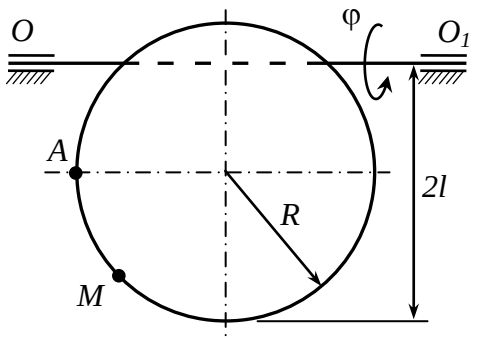
Cx.24



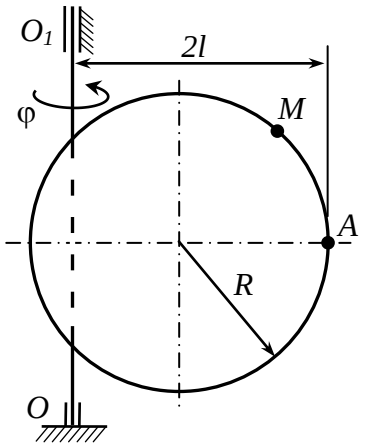
Cx.25



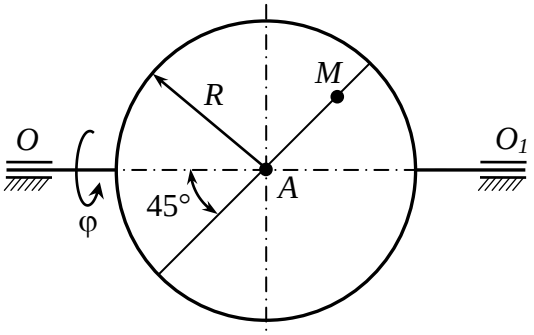
Cx.26



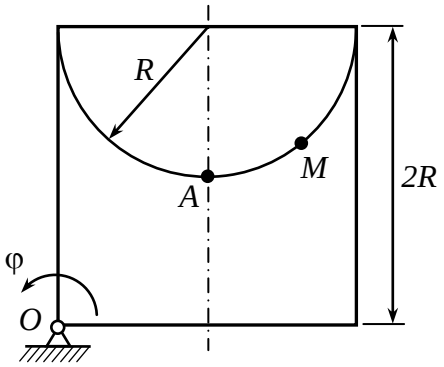
Cx.27



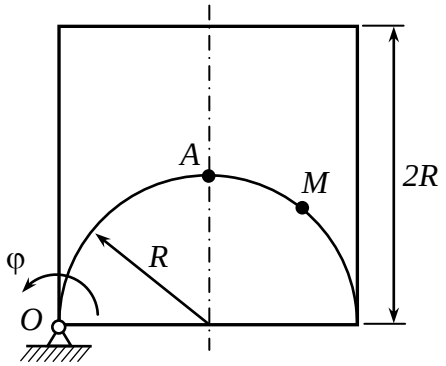
Cx.28



Cx.29



Cx.30



Задание № 7 (Д2)

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ ТОЧКИ И РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Цель работы: Приобрести навыки в применении теорем об изменении количества движения и кинетической энергии материальной точки, а также в использовании дифференциальных уравнений в естественных осях.

Приступая к выполнению задания, следует изучить теоретический материал: [1] §§ 83,84,87-89,133,135; [2] §§ 46-48, 58-60, 62, 106, 107.

Вопросник-минимум для защиты задания Д2:

1) Что называется количеством движения точки?
2) Что называется элементарным импульсом силы?
3) Какова размерность количества движения точки и импульса силы в различных системах единиц?
4) Сформулируйте теорему о количестве движения точки в дифференциальной и конечной форме.
5) Запишите различные формы выражения элементарной работы переменной силы.
6) Как выражается работа на конечном перемещении?
7) Чему равна работа силы тяжести и когда она положительна?
8) Чему равна работа силы упругости?
9) Что называется кинетической энергией материальной точки?
10) Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.

Постановка задачи. Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения A внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости. Пренебрегая трением на криволинейных участках траектории, найти скорости v_B и v_C шарика в положениях B и C и давление шарика на стенку трубки N_C в положении C, а также величину, указанную в последнем столбце таблице 7.1.

В схемах 2, 3, 7, 8, 11, 13, 19, 20, 22, 25, 28, 29 шарик, пройдя путь λ_0, отделяется от пружины.

Номер схемы взять согласно первому двузначному числу шифра. Второе четырехзначное число шифра в данном задании не используется.

Исходные данные приведены в таблице 7.1, где

m – масса шарика;

v_A – начальная скорость шарика;

t_1 – время движения шарика на участке *AB* (в схемах 1, 4, 5, 9, 15-18, 23, 24, 27, 30) или на участке *BD* (в схемах 2, 3, 6-8, 10-14,19-22, 25, 26, 28, 29);

f – коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки;

λ_0, λ_1 – начальное и конечное удлинение (или укорочение) пружины соответственно;

C – коэффициент жесткости пружины;

h – наибольшая высота подъема шарика;

S – путь, пройденный шариком до остановки.

ПОРЯДОК РАСЧЕТА

1. Изобразить на рисунке все силы, приложенные к материальной точке, т.е. задаваемые силы и реакции связей на каждом из участков.

2. Если на прямолинейном участке *AB* задано время действия сил, то следует выбрать систему координат и применить теорему об изменении количества движения точки.

Если на участке *AB* заданы такие параметры, как радиус R или λ_0 (путь пройденный шариком), то следует применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и определить v_B и v_C.

3. Для вычисления давления шарика на стенку канала в положении *C* привлекаем дифференциальные уравнения движения в естественных осях координат. В начале участке *BC* следует применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и определить v_C.

4. Для определения величин, указанных в последнем столбце таблицы 7.1, из условий конкретно поставленной задачи следует применить теорему об изменении количества движения и об изменении кинетической энергии материальной точки.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ Д2

Шарик массы m = 0,5 кг начинает движение из точки *A* со скоростью $v_A = 0{,}8$ м/с. На участке *BDE* на шарик действует еще сила трения (коэффициент трения f = 0,1). В точке *D* шарик начинает сжимать пружину жесткостью c = 1000 Н/м.

Определить: v_B, v_D, v_C, $\lambda_{\max}$, приняв g = 9,81 м/с^2, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\lambda_0 = 0$. Где $\lambda_{\max}$ – величина максимального сжатия пружины, λ_0 – величина начальной деформации пружины.

Решение.

1. На участке *ACB* движение шарика происходит под действием силы тяжести $\overline{P}$; на участке *BD*, кроме силы $\overline{P}$ действует сила трения $\overline{F}_{тр}$; на участке *DE*, кроме сил $\overline{P}$ и $\overline{F}_{тр}$, действует сила упругости пружины $\overline{F}_{упр}$.

2. Для определения v_B и v_C применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.

Движение шарика на участках *AB* и *AC* траектории происходят под действием силы тяжести $\overline{P}$ (силу трения на криволинейных участках не учитываем):

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \sum A_k . \qquad (7.1)$$

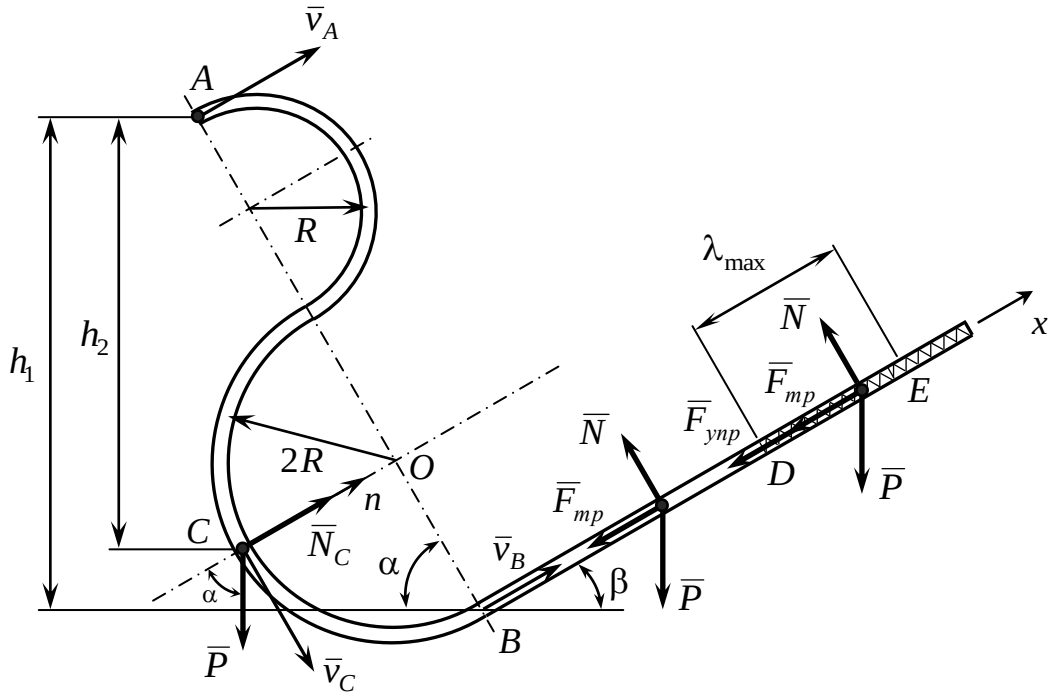


Рис. 7.1

Работу совершает только сила тяжести. Начальное положение шарика выше конечного, следовательно, работа будет положительной. Работу силы тяжести вычисляем по формуле:

$$A = mgh_1, \text{ где } h_1 = AB\sin\alpha = 6R\sin\alpha . \qquad (7.2)$$

Тогда $\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = mg6R\sin\alpha \;\Rightarrow\; v_B^2 - v_A^2 = 12gR\sin\alpha \;\Rightarrow\; v_B = 4{,}59$ м/с.

Для нахождения скорости шарика в точке *C* применим терему об изменении кинетической энергии точки на участке *AC*:

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \sum A_k ,$$

где $A = mgh_2$, $h_2 = AO\sin\alpha + OC\sin(90° - \alpha) = 4R\sin\alpha + 2R\cos\alpha$, тогда

$$v_C^2 - v_A^2 = 2g(4R\sin\alpha + 2R\cos\alpha) ,$$

откуда $v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR(2\sin\alpha + \cos\alpha)}$. После подстановки числовых значений получаем $v_C = 4{,}26$ м/с.

3. Для определения давления шарика на стенку трубки в положении *C* составим дифференциальное уравнение движения шарика в проекциях на главную нормаль к траектории

$$ma_n = \sum F_{kn} \text{ или } \frac{mv^2}{\rho} = \sum F_{kn}. \qquad (7.3)$$

В нашем случае в точке *C* на шарик действует сила тяжести и реакция стенки трубки, тогда уравнение (7.3) примет вид

$$\frac{mv_C^2}{2R} = N_C - mg\cos\alpha,$$

откуда $N_C = \frac{mv_C^2}{2R} + mg\cos\alpha = 26{,}2$ Н.

4. Для нахождения скорости шарика в положении *D* рассмотрим движение его на прямолинейном участке *BD*. Поскольку известны силы, действующие на шарик на этом участке и время движения по нему, то для нахождения v_D используем теорему об изменении количества движения

$$m\bar{v}_D - m\bar{v}_B = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt. \qquad (7.4)$$

На участке *BD* на шарик действуют: сила тяжести $\bar{P}$, сила трения $\bar{F}_{тр}$ и нормальная реакция $\bar{N}$ (рис. 7.1). Спроецируем векторное равенство (7.4) на направление движения шарика, т.е. на ось *Bx*:

$$mv_D - mv_B = -\int_0^{t_1} mg\sin\beta dt - \int_0^{t_1} F_{тр} dt,$$

где $F_{тр} = fN = fmg\cos\beta$.

Тогда скорость в точке *D*: $v_D = v_B - g(\sin\beta + f\cos\beta)t_1 = 4{,}01$ м/с.

Для определения максимального сжатия пружины рассмотрим движение шарика на участке *DE*. В точке *D* находится конец недеформированной пружины, которого коснулся шарик, имея скорость v_D, и стал ее сжимать. Это сжатие продолжалось до некоторой точки *E*, где скорость шарика стала равной нулю. Длина участка *DE* и будет величиной максимального сжатия пружины λ_{max}.

Поскольку на участке *DE* известны начальная $v_D = 4{,}01$ м/с и конечная $v_E = 0$ скорости шарика, а также силы, действующие на него: сила тяжести $\bar{P}$, сила трения $\bar{F}_{тр}$, нормальная реакция $\bar{N}$ и сила упругости пружины $\bar{F}_{упр}$, то для нахождения величины сжатия (*DE*) можно еще раз применить теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_D^2}{2} = \sum A_k = A_P + A_{F_{упр}} + A_{F_{тр}}. \qquad (7.5)$$

Т.к. начальное положение шарика (т. *D*) ниже конечного (т. *E*), то работа силы тяжести будет отрицательной:

$$A_P = -mgh_3 = -mg \cdot DE \cdot \sin\beta = -mg\lambda_{\max} \sin\beta .$$

Работу силы упругости пружины вычислим по формуле

$$A_{F_{упр}} = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2), \qquad (7.6)$$

где $\lambda_0 = 0$ – начальное удлинение пружины (пружина была недеформирована), $\lambda_1 = \lambda_{\max} = DE$ – конечное удлинение пружины. Тогда работа силы упругости пружины (7.6) примет вид $A_{F_{упр}} = -\frac{c}{2}\lambda_{\max}^2$.

Работа силы трения:

$$A_{F_{тр}} = -\int_D^E fNdx = -\int_0^{\lambda_{\max}} fmg\cos\beta dx = -fmg\lambda_{\max}\cos\beta$$

Подставляя все найденные работы сил в (7.5) и учитывая, что $v_E = 0$, получим

$$-\frac{mv_D^2}{2} = -mg\lambda_{\max}\sin\beta - \frac{c}{2}\lambda_{\max}^2 - fmg\lambda_{\max}\cos\beta,$$

$$\frac{c}{2}\lambda_{\max}^2 + mg(\sin\beta + f\cos\beta)\lambda_{\max} - \frac{mv_D^2}{2} = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно $\lambda_{\max}$, находим

$$\lambda_{\max} = -0{,}003 \pm 0{,}090 \text{ м.}$$

Берем для $\lambda_{\max}$ положительный корень квадратного уравнения

$$\lambda_{\max} = -0{,}003 + 0{,}090 = 0{,}087 \text{ м.}$$

Ответ: Скорость шарика в точках *B*, *C*, *D* будет равна:

$v_B = 4{,}59$ м/с, $v_C = 4{,}26$ м/с, $v_D = 4{,}01$ м/с.

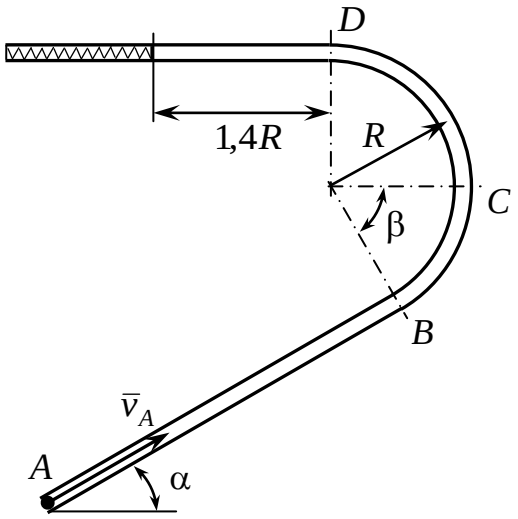
Величина укорочения пружины равна $\lambda_{\max} = 0{,}087$ м.

Таблица 7.1

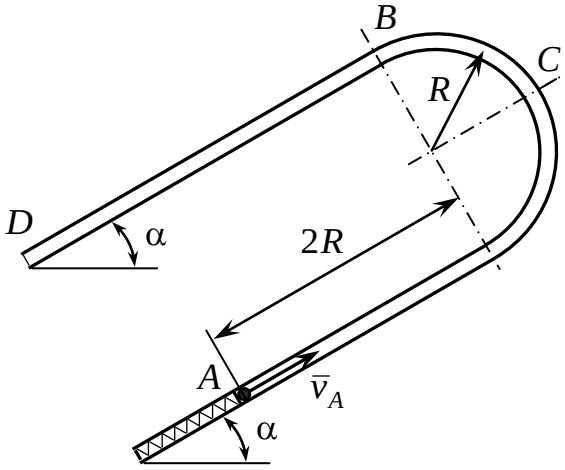
Исходные данные к заданию Д2

№ п/п	m, кг	v_A, м/с	t_1, с	R, м	f	α, град	β, град	λ_0, см	c, Н/см	Дополнительно определить
1	0,5	20	2	2	0,2	30	45	0	1	v_D, λ_{max}
2	0,4	0	1	1	0,1	30	–	50	2	v_D
3	0,4	0	2	1	0,15	30	–	40	0,5	v_D
4	0,6	16	0,2	4	0,1	45	20	0	1	v_D, λ_{max}
5	0,1	8	1,5	2	0,2	30	–	0	0,5	v_D, λ_{max}
6	0,2	5	0,5	1	0,1	45	–	0	0,8	v_D, λ_{max}
7	0,3	0	2	4	0,1	30	20	30	2	v_D
8	0,4	0	1	0,5	0,1	30	60	20	1,2	v_D
9	0,2	4	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	v_D, λ_{max}
10	0,2	6	1	1	0,3	45	–	0	1	v_D, λ_{max}
11	0,5	0	1,5	4	0,25	30	60	50	1,5	v_D
12	0,4	2	0,4	2	0,2	30	60	0	0,5	v_D, λ_{max}
13	0,1	0	0,1	0,4	0,3	30	60	10	0,5	v_D
14	0,4	1	0,2	1	0,4	45	–	0	1,1	v_D, λ_{max}
15	0,2	10	1	0,5	0,1	60	–	0	1,2	v_D, λ_{max}
16	0,6	2	0,4	0,2	0,2	45	–	0	1	v_D, λ_{max}
17	0,7	3	0,3	0,3	0,2	45	–	0	0,5	v_D, λ_{max}
18	0,5	5	0,5	0,6	0,3	60	30	0	0,8	v_D, λ_{max}
19	0,1	0	0,2	0,5	0,25	–	30	30	0,4	v_D
20	0,3	0	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	v_D
21	0,2	2	0,1	0,2	0,2	30	–	0	0,5	v_D, λ_{max}
22	0,5	0	0,2	0,5	0,2	45	30	50	0,8	v_D
23	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	–	0	1	v_D, λ_{max}
24	0,8	5	0,3	0,6	0,15	30	–	0	0,5	v_D, λ_{max}
25	0,3	0	0,1	1	0,1	60	30	50	1	v_D
26	0,4	2	0,2	2	0,4	30	–	0	0,4	v_D, λ_{max}
27	0,6	0	2	3	0,2	60	30	0	1	v_D, λ_{max}
28	0,2	0	0,1	1	0,2	30	–	40	1	v_D
29	0,1	0	0,1	1	0,15	60	20	50	0,5	v_D, S
30	0,3	3	0,4	1,5	0,1	45	–	–	0,6	v_D, λ_{max}

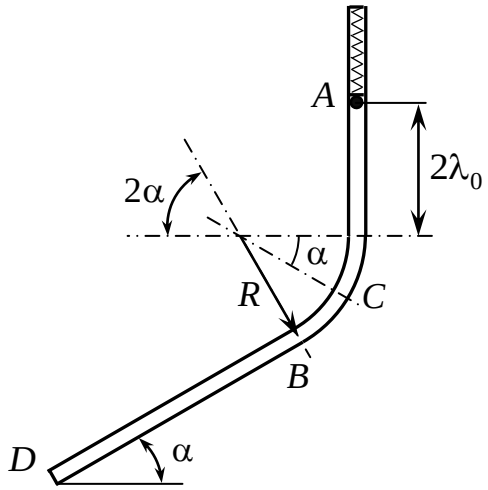
Cx.1



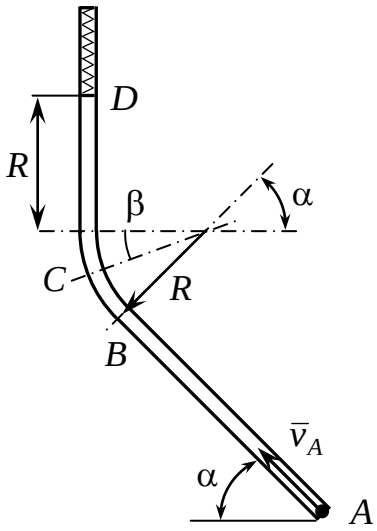
Cx.2



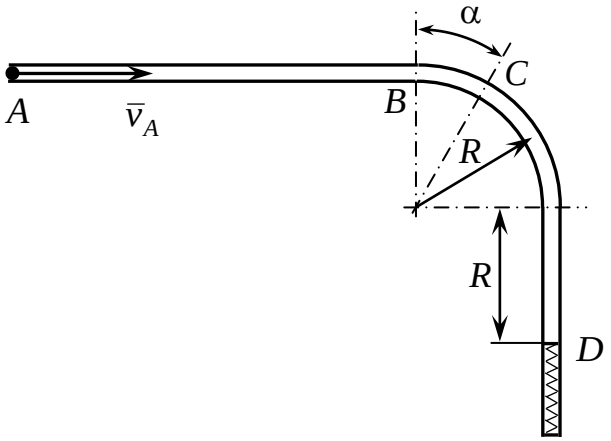
Cx.3



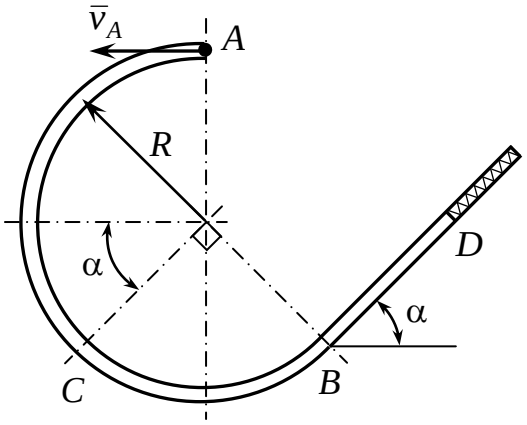
Cx.4



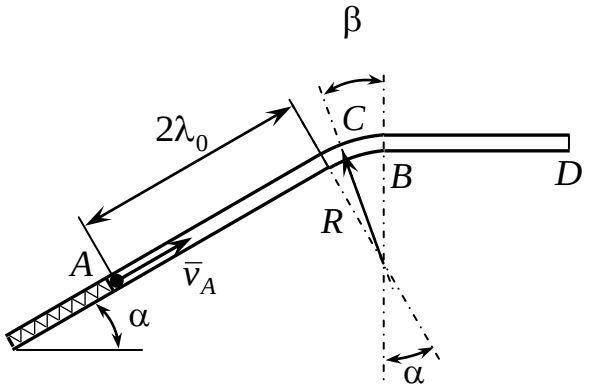
Cx.5



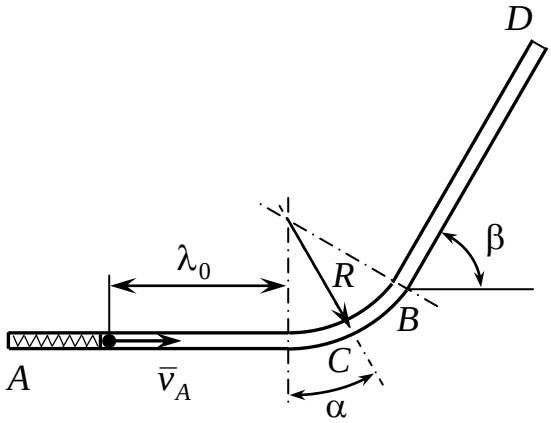
Cx.6



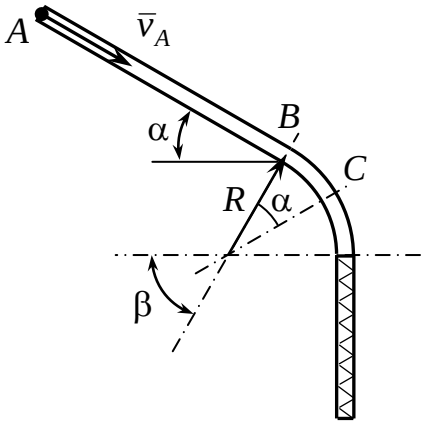
Cx.7



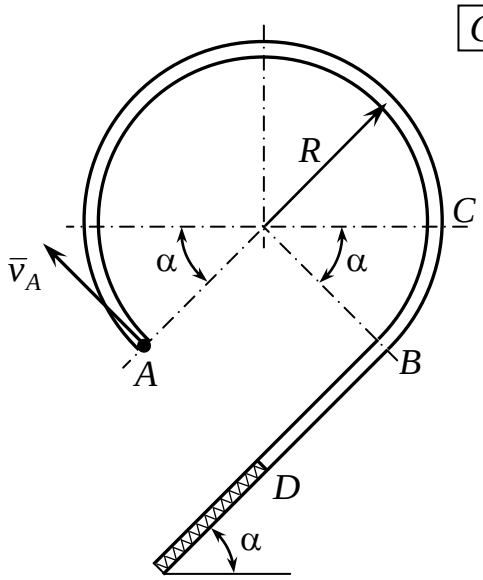
Cx.8



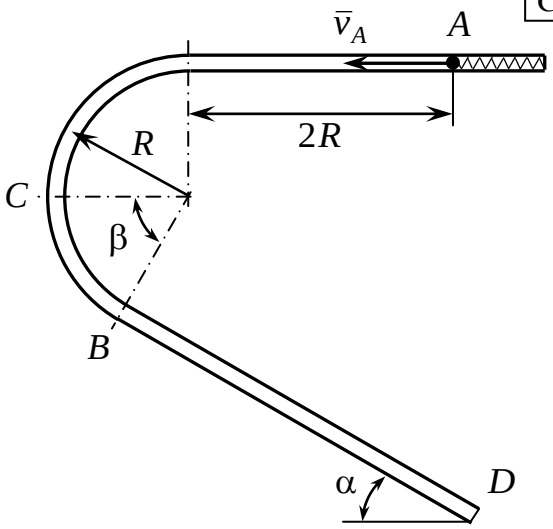
Cx.9



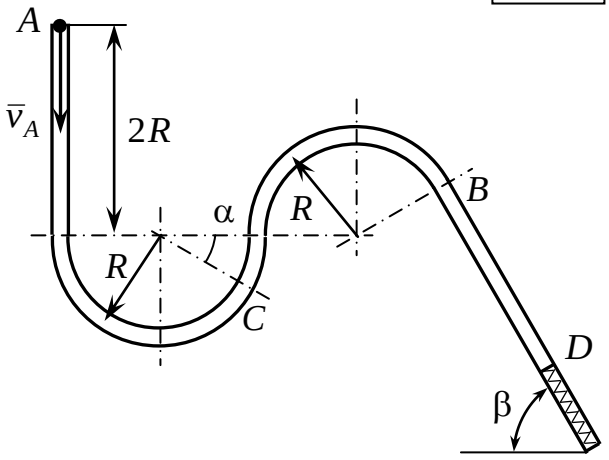
Cx.10



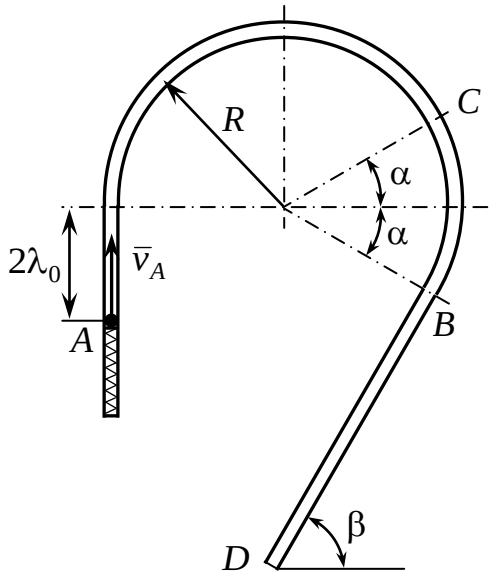
Cx.11



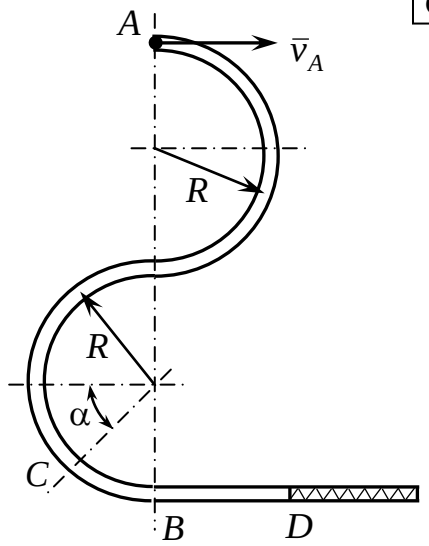
Cx.12



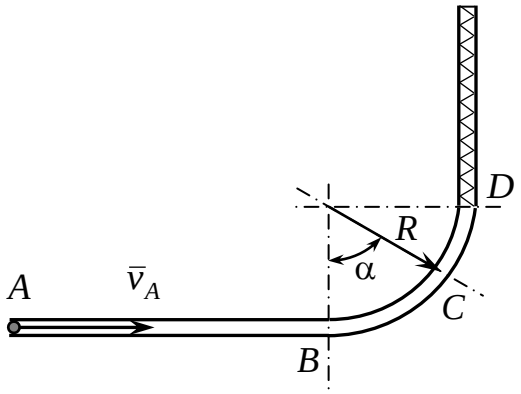
Cx.13



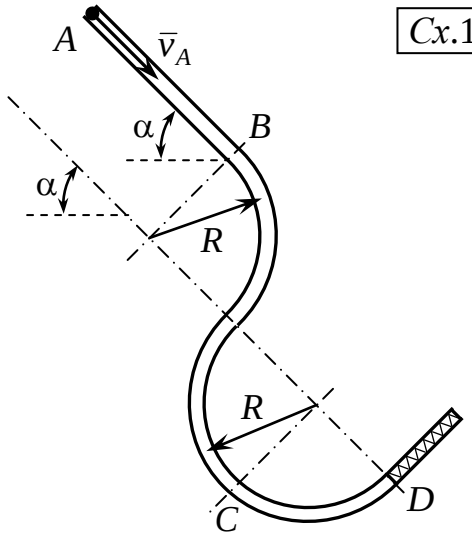
Cx.14



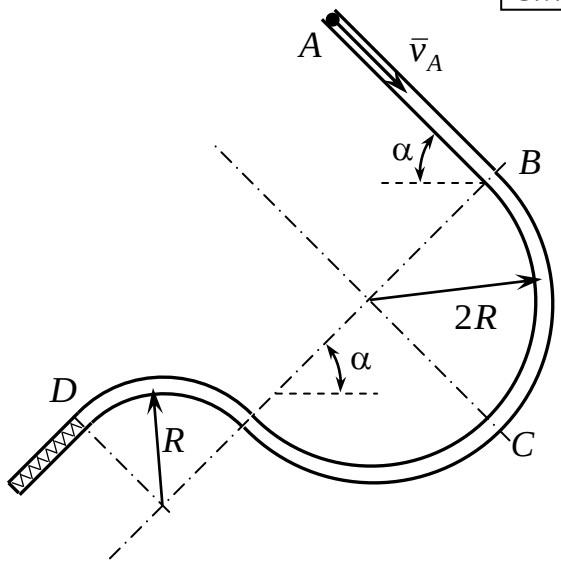
Cx.15



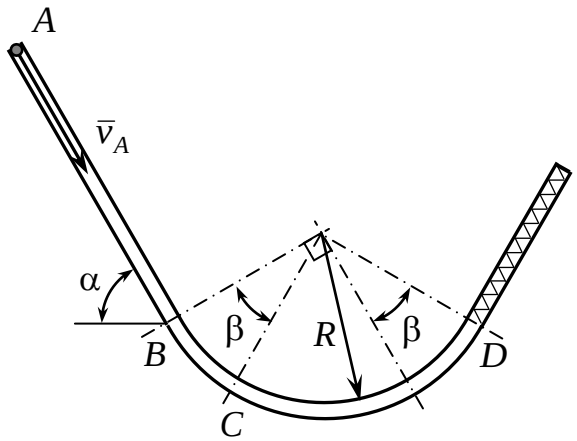
Cx.16



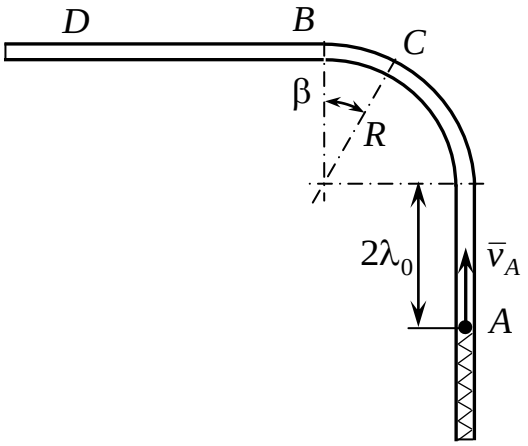
Cx.17



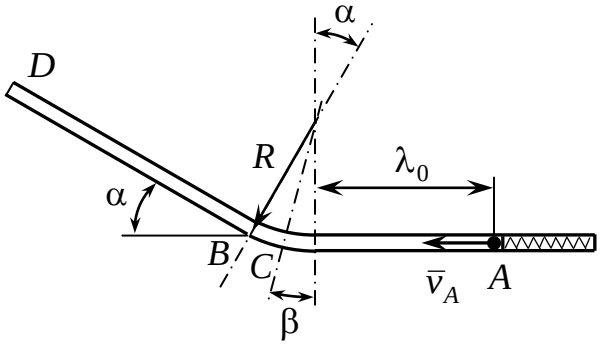
Cx.18



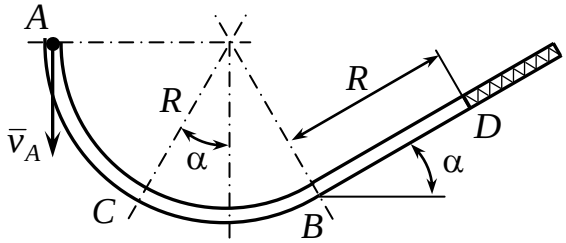
Cx.19



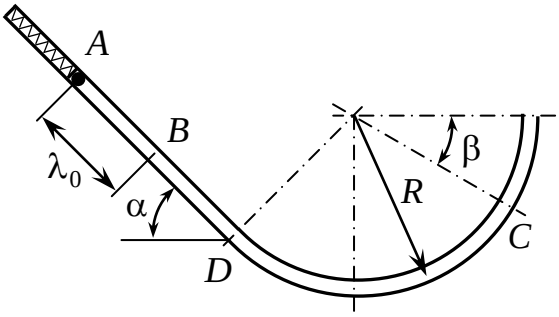
Cx.20



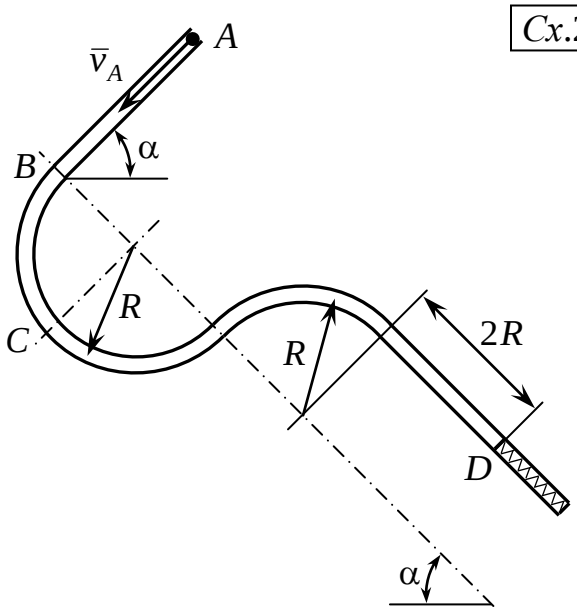
Cx.21



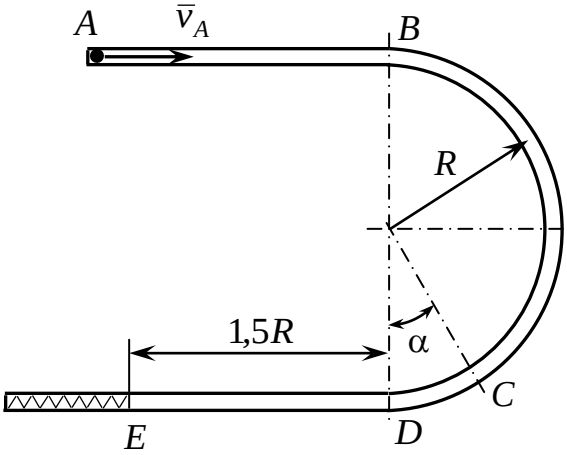
Cx.22

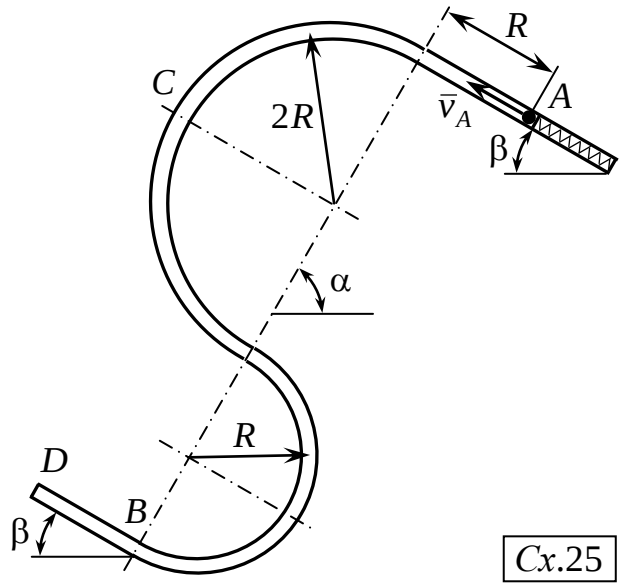


Cx.23



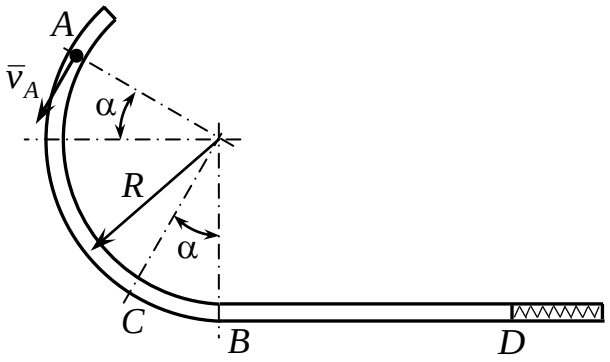
Cx.24



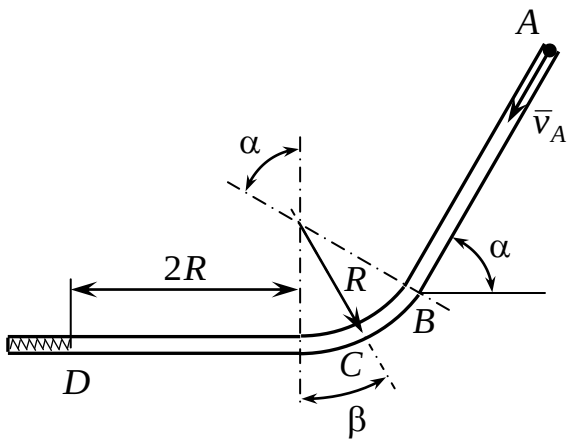


Cx.25

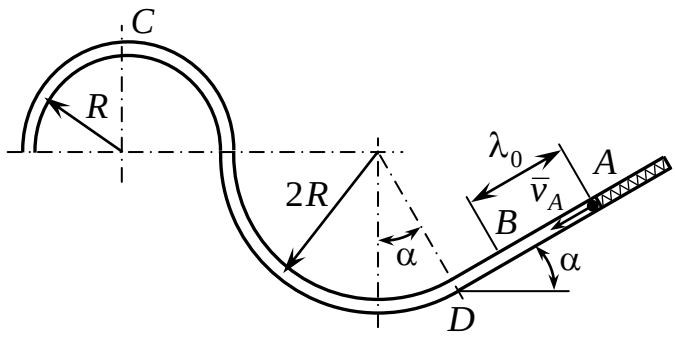
Cx.26



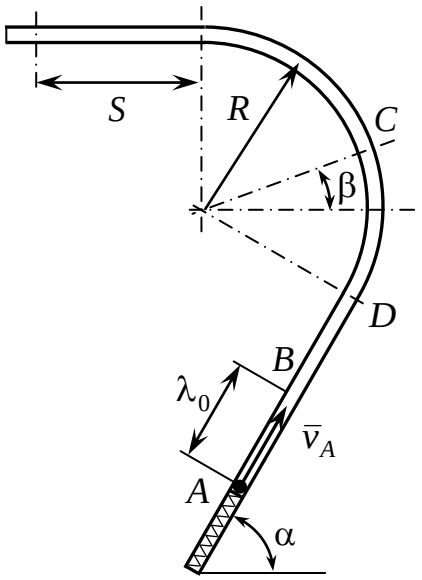
Cx.27



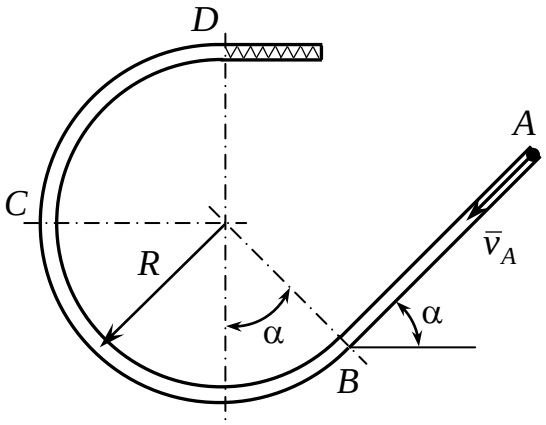
Cx.28



Cx.29



Cx.30



Задание № 8 (ДЗ)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

Цель задания: Приобрести навыки в применении теоремы об изменении кинетической энергии системы. Научиться вычислять работы сил и кинетическую энергию твердого тела и системы для различных случаев движения.

К выполнению задания можно приступить, изучив теоретический материал ([1]: § 121-124; [2]: § 43, 61, 65-71).

Вопросник-минимум для защиты задания № 8 (ДЗ):

1) Что называется моментом инерции твердого тела относительно оси?
2) Какова размерность момента инерции в различных системах единиц?
3) Что называется радиусом инерции твердого тела относительно оси?
4) В чем состоит теорема о зависимости между моментами инерции твердого тела относительно двух параллельных осей?
5) Чему равен момент инерции однородного стержня, диска, цилиндрического катка?
6) Что называется кинетической энергией механической системы?
7) Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии системы.
8) Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела в его простейших движениях?
9) Чему равна работа внутренних сил неизменной механической системы?
10) Сформулируйте теорему об изменениях кинетической энергии для неизменяемой механической системы.

Постановка задачи: Механическая система (схемы 1 ÷ 30 на стр. 79 ÷ 82) состоит из груза *1* массы m_1, ступенчатая блока *2* массы m_2 и ступенчатого катка *3* массы m_3. Радиусы ступеней и радиусы инерции блока и катка относительно центров и масс соответственно равны:

$R_2 = 0{,}4$ м; $r_2 = 0{,}2$ м; $\rho_2 = 0{,}3$ м;

$R_3 = 0{,}3$ м; $r_3 = 0{,}25$ м; $\rho_3 = 0{,}2$ м.

Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми, невесомыми нитями. Участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Коэффициент трения груза *1* о плоскость $f = 0{,}02$; коэффициент трения качения катка *3*, катящегося без скольжения по плоскости, равен $f_k = 0{,}003$ м.

Система приходит в движение из состояния покоя в результате действия сил тяжести и силы $\overline{P}$. При этом от трения в подшипниках на блок *2* действует пара сил сопротивления с моментом $M_T = 2$ Н·м.

Считая, что точка приложения силы $\overline{P}$ движется в направлении этой силы, **определить модуль и истинное направление силы** $\overline{P}$ из условия, чтобы **скорость точки приложения силы** $\overline{P}$ **принимала заданное значение** *v* **при перемещении груза на расстояние *s*.**

ПОРЯДОК РАСЧЕТА

1. Изобразить на рисунке исследуемую механическую систему и все внешние силы, приложенные к ней.
2. Вычислить кинетическую энергию системы в ее начальном и конечном положениях.
3. Все входящие в выражение кинетической энергии системы скорости показать на рисунке и выразить их через искомую скорость.
4. Вычислить сумму работ всех внешних сил на перемещениях точек приложения этих сил из начального в конечное положение.
5. Все входящие в выражения работ перемещения выразить через перемещение груза *s*.
6. Записать теорему об изменении кинетической энергии и определить искомую величину.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ № 8 (Д3).

Механическая система (рис. 8.1) состоит из груза *1*, ступенчатого барабана *2* и колеса *3*, соединенных друг с другом гибкими нерастяжимыми нитями. Барабан *2* считать сплошным однородным диском радиуса R_2, массу колеса *3* – равномерно распределенную по ободу радиуса R_3. Коэффициент трения качения колеса *3* равен f_k. При движении от трения в подшипниках на барабан действует пара сил сопротивления с постоянным моментом M_T.

Считая первоначально, что точка приложения силы $\overline{P}$ движется в направлении этой силы, **определить величину и направление силы** $\overline{P}$ при заданном значении скорости точки *C* и перемещение *s* груза *1* (рис. 8.1).

Исходные данные:

$m_1 = 3$ кг, $m_2 = 4$ кг, $m_3 = 3$ кг, $g = 9{,}81$ м/с^2,

$R_2 = R_3 = 0{,}35$ м, $r_2 = 0{,}25$ м, $M_T = 5$ Н·м, $f_k = 0{,}002$ м,

$s_1 = 2$ м, $v_C = 2{,}65$ м/с, $\alpha = 45°$.

Определить: величину и направление силы $\overline{P}$.

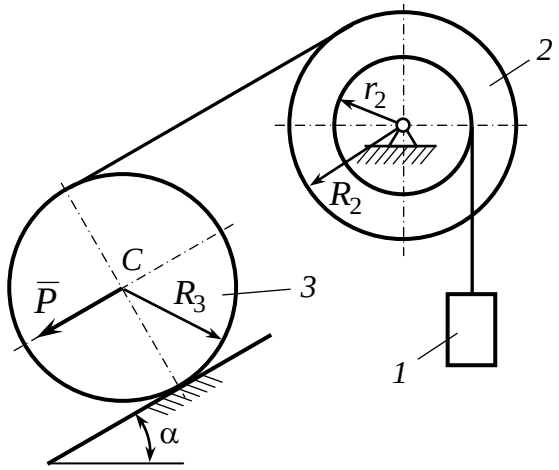


Рис. 8.1

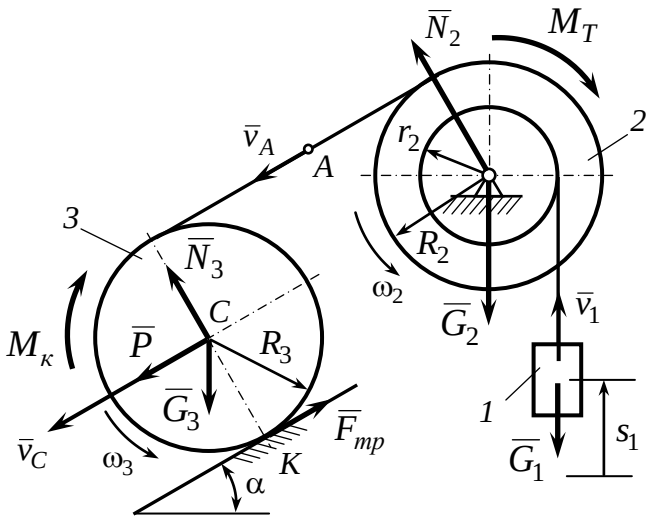


Рис. 8.2

Решение:

1. Исходная система показана на рисунке 8.1. Связями, наложенными на систему, являются наклонная плоскость и подшипник, совпадающий с центром барабана.

Изобразим действующие на систему внешние силы:

активные: $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ – силы тяжести и сила $\overline{P}$;

реакции связей: $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$, момент пары $M_к$ сил сопротивления качению колеса по плоскости и момент M_T от трения в подшипниках (рис. 8.2).

Теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемой механической системы в интегральной форме имеет вид:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e, \tag{8.1}$$

где T_0, T – кинетические энергии неизменяемой механической системы в начальном и коечном положениях; $\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ – сумма работ всех внешних сил на перемещениях их точек приложения из начального положения в конечное положение.

2. Вычислим кинетическую энергию системы в начальном и конечном (когда перемещение груза равно *s*) положениях. В начальном положении система находится в покое, поэтому:

$$T_0 = 0.$$

Запишем выражения кинетической энергии. Кинетическая энергия груза *1*, движущегося поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Кинетическая энергия барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2,$$

где $J_2 = \dfrac{m_2 R_2^2}{2}$ – момент инерции барабана *2* относительно оси вращения.

Кинетическая энергия колеса *3*, совершающего плоскопараллельное движение

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2,$$

где $J_3 = m_3 R_3^2$ – момент инерции колеса *3* относительно точки *C*.

Тогда кинетическая энергия системы примет вид:

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{1}{4} m_2 R_2^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \omega_3^2. \qquad (8.2)$$

3. Входящие в выражение кинетической энергии все линейные и угловые скорости выразим через искомую скорость v_C.

Так как нити являются гибкими и нерастяжимыми, и колесо *3* катится по плоскости без скольжения (мгновенный центр скоростей находится в точке *K*), имеем следующие кинетические зависимости:

$$v_C = \omega_3 R_3,\ v_A = 2v_C = 2\omega_3 R_3,\ \omega_2 = \frac{v_A}{R_2},\ v_1 = \omega_2 r_2 \qquad (8.3)$$

Откуда следует: $\omega_3 = \dfrac{v_C}{R_3}$, $\omega_2 = \dfrac{2v_C}{R_2}$, $v_1 = \dfrac{2r_2 v_C}{R_2}$.

Подставляя эти зависимости в (8.2), находим

$$T = \left(\frac{2m_1 r_2^2}{R_2^2} + m_2 + m_3 \right) \cdot v_C^2 = 10{,}06 \cdot v_C^2 \text{ Н·м} \qquad (8.4)$$

или при $v_C = 2{,}65$ м/с:

$$T = 70{,}65 \text{ Дж}.$$

4. Найдем сумму работ внешних сил на перемещениях точек приложения сил из начального положения в конечное:

$$\sum A_k^e = A_P + A_{G_3} + A_{N_3} + A_{F_{тр}} + A_{M_к} + A_{G_2} + A_{N_2} + A_{M_T} + A_{G_1}.$$

Когда точка *C* движется в направлении силы $\overline{P}$, груз *1* движется вверх, при этом барабан и колесо вращаются против хода часовой стрелки.

Обозначим φ_2 – угол поворота барабана, φ_3 – угол поворота колеса, s_C – перемещение точки *C*, найдем выражения для работ внешних сил:

$$A_{G_1} = -G_1 \cdot s_1,\ A_{G_3} = G_3 \cdot s_C \sin\alpha,\ A_{M_к} = -M_к \cdot \varphi_3 = -N_3 f_к \varphi_3,$$

$$A_{N_3} + A_{F_{тр}} + A_{N_2} + A_{G_2} = 0,\ A_{M_T} = -M_T \cdot \varphi_2,\ A_P = P \cdot s_C. \qquad (8.5)$$

5. Все входящие в выражения работ линейные и угловые перемещения выразим через перемещения груза s_1, учитывая, что зависимость между перемещениями та же самая, что и зависимость между соответствующими скоростями. Тогда из (8.3) имеем:

$$s_C = \frac{R_2}{2r_2} s_1, \quad \varphi_3 = \frac{s_C}{R_3} = \frac{R_2}{2R_3 r_2} s_1, \quad \varphi_2 = \frac{2s_C}{R_2} = \frac{s_1}{r_2}$$

Поскольку точка *C* тела *3* совершает прямолинейное движение и $y_C = const$, то

$$N_3 - G_3 \cos\alpha = 0 \text{ и } N_3 = G_3 \cos\alpha .$$

Подставим найденные величины в (8.5) и найдем сумму работ внешних сил:

$$\sum A_k^e = \left(P\frac{R_2}{2r_2} + m_3 g \frac{R_2}{2r_2}\sin\alpha - f_k m_3 g \cos\alpha \frac{R_2}{2R_3 r_2} - \frac{M_T}{r_2} - m_1 g \right) \cdot s_1 =$$

$$= \left(P\frac{0.35}{2\cdot 0.25} + 3\cdot 9.81 \frac{0.35}{2\cdot 0.25}\frac{\sqrt{2}}{2} - 0.002\cdot 3\cdot 9.81 \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2\cdot 0.25} - \frac{5}{0.25} - 3\cdot 9.81 \right) \cdot 2 =$$

$$= 1.4P - 69.89 \text{ Дж.} \qquad (8.6)$$

Приравнивая (8.4) и (8.6), найдем:

$$70{,}65 = 1{,}4P - 69{,}89$$

Отсюда $P = 100{,}39$ Н.

Значение *P* получилось положительным, следовательно, направление силы $\overline{P}$ совпадает с направлением, принятым на рисунке 8.1. Если значение *P* получилось бы отрицательным, то направление силы $\overline{P}$ противоположно принятому на рисунке.

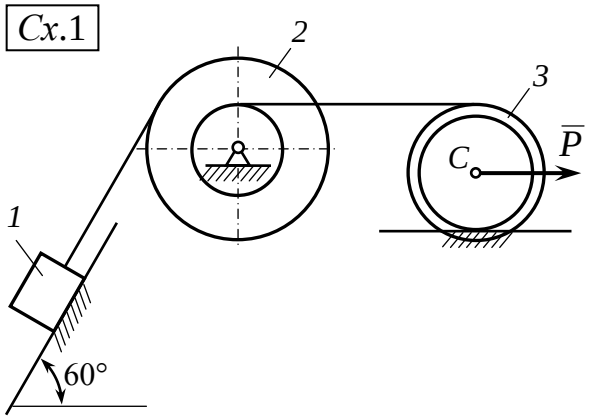
Ответ: Таким образом, если величина $P = 100{,}39$ Н, то скорость точки *C* равна $v_C = 2{,}65$ м/с в момент, когда груз *1* переместится на расстояние $s_1 = 2$ м.

Таблица 8.1

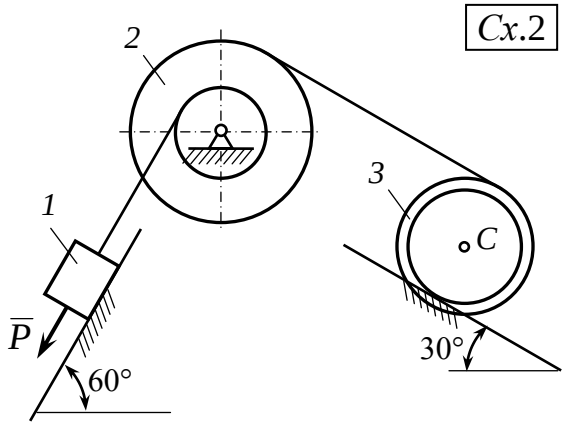
Исходные данные к заданию Д3

№ п/п	А	Б		В	Г
	m_1, кг	m_2, кг	s, м	m_3, кг	v, м/с
1	2	3	2	4	4
2	3	2	1,5	5	10
3	5	4	1,8	2	8
4	4	2,5	1,7	3,5	5
5	3,5	3	2,5	4,5	12
6	5,5	3,5	1,2	2,5	6
7	6	4,5	1,6	5,5	9
8	6,5	5,5	1,9	6	7
9	7	5	2,1	6,5	11
0	7,5	6	2,3	7,5	12

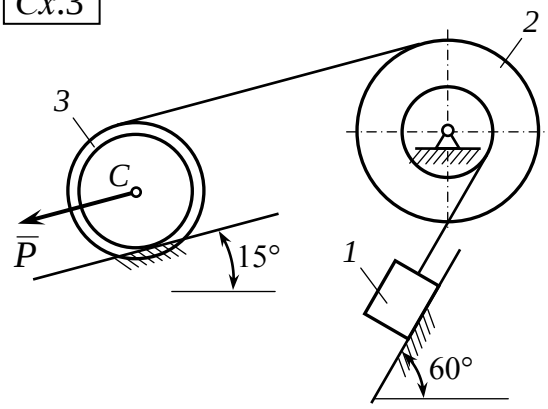
Cx.1



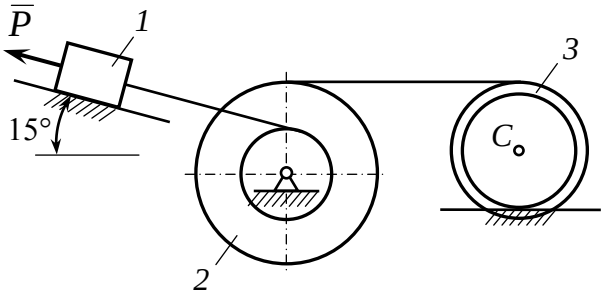
Cx.2



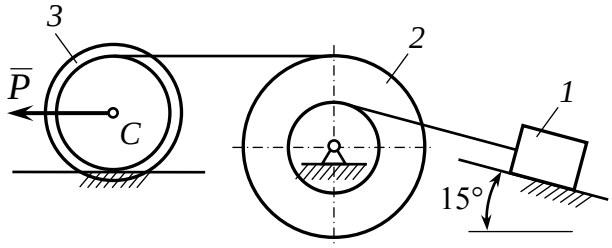
Cx.3



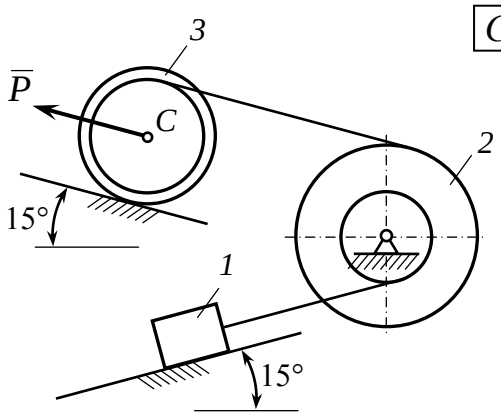
Cx.4



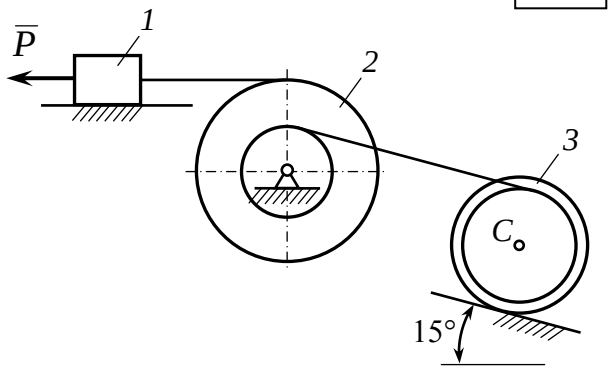
Cx.5



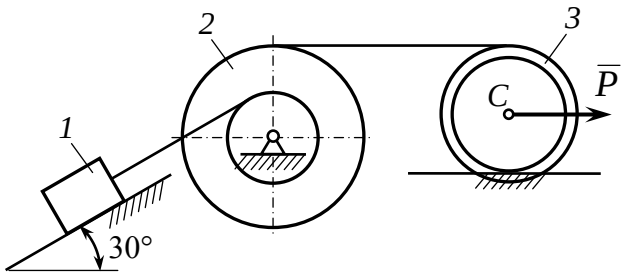
Cx.6

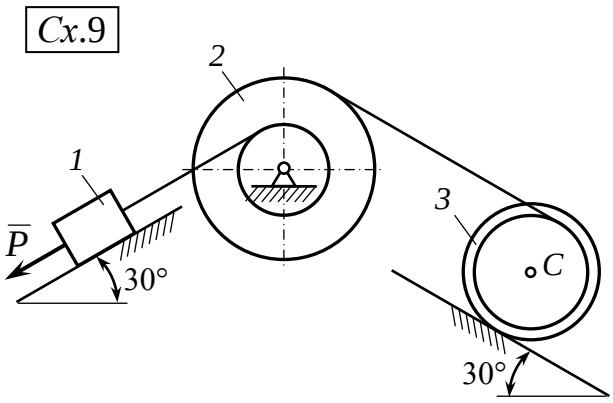


Cx.7

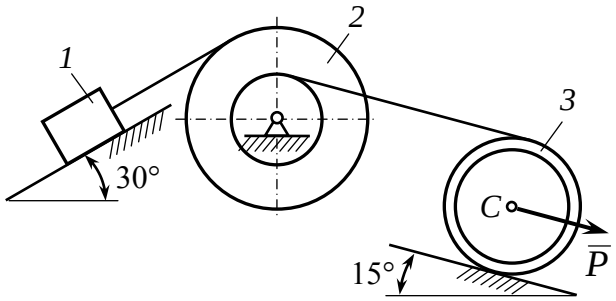


Cx.8

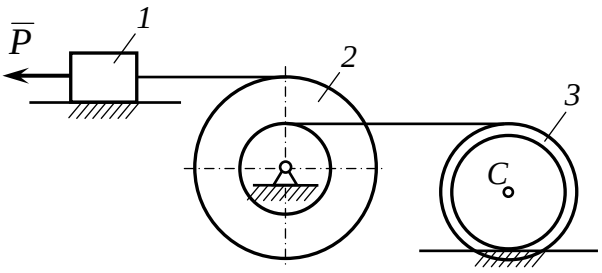




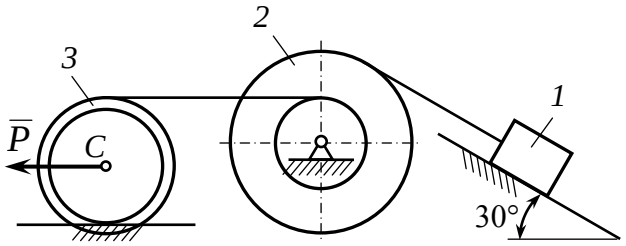
Cx.9



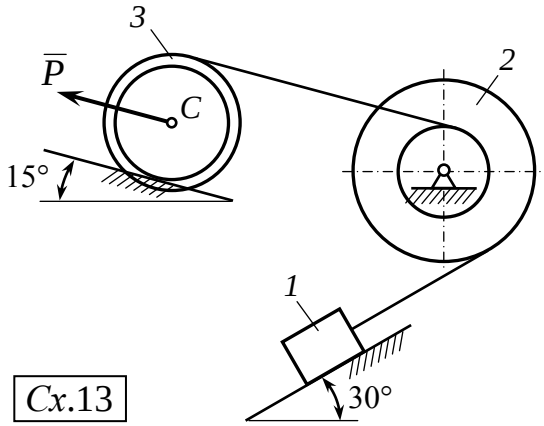
Cx.10



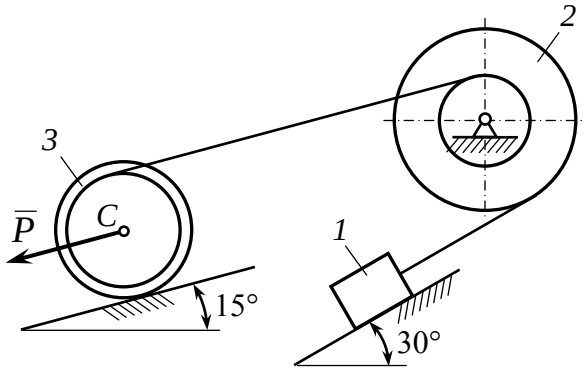
Cx.11



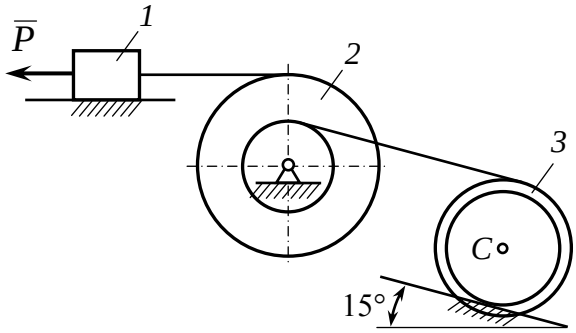
Cx.12



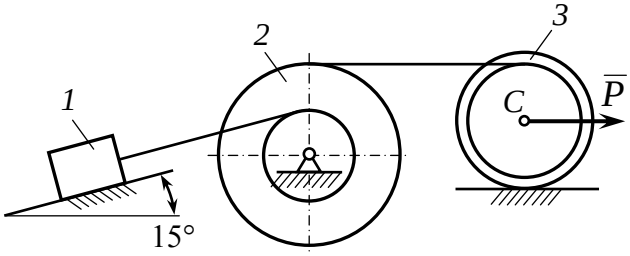
Cx.13



Cx.14

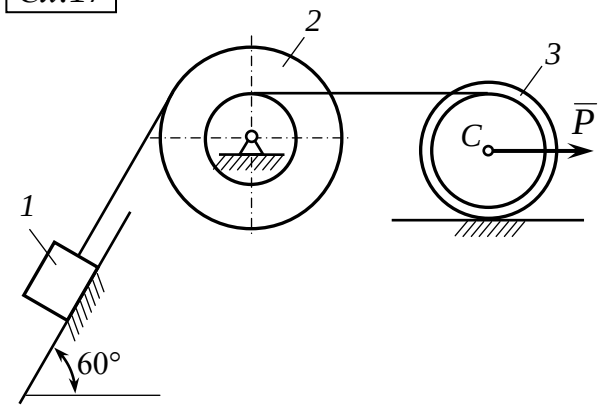


Cx.15

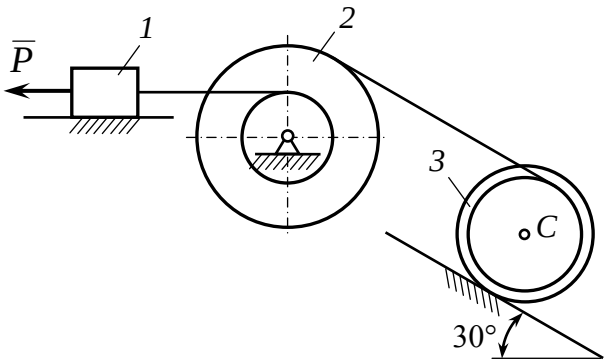


Cx.16

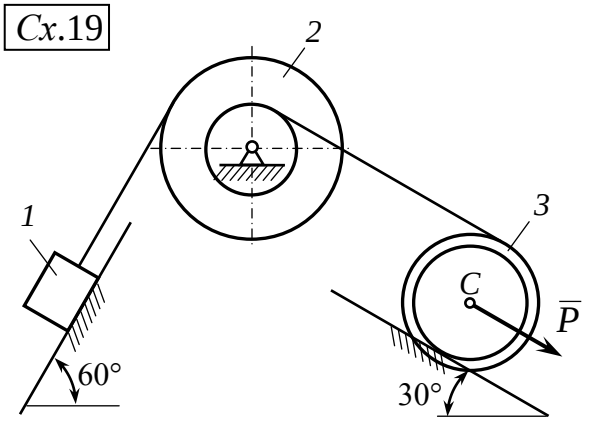
Cx.17



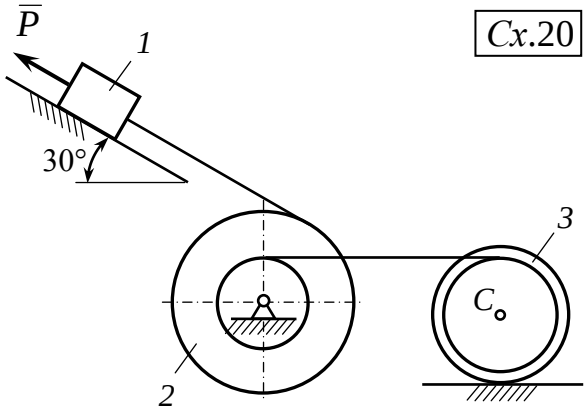
Cx.18



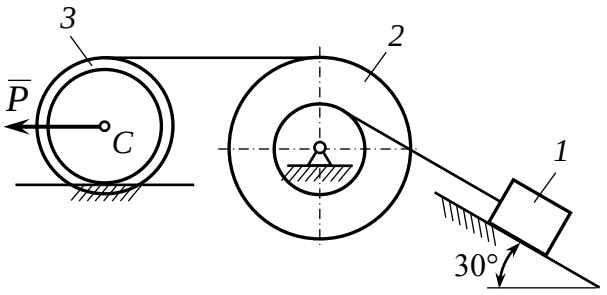
Cx.19



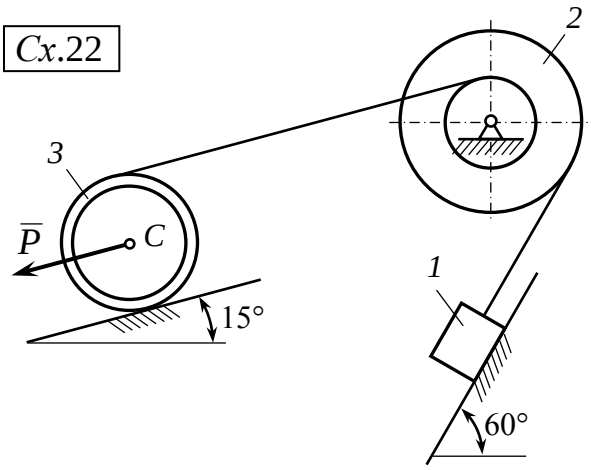
Cx.20



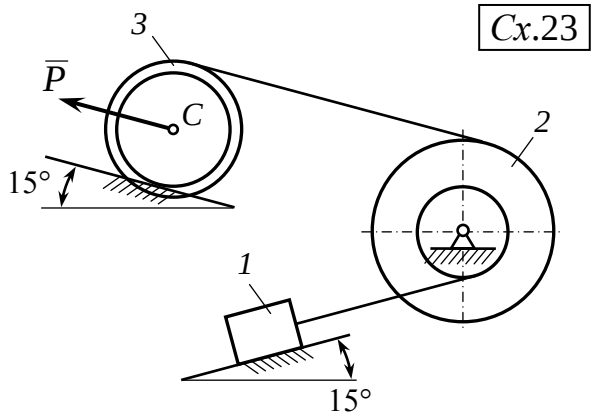
Cx.21



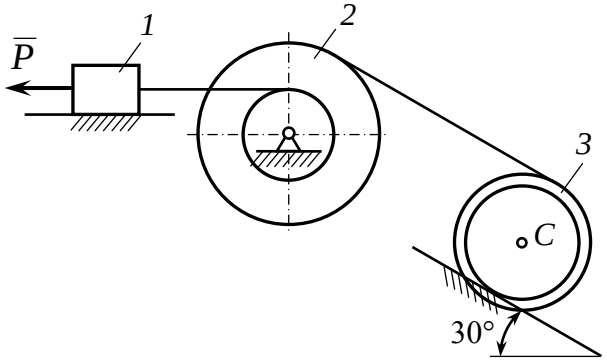
Cx.22

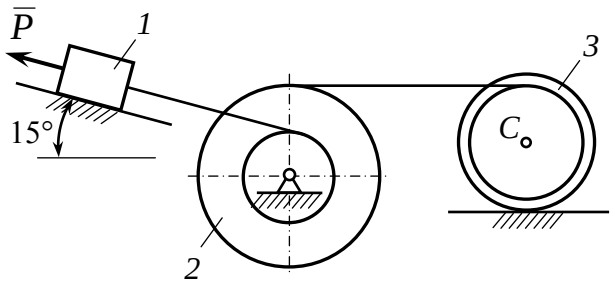


Cx.23

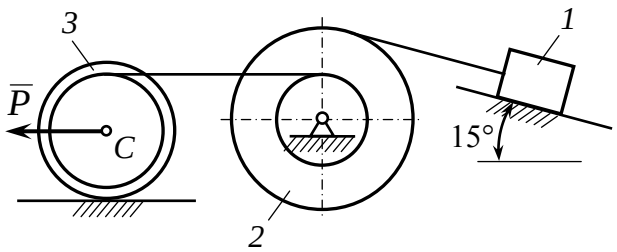


Cx.24

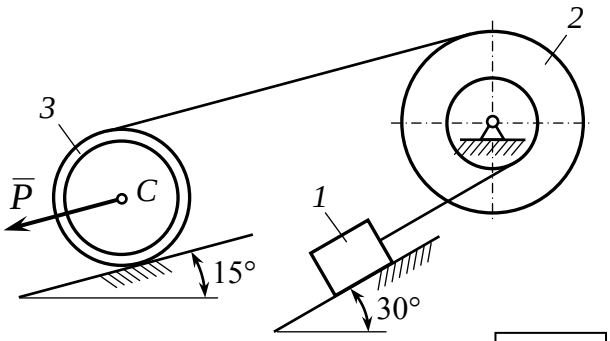




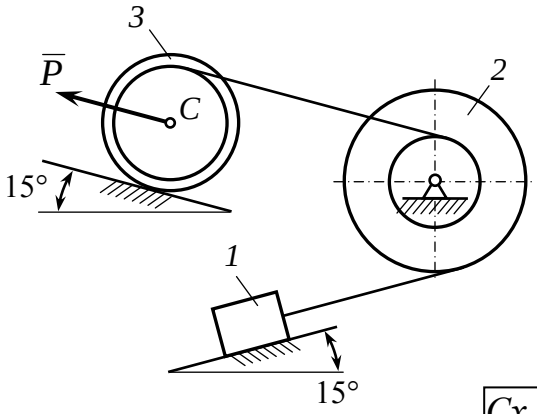
Cx.25



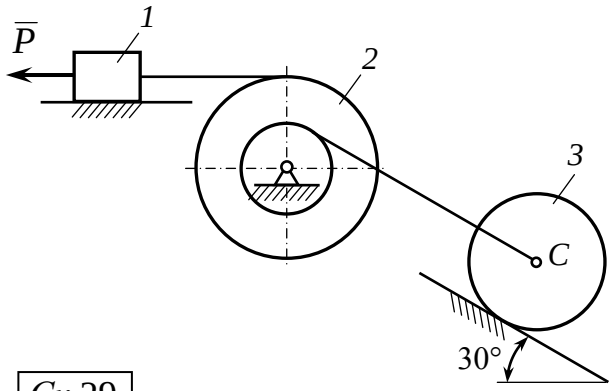
Cx.26



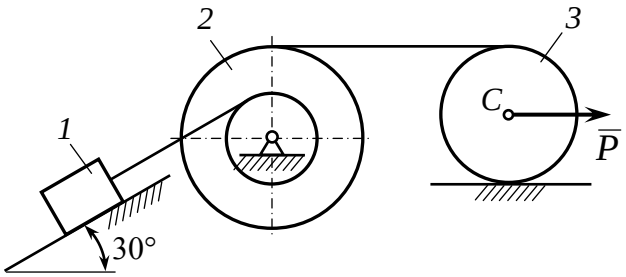
Cx.27



Cx.28



Cx.29



Cx.30

Задание № 9 (Д4)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Цель задания: Научиться применять принцип возможных перемещений при определении реакций опор составной конструкции.

Приступая к выполнению задания, следуем изучить теоретический материал ([1] 137-140; [2] 113, 114, 116).

Вопросник-минимум для защиты задания № 9 (Д4):

11) Какие перемещения механических систем называются возможными?
12) Какие связи механических систем называются идеальными?
13) В чем состоит принцип возможных перемещений?
14) Чему равна работа силы, вращающей твердое тело вокруг неподвижной оси?
15) В чем преимущество метода решения задач равновесия механической системы на основе принципа возможных перемещений по сравнению с методами статики?
16) В принцип возможных перемещений не входят силы реакций связей. Приведите алгоритм нахождения реакций связей с помощью принципа возможных перемещений.
17) Что называется обобщенными координатами механической системы?
18) Как связать между собой возможные перемещения, входящие в уравнение работ принципа возможных перемещений?
19) Как найти работу произвольной силы на заданных возможных перемещениях?
20) Сформулируйте принцип Даламбера для материальной точки и системы материальных точек?

Постановка задачи: Составная конструкция (схемы 1 ÷ 30 на страницах 88 ÷ 91) состоит из двух тел, соединенных шарниром в точке C, и нагружена сосредоточенной силой P, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и парой сил с моментом m.

Конструкция закреплена так, как показано на схемах. Определить составляющую реакций, указанные в столбце Г таблицы 9.1. Номер схемы студент выбирает по первым двум цифрам шифра, значения исходных данных и искомые величины следует взять из таблицы 9.1 по следующим четырем цифрам шифра.

ПОРЯДОК РАСЧЕТА

1. Изобразить на рисунке все силы, приложенные к системе тел, т.е. заданные силы и реакции связей на каждом из рисунков.

2. Отбросить связь, реакцию которой требуется определить.

3. Действие связи заменить ее реакцией, которая переходит в число задаваемых (активных) сил. При этом система, освобожденная от одной связи (если она статически определима), получает одну степень свободы.

4. Сообщить системе возможное перемещение, соответствующее этой степени свободы.

5. Составить уравнение работ принципа возможных перемещений, в которое входят не только задаваемые силы, но и реакция отброшенной связи. Из этого уравнения определить искомую реакцию.

Для определения реакций других связей поступить так же, отбрасывая снова только одну связь, т.е. сообщая системе одну степень свободы. Таким образом, последовательно можно найти все реакции связей, наложенных на систему.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ № 8 (Д4).

Определить опорные реакции *A* и *B* составной конструкции (рис 9.1), если $P_1 = 4$Н, $P_2 = 6$Н, $m = 8$ Н·м, $q = 2$ Н/м, $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 30°$. Размеры конструкции указаны на рисунке 9.1.

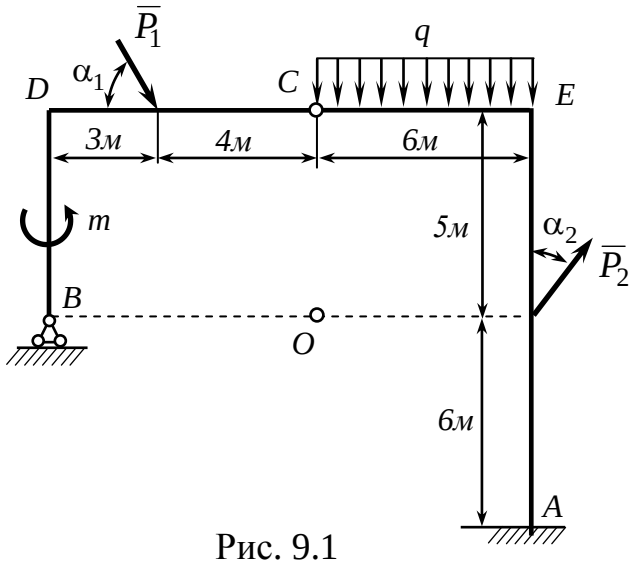


Рис. 9.1

Решение. Распределенную нагрузку заменим одной силой $Q = q \cdot 6 = 12$ Н.

Сначала последовательно определим реакции заделки: реактивный момент M_A, горизонтальную составляющую X_A и вертикальную составляющую Y_A.

Для определения реактивного момента M_A отбросим связь, препятствующую повороту рамы *AC*, заменив заделку шарнирно-неподвижной опорой, и приложим к раме реактивный момент M_A (рис. 9.2).

Сообщим системе возможное перемещение, повернув раму *AC* вокруг шарнира *A* на угол $\delta\varphi$, например, по ходу часовой стрелки. Тогда рама *BDC* будет совершать плоское движение. Найдем мгновенный центр вращения O_1 и выражая элементарное перемещение δS шарнира *C* через элементарные углы поворота $\delta\varphi$ рамы *CEA* и $\delta\varphi_1$ рамы *BDC*, найдем зависимость между ними

$$\delta S = \delta\varphi \cdot AC = \delta\varphi_1 \cdot CO_1 \quad \text{отсюда} \quad \delta\varphi_1 = \frac{AC}{CO_1}\delta\varphi.$$

Из подобия ΔAEC и ΔO_1DC: $\dfrac{AC}{CO_1}=\dfrac{CE}{DC}=\dfrac{6}{7}\Rightarrow\ \delta\varphi_1=\dfrac{6}{7}\delta\varphi.$ (9.1)

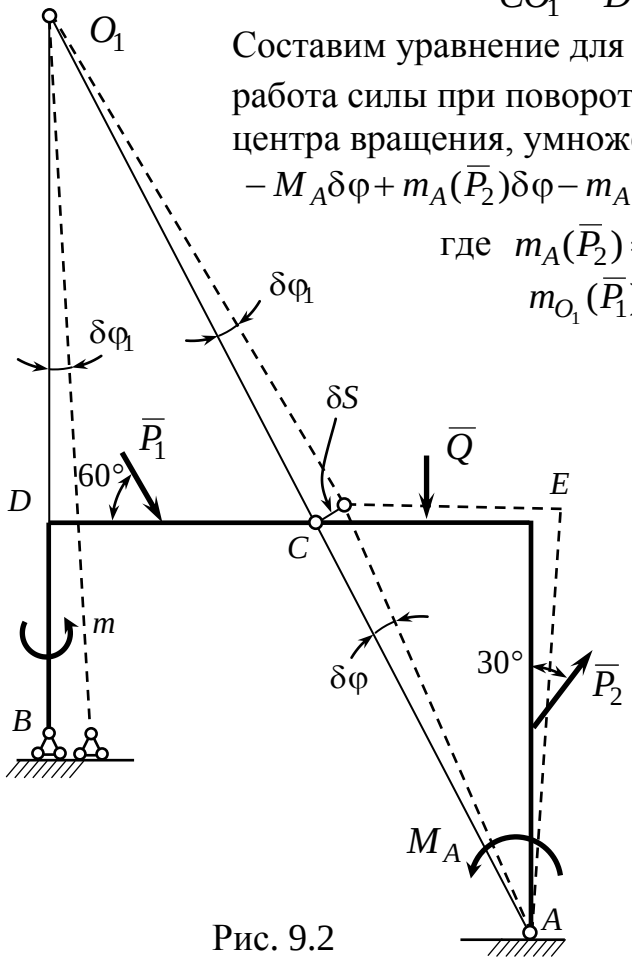


Рис. 9.2

Составим уравнение для реактивного момента M_A, учитывая, что работа силы при повороте тела равна моменту силы относительно центра вращения, умноженному на угол поворота:

$$-M_A\delta\varphi+m_A(\overline{P}_2)\delta\varphi-m_A(\overline{Q})\delta\varphi+m\delta\varphi_1+m_{O_1}(\overline{P}_1)\delta\varphi_1=0\,, \qquad (9.2)$$

где $m_A(\overline{P}_2)=P_2\cdot\sin\alpha_2\cdot 6=6\cdot\sin 30°\cdot 6=18$ Н·м,

$m_{O_1}(\overline{P}_1)=P_1(\cos 60°\cdot DO_1-\sin 60°\cdot 3)=15{,}27$ Н·м,

$m_A(\overline{Q})=Q\cdot 3=36$ Н·м,

$DO_1=\dfrac{AE}{CE}\cdot DC=\dfrac{11}{6}\cdot 7.$

Тогда уравнение работ (8.2) с учетом (8.1) примет вид:

$$\left(-M_A+18-36+8\cdot\frac{6}{7}+15{,}27\cdot\frac{6}{7}\right)\delta\varphi=0\,,$$

т.к. $\delta\varphi\neq 0$, то

$$-M_A+18-36+8\cdot\frac{6}{7}+15{,}27\cdot\frac{6}{7}=0\,,$$

откуда поучим $M_A=1{,}95$ Н·м.

Для определения горизонтальной составляющей заделки X_A представим опору A в виде ползуна A в горизонтальных направляющих, жестко скрепленного с рамой AC, и приложим к нему реакцию X_A (рис. 9.3). Сообщим системе возможное поступательное перемещение δx вправо. Это возможно, поскольку поворот ползуна в направляющих невозможен, а в точке B – подвижный каток.

Составим уравнения работ для определения горизонтальной составляющей заделки X_A:

$X_A\cdot\delta x+P_2\sin 30°\cdot\delta x+P_1\cos 60°\cdot\delta x=0,$

$(X_A+P_2\sin 30°+P_1\cos 60°)\delta x=0,$

т.к. $\delta\varphi\neq 0$, то

$X_A+P_2\sin 30°+P_1\cos 60°=0.$

Отсюда находим $X_A=-5$ Н.

Знак минус в ответе означает, что $\overline{X}_A$ должна быть направлена влево.

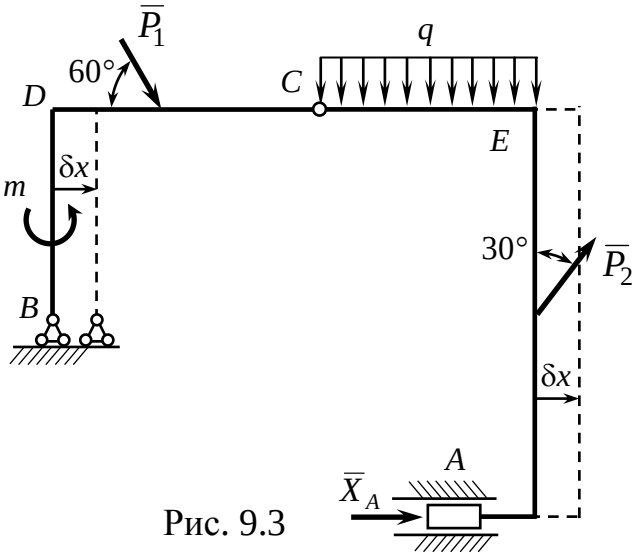


Рис. 9.3

Для определения вертикальной составляющей заделки $\overline{Y}_A$ представим опору A в виде ползуна A в вертикальных направляющих, жестко скрепленного

с рамой AC, и приложим к нему реакцию $\overline{Y}_A$ (рис. 9.4). Установим, какое перемещение можно сообщить поученной системе, не нарушая имеющихся связей. Участок AC получит только возможное поступательное перемещение, например, вверх, поскольку направляющие ползуна A препятствуют повороту рамы AC. Рама BDC будет совершать мгновенный поворот вокруг точки D.

Установим связь между элементарным перемещением δx и поворотом $\delta\varphi$:

$$\delta y = \delta\varphi \cdot DC = 7 \cdot \delta\varphi$$

Составим уравнение работ для определения вертикальной составляющей реакции заделки $\overline{Y}_A$:

$$Y_A \cdot \delta y + P_2 \cos 30° \cdot \delta y - Q \cdot \delta y - P_1 \sin 60° \cdot 3 \cdot \delta\varphi + m \cdot \delta\varphi = 0,$$

$$(7Y_A + 7P_2 \cos 30° - 7Q - 3P_1 \sin 60° + m)\delta\varphi = 0,$$

т.к. $\delta\varphi \neq 0$, то

$$Y_A = \left(-7 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 7 \cdot 12 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 8\right) \Big/ 7 = 7{,}15 \text{ Н}.$$

Для определения реакции опоры $\overline{Y}_B$ мысленно отбросим эту опору, приложив к раме BDC ее реакцию $\overline{Y}_B$. Сообщим поученной системе возможное перемещение, повернув раму BDC вокруг неподвижной точки C (рис. 9.5).

Уравнение работ для определения $\overline{Y}_B$ имеет вид:

$$7Y_B \cdot \delta\varphi - P_1 \sin 60° \cdot 4 \cdot \delta\varphi - m \cdot \delta\varphi = 0,$$

т.к. $\delta\varphi \neq 0$, то

$$7Y_B - P_1 \sin 60° \cdot 4 - m = 0,$$

$$Y_B = \left(4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 + 8\right) \Big/ 7 = 3{,}12 \text{ Н}.$$

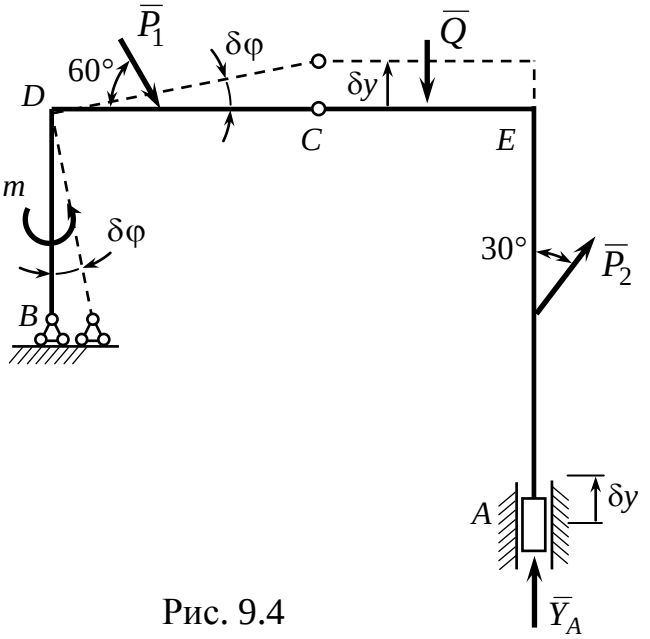


Рис. 9.4

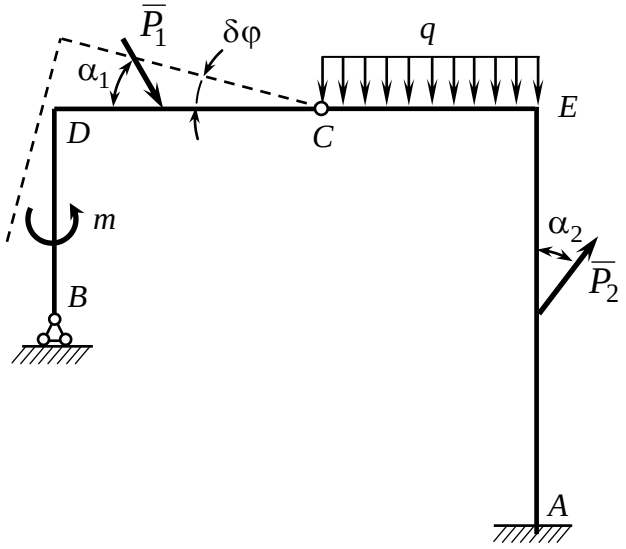


Рис. 9.5

Для проверки правильности решения задачи убедимся в том, что для всей конструкции удовлетворяются уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum m_O(\overline{F}_k) = 0.$$

$$\sum F_{kx} = X_A + P_1\cos 60° + P_2\sin 30° = -5 + 4\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2} = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - P_1\sin 60° - Q + P_2\cos 30° + Y_A = 3{,}12 - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 16 + 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 7{,}15 = 0{,}002,$$

$$\sum m_O(\overline{F}_k) = M_A + X_A\cdot 6 + Y_A\cdot 6 + P_2\cos 30°\cdot 6 - Q\cdot 3 - P_1\cos 60°\cdot 5 + P_1\sin 60°\cdot 4 +$$
$$+ m - Y_B\cdot 7 = 1{,}95 - 30 + 42{,}9 + 31{,}18 - 36 - 10 + 13{,}86 + 8 - 21{,}84 = 0{,}05.$$

Уравнения равновесия удовлетворяются с допустимой погрешностью вычислений.

Ответ: Опорные реакции в точке *A* будут равны:

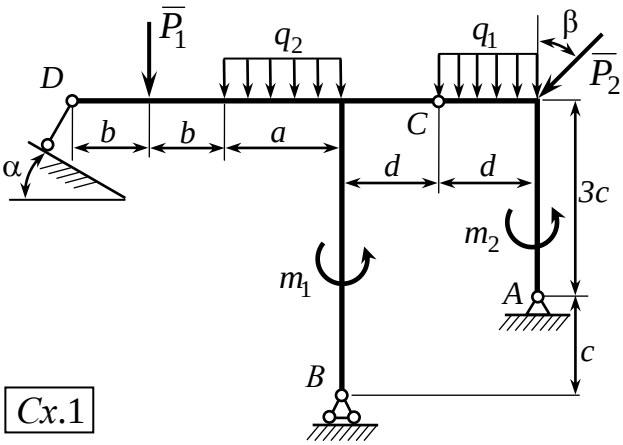
$X_A = -5$ Н, $Y_A = 7{,}15$ Н, $M_A = 1{,}95$ Н·м.

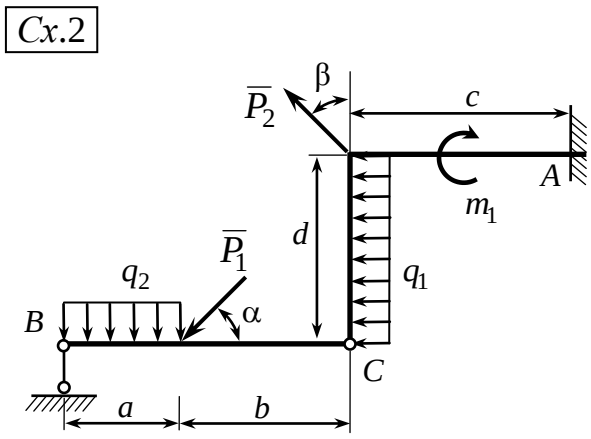
В точке *B*: $Y_B = 3{,}12$ Н.

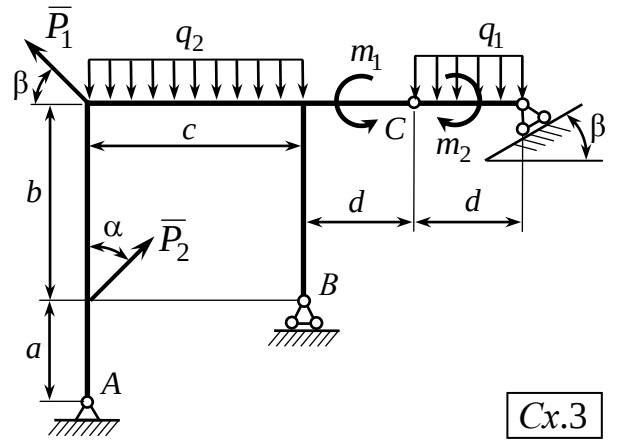
Таблица 9.1

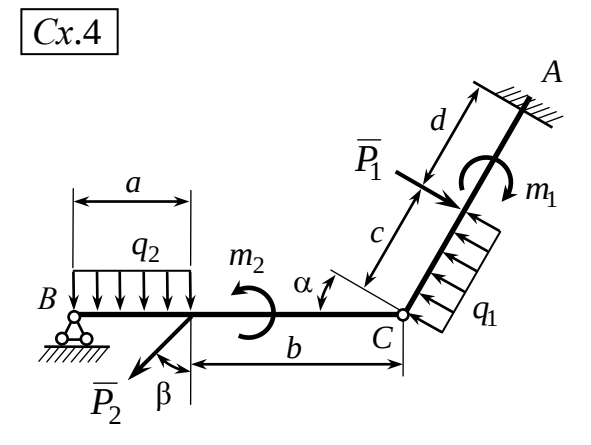
Исходные данные к заданию Д4

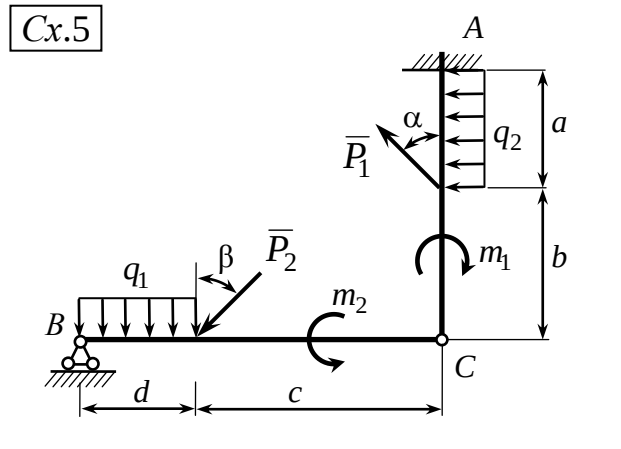
№№ п/п	А				Б		В						Г
	a, м	*b*, м	*c*, м	d, м	α, град	β, град	q_1, Н/м	q_2, Н/м	P_1, Н	P_2, Н	m_1, Н·м	m_2, Н·м	Найти
0	0,8	0,6	0,4	0,5	30	45	0	2	0	20	0	8	X_A,Y_A
1	1,0	0,4	0,6	0,6	45	60	2	0	16	0	6	0	X_A,Y_B
2	0,6	0,5	0,8	0,4	60	60	0	4	0	18	0	12	Y_A,Y_B
3	0,2	0,3	0,4	0,5	30	60	3	0	12	0	14	0	X_A,Y_A
4	0,4	0,8	0,3	0,6	45	30	0	3	0	10	0	16	X_A,Y_B
5	0,8	0,4	0,6	1,0	60	45	1	0	8	0	20	0	Y_A,Y_B
6	1,2	1,0	0,8	0,6	30	60	0	1	0	6	0	18	X_A,Y_A
7	0,6	0,4	1,0	0,8	45	60	4	0	15	0	15	0	X_A,Y_B
8	0,2	0,5	0,4	0,6	60	30	0	5	0	25	0	30	Y_A,Y_B
9	0,4	0,6	0,5	0,8	30	30	5	0	30	0	25	0	X_A,Y_A

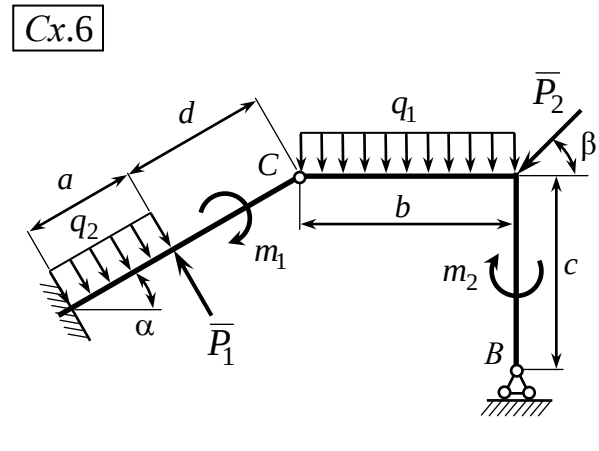

Cx.1
D
C
A
B
α
β
b
a
d
3c
c

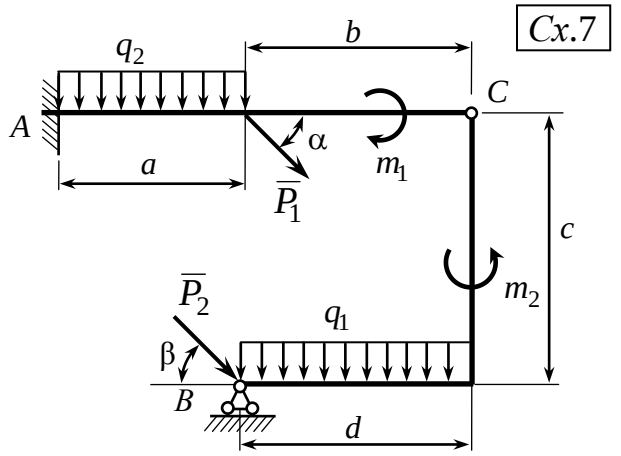

Cx.2
A
B
C
α
β
c
d
a
b

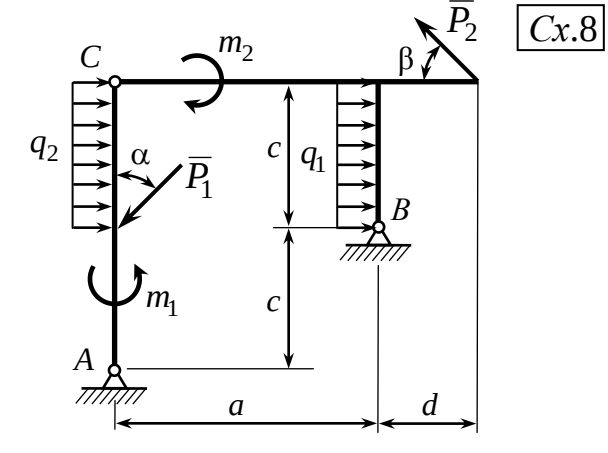

Cx.3
A
B
C
α
β
b
a
c
d

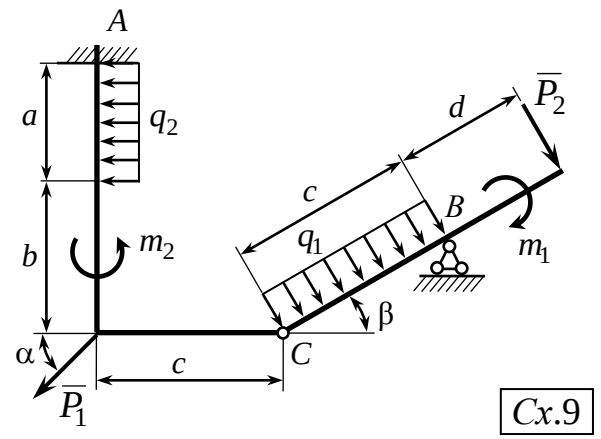

Cx.4
A
B
C
α
β
a
b
c
d


Cx.5
A
B
C
α
β
a
b
c
d

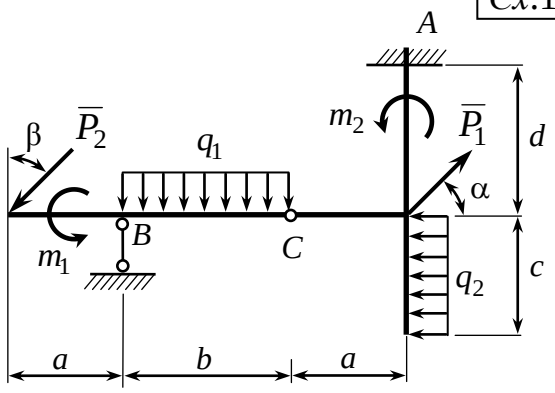

Cx.6
A
B
C
α
β
a
b
c
d


Cx.7
A
B
C
α
β
a
b
c
d

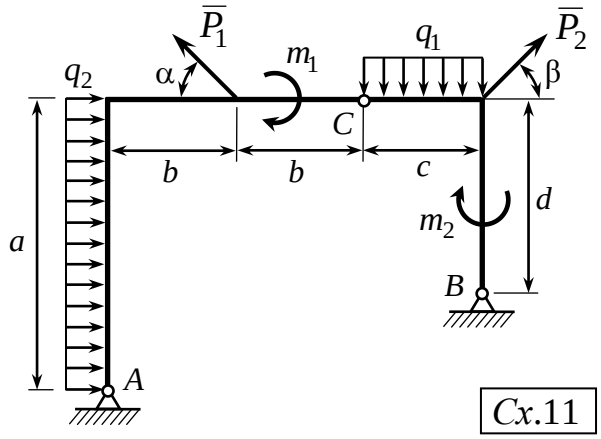

Cx.8
A
B
C
α
β
a
b
c
d



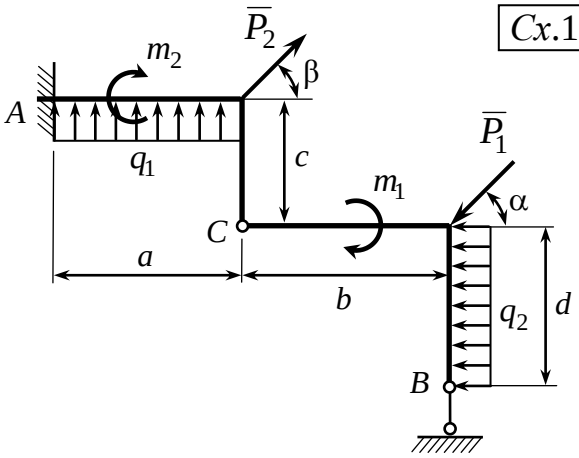
Cx.9



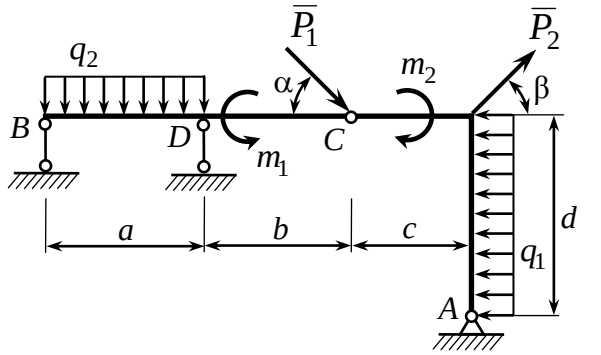
Cx.10



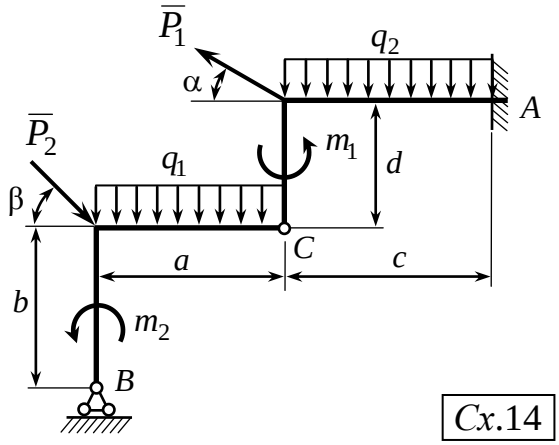
Cx.11



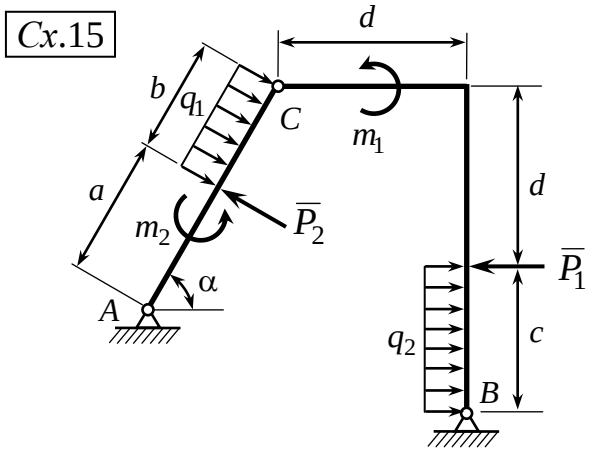
Cx.12



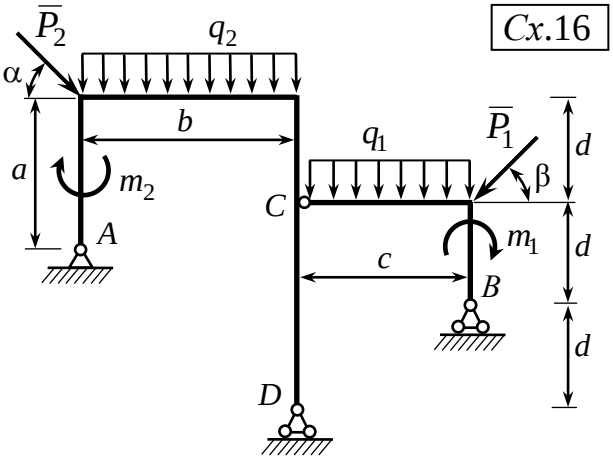
Cx.13



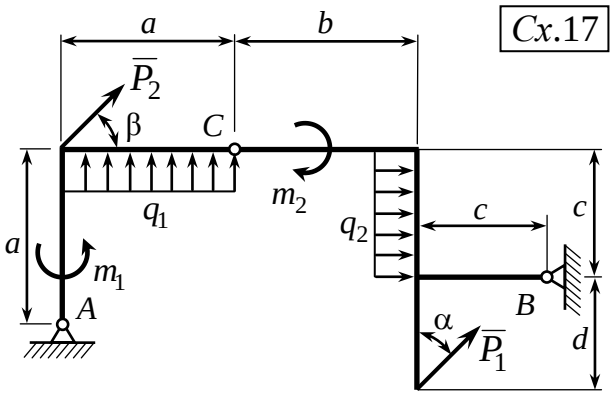
Cx.14



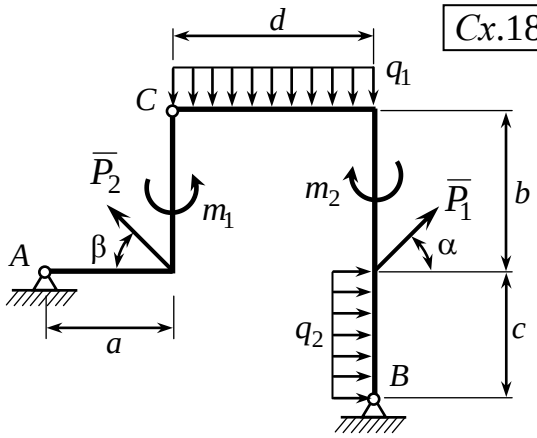
Cx.15



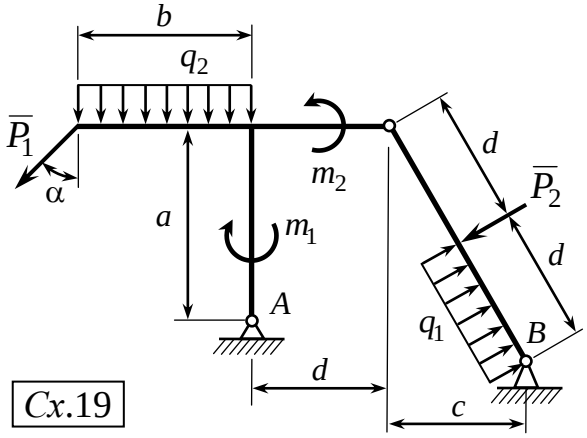
Cx.16



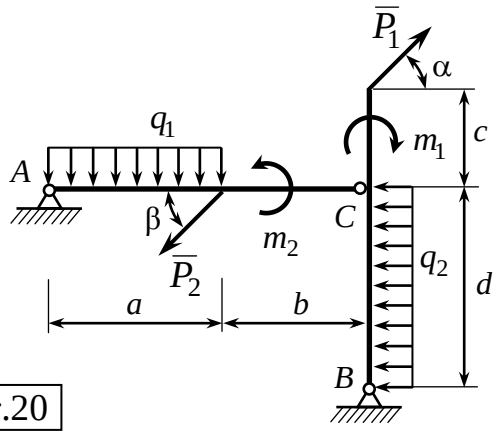
Cx.17



Cx.18

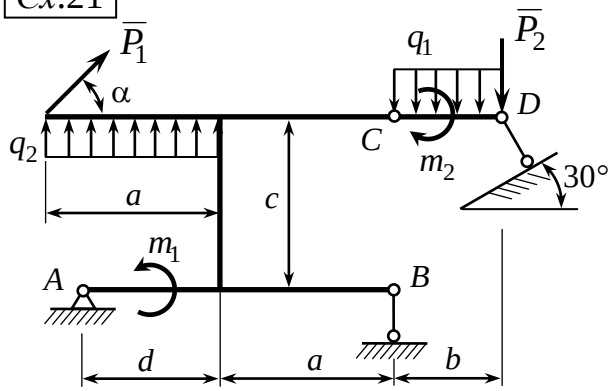


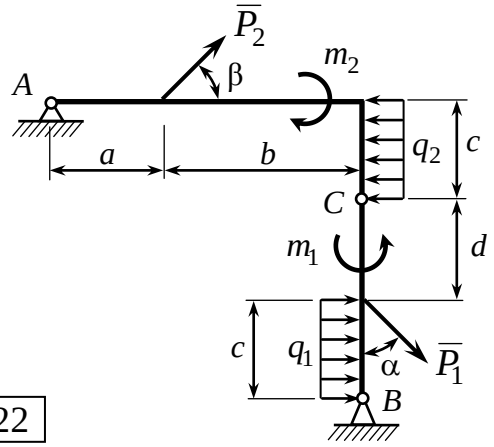
Cx.19



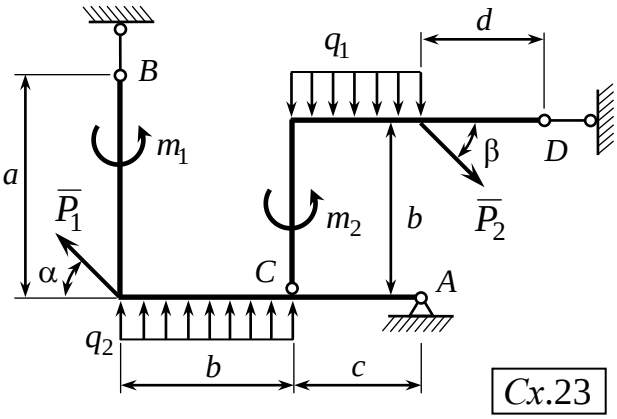
Cx.20

Cx.21

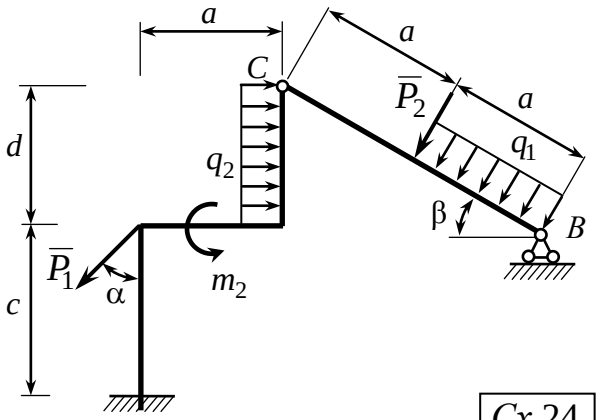




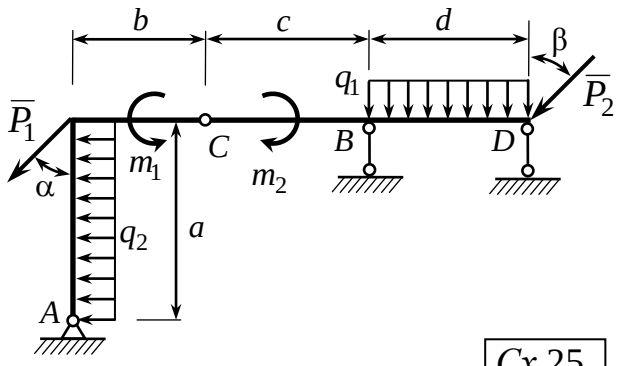
Cx.22



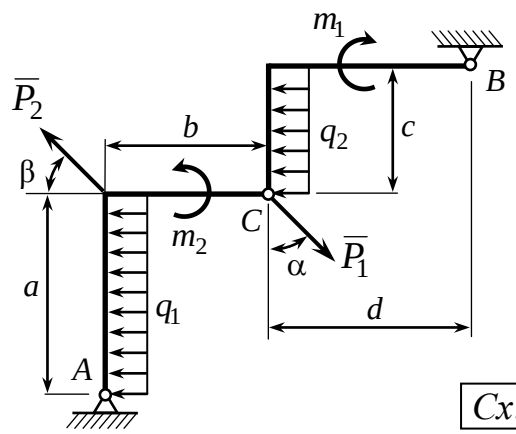
Cx.23



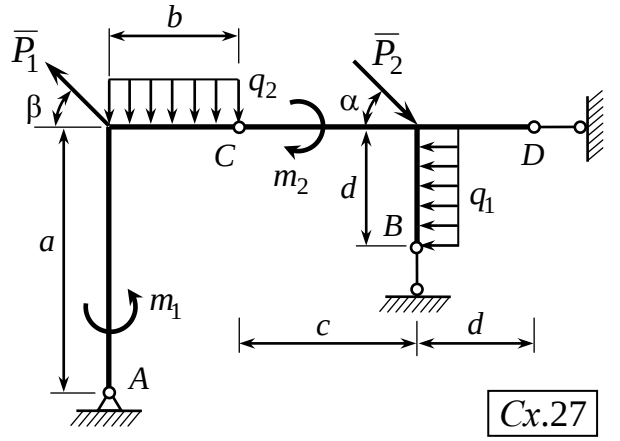
Cx.24



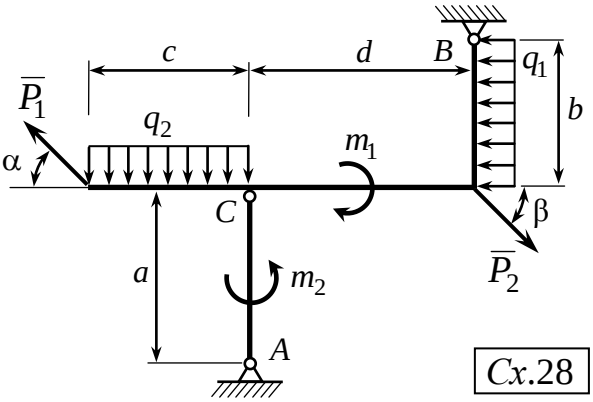
Cx.25



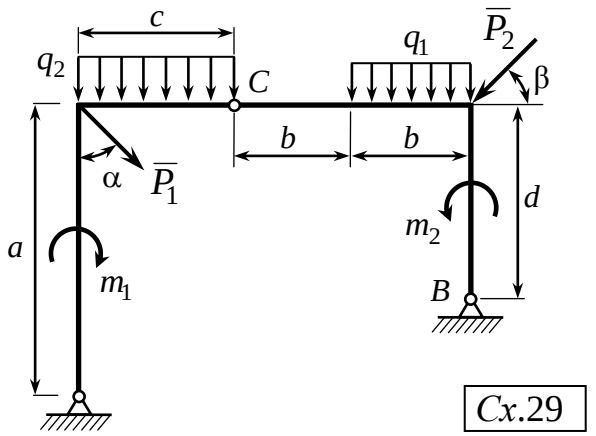
Cx.26



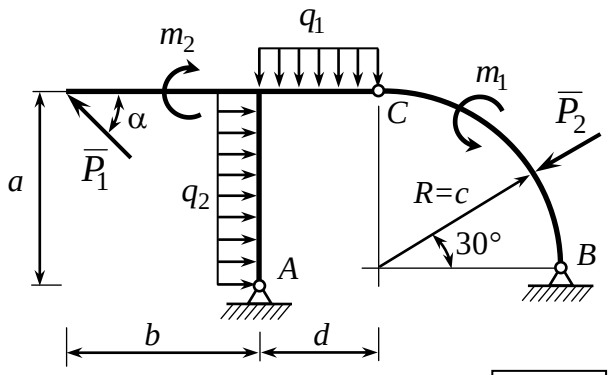
Cx.27



Cx.28



Cx.29



Cx.30

Приложение

Краткие сведения из математики

Алгебра

Преобразование показательных выражений

$a^x a^y = a^{x+y}$; $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $\sqrt[y]{a^x} = a^{x/y}$.

Логарифмы

$a^A = N \;\Rightarrow\; \log_a N = A$ (логарифм A числа N при основании a)

$\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$,

$\log(N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2$, $\log \dfrac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2$, $\log(N^n) = n \log N$.

$\log_{10} N = \lg N$ (десятичный логарифм, при основании 10)

$\log_e N = \ln N$ (натуральный логарифм, при основании $e = 2{,}71828...$)

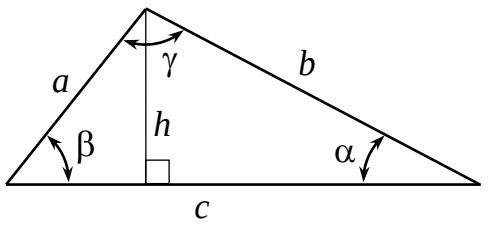
Корни квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$.

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ или $x_{1,2} = \dfrac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$.

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Геометрия

Треугольник



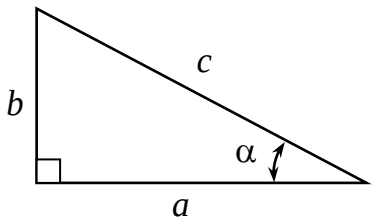
Сумма углов: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Площадь: $S = \dfrac{ch}{2}$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Треугольник прямоугольный



Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$

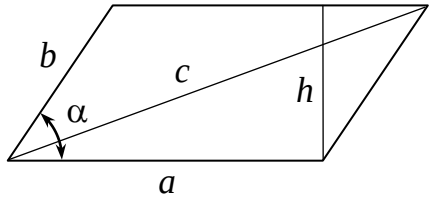
Площадь: $S = \dfrac{ab}{2}$

Соотношения сторон:

$\sin\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{c}$, $tg\alpha = \dfrac{b}{a}$,

$ctg\alpha = \dfrac{a}{b}$

Параллелограмм



Площадь: $S = ah$
Теорема косинусов:
$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

Тригонометрия

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha = \dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $tg\,2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right],$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right].$$

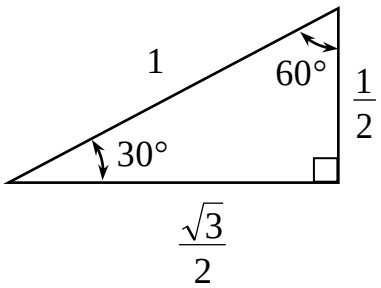
$\sin 0 = \cos 90° = 0$

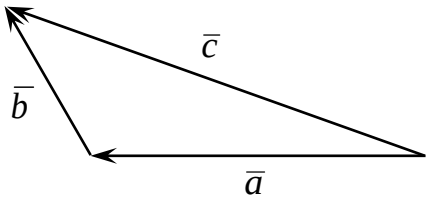
$\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 60° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 90° = \cos 0 = 1$

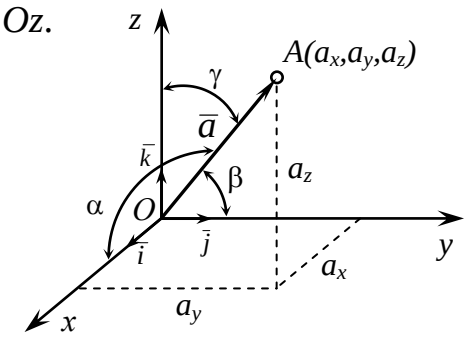




Элементы векторной алгебры

<u>Геометрический способ сложение векторов:</u> $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.
<u>Аналитический способ</u> задания и действия с векторами:
$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$,

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\bar{a}$ на оси *Ox*, *Oy*, *Oz*.



Косинусы углов между вектором и осями:

$\cos\alpha = a_x / a$, $\cos\beta = a_y / a$, $\cos\gamma = a_z / a$.

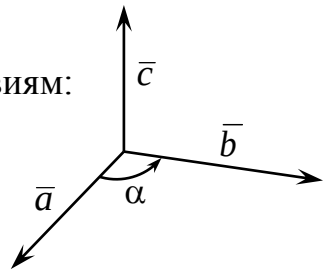
Если $\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k$, то $a_x = \sum_{k=1}^{n} a_{kx}$, $a_y = \sum_{k=1}^{n} a_{ky}$, $a_z = \sum_{k=1}^{n} a_{kz}$

Тогда модуль вектора

$$a = \sqrt{(\sum a_{kx})^2 + (\sum a_{ky})^2 + (\sum a_{kz})^2}.$$

<u>Скалярное произведение</u> двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть скалярная величина:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\alpha$$



Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть векторная величина $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, которая удовлетворяет условиям:

- длина вектора $\bar{c}$ равна $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\alpha$
- вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, направление определяется по правилу буравчика.

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z)\bar{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\bar{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\bar{k}.$$

Производные и интегралы элементарных функций

$C' = 0, \quad C = const$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

$(u+v)' = u' + v' \quad (uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Таблица неопределенных интегралов

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2004. – 416 с.

2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Учебник: 15-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 608 с.

3. Воронков И.М. Курс теоретической механики. М.: Наука, 164. – 596 с.

4. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механики. М.: Высшая школа, 1968. – 420 с.

5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоеретическая механика в примерах и задачах. Т.1. М.: Наука, 1972. – 524 с.

6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под общей редакцией проф. А.А. Яблонского. М.: Высшая школа, 1985. – 367 с.

7. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. 36-е изд. исправл. – М.: Наука, 1986. – 448 с. Или С-Петербург-Москва-Краснодар: Лань, 2008. – 448с.

8. Кепе О.Э., Виба Я.А. и др. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов; Под ред. Кепе О.Э. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с. Или 2-е стереотипное изд. С-Петербург, Лань, 2008. – 368с.

9. Шигабутдинов Ф.Г., Камалов А.З., Шигабутдинов А.Ф. Сборник задач по теоретической механике. Статика. / Учебное пособие. - Казань: КГАСУ, 2004. – 180с.

10. Шигабутдинов Ф.Г., Шигабутдинов А.Ф. Краткий курс теоретической механики. Часть 1. Статика. / Учебное пособие. - Казань: КГАСУ, 2009. – 171с.

11. Шигабутдинов Ф.Г., Шигабутдинов А.Ф. Краткий курс теоретической механики. Часть 2. Кинематика. / Учебное пособие. - Казань: КГАСУ, 2012. – 175с.

Теоретическая механика

Задания и краткие методические указания для выполнения расчетно-графических работ по теоретической механике. Учебно-методическое пособие для студентов обучающихся по направлению «Строительство»

Составители: А.В. Гумеров, Ф.Г. Шигабутдинов

Редактор В.Н. Сластникова

Издательство
Казанского государственного архитектурно-строительного университета
Подписано в печать Формат 60×84/16
Заказ № Печать ризографическая Усл.-печ. л. 2,75
Тираж экз. Бумага офсетная №1 Уч.-изд. л. 2,75

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ.
420043, Казань, Зеленая, 1.